ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

R. GAMBINI

Vibrations excitées par une onde gravitationnelle dans les milieux élastiques et viscoélastiques

Annales de l'I. H. P., section A, tome 23, nº 4 (1975), p. 389-406
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__23_4_389_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXIII, nº 4, 1975, p. 389-406.

Section A :
Physique théorique.

Vibrations excitées par une onde gravitationnelle dans les milieux élastiques et viscoélastiques

par

R. GAMBINI

Departamento de Física, Universidad Simón Bolivar,
Apartado postal 5354-Caracas 108

RÉSUMÉ. — Les conditions aux limites de l'équation du mouvement qui décrit les vibrations d'un corps élastique excitées par le passage d'une onde gravitationnelle sont déduites.

L'équation du mouvement et les conditions aux limites qui décrivent les vibrations excitées dans un corps viscoélastique sont trouvées et la production d'entropie due au passage de la radiation est calculée.

ABSTRACT. — The boundary conditions of the equation of motion which determines the vibrations of an elastic body induced by a gravitational wave are deduced.

The equation of motion and the boundary conditions which determine the vibrations of a viscoelastic body are found and the entropy production due to the passage of the radiation is calculated.

INTRODUCTION

Les vibrations élastiques excitées par la propagation d'une onde gravitationnelle ont été étudiées par Weber [*1*]. Il établit l'équation d'ondes élastiques à l'aide d'une généralisation de l'équation de déviation géodésique pour le cas d'une interaction entre particules du type élastique.

Papapetrou [*2*] a montré que les vibrations élastiques induites par un champ gravitationnel variable peuvent être étudiées d'une manière directe à l'aide de l'équation relativiste de l'élasticité jointe à l'équation relativiste du mouvement. Il a déduit les équations du mouvement vibratoire et les équations des ondes à l'intérieur d'un milieu élastique.

Nous allons déduire quelles sont les conditions aux limites qu'il faut imposer aux solutions de l'équation du mouvement calculée dans [2]. Nous allons montrer que, pour induire les vibrations, une onde gravitationnelle plane a le même effet qu'une force classique appliquée sur la surface limite du milieu élastique. Par conséquent, nous réduirons le problème de l'étude des vibrations excitées par une onde gravitationnelle à un problème d'élasticité classique.

A titre d'exemple, nous allons étudier les vibrations induites par le rayonnement gravitationnel sur un parallélépipède élastique et nous montrerons comment les déplacements et les tensions sont établis.

Nous allons montrer quelles sont, en général, les équations relativistes du mouvement pour un corps viscoélastique et déduire à partir de ces équations l'équation du mouvement et les conditions aux limites d'un système viscoélastique sous l'action d'un champ gravitationnel variable.

Nous allons déduire l'équation d'ondes viscoélastiques et nous allons montrer que cette équation est différente de celle déduite par Weber.

Nous allons étudier les vibrations parallèles et perpendiculaires à l'axe d'un cylindre soumis à l'action d'une onde polarisée et nous allons montrer dans quelle approximation on retrouve la solution de Weber pour les ondes longitudinales.

L'ÉQUATION RELATIVISTE DU MOUVEMENT D'UN CORPS ÉLASTIQUE

Rappelons les formules de l'élasticité en mécanique newtonienne.

On définit le tenseur de déformation S_{ik} par :

$$S_{ik} = \frac{1}{2}(S_{i,k} + S_{k,i}) \tag{1}$$

où

$$S_i = x^i - {}_0x^i, \tag{2}$$

${}_0x^i$ et x^i étant les coordonnées d'un point matériel du corps avant et après la déformation.

Le tenseur des tensions σ_{ik} est lié à S_{ik} par la loi de Hooke. Pour le cas d'un corps isotrope, elle prend la forme :

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(S_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\delta_{ik}S_{ll}\right) \tag{3}$$

où E est le module de Young et σ le coefficient de Poisson.

L'équation du mouvement est :

$$\rho_M S_{i,tt} = \sigma_{ik,k}, \tag{4}$$

ρ_M étant la densité de masse du corps.

En Relativité Générale, on remplace σ_{ik} par le tenseur symétrique quadridimensionnel $\Theta^{\mu\nu}$ satisfaisant à :

$$\Theta^{\mu\nu}\mathscr{U}_\nu = 0, \tag{5}$$

$\mathscr{U}_\nu$ étant la vitesse du point considéré.

Une formulation de l'équation fondamentale de l'élasticité en Relativité Générale utilisant le tenseur vitesse de déformation,

$$E_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathscr{U}}\tilde{g}_{\lambda\mu}, \tag{6}$$

où

$$\tilde{g}_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} - \mathscr{U}_\lambda\mathscr{U}_\mu \tag{7}$$

est l'opérateur de projection sur la surface orthogonale à $\mathscr{U}^\lambda$ et $\mathscr{L}_{\mathscr{U}}$ est la dérivée de Lie par rapport au vecteur $\mathscr{U}^\lambda$, a été développé par Synge [*3*], et Bennoun [*4*] qui a proposé l'équation

$$\mathscr{L}_{\mathscr{U}}\Theta_{\lambda\mu} = -C_{\lambda\mu}{}^{\alpha\beta}E_{\alpha\beta} \tag{8}$$

avec

$$C_{\lambda\mu\alpha\beta}\mathscr{U}^\mu = 0\,; \qquad C_{\lambda\mu\alpha\beta} = C_{\lambda\mu\beta\alpha} = C_{\mu\lambda\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\lambda\mu}. \tag{9}$$

Pour un corps élastique isotrope, on a

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta} + \frac{E}{2(1+\sigma)}(\tilde{g}_{\mu\alpha}\tilde{g}_{\nu\beta} + \tilde{g}_{\mu\beta}\tilde{g}_{\nu\alpha}). \tag{10}$$

D'autres formulations de la loi de Hooke ont été développées par Rayner [*5*], Hernández [*6*], Carter et Quintana [*7*].

On aura besoin de l'équation dynamique de la Relativité Générale :

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{11}$$

où $T^{\mu\nu}$ a la forme

$$T^{\mu\nu} = \rho\mathscr{U}^\mu\mathscr{U}^\nu - \Theta^{\mu\nu}. \tag{12}$$

Papapetrou [*2*] a introduit les hypothèses suivantes pour étudier les vibrations excitées par un champ gravitationnel variable à l'aide de (8), (11) et (12).

Le corps élastique est considéré comme un corps d'épreuve, c'est-à-dire que le champ gravitationnel est donné indépendamment de la présence de ce corps.

Avant l'arrivée de l'onde, le champ ${}_0g_{\mu\nu}$ est un champ stationnaire faible et le corps est en repos, c'est-à-dire :

$$(13)\qquad {}_0g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \quad ; \quad {}_0g_{\mu\nu,0} = 0 \quad , \quad {}_0S^k{}_{,0} = 0,$$

où les quantités $\gamma_{\mu\nu}$ sont petites par rapport à 1.

On suppose, en plus, que pendant le passage de l'onde,

$$(14)\qquad g_{\mu\nu} = {}_0g_{\mu\nu} + \lambda_{\mu\nu}$$

où $\lambda_{\mu\nu}$ est la quantité que décrit le champ variable dans le cas où ${}_0g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$; c'est-à-dire qu'on néglige l'interaction du champ stationnaire et de l'onde.

A cause de la définition de $E_{\lambda\mu}$, on a

$$(15)\qquad E_{\lambda\mu}\mathcal{U}^\mu = 0$$

et, par conséquent, dans l'approximation où $\lambda_{\mu\nu}$ et $S^i{}_{,0}$ sont du premier ordre, il suffit de calculer E_{ik}.

Papapetrou a trouvé :

$$(16)\qquad E_{ik} = -\,\varepsilon_{ik,0},$$

où

$$(17)\qquad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(S^i{}_{,k} + S^k{}_{,i} - \lambda_{ik}) = S_{ik} - \frac{1}{2}\lambda_{ik}$$

est la généralisation relativiste du tenseur de déformation classique.

On doit remarquer que ε_{ik} est invariant par rapport aux transformations de jauge :

$$(18)\qquad x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu.$$

Si on définit

$$(19)\qquad \vartheta_{ik} = \Theta_{ik} - {}_0\Theta_{ik},$$

où ${}_0\Theta_{ik}$ est le tenseur des tensions avant l'arrivée de l'onde, on trouve à l'aide de (8) la loi de Hooke généralisée :

$$(20)\qquad \vartheta_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(\varepsilon_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\delta_{ik}\varepsilon_{ll}\right).$$

Il trouve, avec les mêmes hypothèses, à partir de (11) et (12) l'équation du mouvement vibratoire d'un corps élastique en présence d'un champ gravitationnel variable :

$$(21)\qquad \rho\left(S^i{}_{,00} + \frac{1}{2}\lambda_{00,i} - \lambda_{0i,0}\right) = \vartheta_{ik,k}$$

qui est invariant par rapport aux transformations de jauge (18).

LES CONDITIONS AUX LIMITES DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT

Dans le cas d'un milieu élastique limité par une surface S, on a $\vartheta_{ik} = 0$ en dehors de la surface et ϑ_{ik} peut avoir une discontinuité sur la surface.

La dérivée de ϑ_{ik} du point de vue des distributions est [8] :

$$\vartheta_{ik,k} = \{ \vartheta_{ik,k} \} - \vartheta_{ik} n^k \delta(\mathrm{S}) \tag{22}$$

où $\{ \vartheta_{ik,k} \}$ est la dérivée usuelle de ϑ_{ik} qui est défini partout sauf sur la surface S, n^k la normale sortante et

$$\langle \vartheta_{ik} n^k \delta(\mathrm{S}), \varphi \rangle = \int_{\mathrm{S}} \vartheta_{ik} n^k \varphi d\mathrm{S}, \tag{23}$$

φ étant une fonction arbitraire indéfiniment dérivable à support borné.

On doit chercher les solutions de

$$\rho\left(\mathrm{S}^i{}_{,00} + \frac{1}{2}\lambda_{00,i} - \lambda_{0i,0}\right) = \{ \vartheta_{ik,k} \} \tag{21'}$$

avec les conditions aux limites :

$$\vartheta_{ik} n^k |_{\mathrm{S}} = 0. \tag{24}$$

Considérons maintenant le cas où le champ gravitationnel variable est une onde gravitationnelle plane se propageant dans la direction de l'axe Ox^3

$$\begin{cases} \lambda_{11} = -\lambda_{22} = f(x^0 - x^3) \\ \lambda_{12} = \quad \lambda_{21} = g(x^0 - x^3) \end{cases} \tag{25}$$

et toutes les autres composantes de $\lambda_{\mu\nu}$ sont nulles.

Nous trouvons, à partir de (21') :

$$\rho \mathrm{S}^i{}_{,00} = \{ \vartheta_{ik,k} \} \tag{26}$$

En tenant compte de (20), nous aurons pour les points intérieurs à S :

$$\{ \vartheta_{ik,k} \} = \frac{\mathrm{E}}{1+\sigma}\left(\mathrm{S}_{ik} - \frac{1}{2}\lambda_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\delta_{ik}\mathrm{S}_{ll}\right)_{,k} \tag{27}$$

mais, pour l'onde plane (25), on a

$$\lambda_{ik,k} = 0, \tag{28}$$

d'où l'on trouve comme équation du mouvement

$$\rho \mathrm{S}^i{}_{,00} = \sigma_{ik,k}. \tag{29}$$

Cette équation est identique à l'équation classique (4).

On peut voir sans difficulté, en écrivant (24) de la façon suivante

$$\vartheta_{ik}n^k|_S = \sigma_{ik}n^k|_S - \frac{E}{2(1+\sigma)}\lambda_{ik}n^k|_S = 0, \tag{30}$$

que, pour établir les déplacements, une onde gravitationnelle plane, du type (25), a le même effet qu'une force classique par unité de surface égale à $\frac{E}{2(1+\sigma)}\lambda_{ik}n^k$ appliquée sur la surface limite de milieu élastique.

VIBRATIONS EXCITÉES PAR LE RAYONNEMENT DANS UN CORPS ÉLASTIQUE

Une onde gravitationnelle qui arrive dans un milieu élastique initialement au repos a comme conséquence l'excitation des vibrations élastiques de ce corps.

On se place dans le cas le plus simple. L'onde gravitationnelle est une onde plane polarisée :

$$\lambda_{11} = -\lambda_{22} = A \sin[\omega(t - x^3/c)]U[\omega(t - x^3/c)], \tag{31}$$

où $U(x)$ est la fonction de Heaviside (1) :

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \leqslant 0, \\ 1 & \text{pour} \quad x > 0, \end{cases} \tag{32}$$

et nous allons étudier les ondes élastiques dans un milieu avec $\sigma = 0$. On suppose que la surface limite de ce corps élastique est un parallélépipède dont l'arête L_3 est parallèle à la direction de propagation de l'onde Ox^3 et telle que $2L_3 \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. Les arêtes L_1 et L_2 sont parallèles aux axes Ox^1 et Ox^2.

Nous allons chercher des solutions du type

$$S^1 = S^1(x^1, t) \quad , \quad S^2 = S^2(x^2, t) \quad , \quad S^3 = 0. \tag{33}$$

Nous avons déjà vu qu'il suffit de trouver des solutions de (29), c'est-à-dire

$$\begin{cases} a) & \rho S^1{}_{,00} - ES^1{}_{,11} = 0, \\ b) & \rho S^2{}_{,00} - ES^2{}_{,22} = 0 \end{cases} \tag{34}$$

(1) L'onde (31) a une discontinuité dans la dérivée première sur la surface et, par conséquent, ne vérifie pas les hypothèses de Lichnerowicz [9]. Cependant, à cause de la linéarité, toute superposition d'ondes du type (31) avec des discontinuités seulement dans les dérivées du deuxième ordre, excitera des vibrations que l'on trouve en superposant les solutions calculées pour chaque onde de ce type.

avec

$$(35)\qquad \begin{cases} a)\quad S^1{}_{,1}(\pm L_1) = \dfrac{A}{2}\sin \omega t \,.\, U(\omega t), \\ b)\quad S^2{}_{,2}(\pm L_2) = -\dfrac{A}{2}\sin \omega t \,.\, U(\omega t) \end{cases}$$

comme conditions aux limites, et les conditions initiales du repos :

$$(36)\qquad \left.\begin{matrix} a)\quad S^i(x^i, 0) = 0 \\ b)\quad S^i{}_{,0}(x^i, 0) = 0 \end{matrix}\right\} \forall x^i : -L_i \leqslant x^i \leqslant L_i$$

Les solutions de (34) sont de la forme

$$(37)\qquad S = D \,.\, e^{i(\pm kx + \Omega t)}$$

où

$$(38)\qquad k = \sqrt{\frac{\rho}{E}}\frac{\Omega}{c} = \frac{\Omega}{v}\,;$$

v est la vitesse de propagation des ondes dans le milieu élastique :

$$(39)\qquad \beta = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,.$$

Avant la première réflexion, la solution de (34) que vérifie (35) et (36) est

$$(40)\quad S^1 = \frac{A}{2k}\{1 - \cos[k(x^1 - L_1) + \omega t]\} U[k(x^1 - L_1) + \omega t] - \frac{A}{2k}\{1 - \cos[-k(x^1 + L_1) + \omega t]\} U[-k(x^1 + L_1) + \omega t]\,;$$

par conséquent, on a deux ondes qui se propagent en sens inverse avec une vitesse $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,c$.

A cause de la condition aux limites (35), on aura pour $\frac{4L}{v} \geqslant t \geqslant \frac{2L}{v}$ c'est-à-dire après la première réflexion :

$$(41)\quad \begin{aligned} S^1 = {} & \frac{A}{2k}\{1 - \cos[k(x^1 - L_1) + \omega t]\} \\ & - \frac{A}{2k}\{1 - \cos[-k(x^1 + L_1) + \omega t]\} \\ & + \frac{A}{2k}\{1 - \cos[-k(x^1 + 3L_1) + \omega t]\} U[-k(x^1 + 3L_1) + \omega t] \\ & - \frac{A}{2k}\{1 - \cos[k(x^1 - 3L_1) + \omega t]\} U[k(x^1 - 3L_1) + \omega t) \end{aligned}$$

et pour une valeur arbitraire du temps le déplacement est

$$(42) \quad S^1 = \frac{A}{2k}\{1 - \cos[k(x^1 - L_1) + \omega t]\}U[k(x^1 - L_1) + \omega t]$$

$$- \frac{A}{2k}\{1 - \cos[-k(x^1 + L_1) + \omega t]\}U[-k(x^1 + L_1) + \omega t]$$

$$\vdots$$

$$-(-1)^n\frac{A}{2k}\{1 - \cos[-k(x^1 + (2n+1)L_1) + \omega t]\}$$
$$U[-k(x^1 + (2n+1)L_1) + \omega t]$$

$$(-1)^n\frac{A}{2k}\{1 - \cos[k(x^1 - (2n+1)L_1) + \omega t]\}$$
$$U[k(x^1 - (2n+1)L_1) + \omega t]$$

n étant le nombre de réflexions :

$$(43) \qquad n = \mathscr{E}\left[\frac{vt}{2L}\right]$$

où $\mathscr{E}[x]$ est la fonction partie entière de x.

En effet, à cause de la fonction de Heaviside, les conditions initiales sont satisfaites. Quant aux conditions aux limites, on a :

$$(44) \quad S^1{}_{,1}(L_1) = \frac{A}{2}\sin\omega t U(\omega t) + \frac{A}{2}\sin(-2kL_1 + \omega t)U[-2kL_1 + \omega t]$$

$$- \frac{A}{2}\sin(-4kL_1 + \omega t)U[-4kL_1 + \omega t]$$

$$- \frac{A}{2}\sin(-2kL_1 + \omega t)U[-2kL_1 + \omega t]$$

$$\vdots$$

$$= \frac{A}{2}\sin\omega t U(\omega t).$$

On vérifie la condition pour $S^1{}_{,1}(-L_1)$ d'une manière analogue.

Nous allons étudier quelle est la perturbation après n réflexions et comment ce mouvement dépend de la fréquence de l'onde gravitationnelle incidente.

Pour $\frac{2nL}{v} \leqslant t \leqslant \frac{2(n+1)L}{v}$, on a

$$(45) \quad S^1 = -\frac{A}{2k}\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\left[e^{i(kx^1+\omega t)-ik(2j+1)L_1} - e^{i(-kx^1+\omega t)-ik(2j+1)L_1}\right]\right\}$$

$$-(-1)^n\frac{A}{2k}[1-\cos[-k(x^1+(2n+1)L_1)+\omega t]]U[-k(x^1+(2n+1)L_1)+\omega t]$$

$$+(-1)^n\frac{A}{2k}[1-\cos[k(x^1-(2n+1)L_1)+\omega t]]U[k(x^1-(2n+1)L_1)+\omega t]$$

d'où

$$(46)\quad S^1 = \frac{A}{k}\sin kx^1 \operatorname{Im}\left\{ e^{i\omega t}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j e^{-ik(2j+1)L_1}\right\}$$
$$-(-1)^n \frac{A}{2k}[1-\cos[-k(x^1+(2n+1)L_1)+\omega t]]U[-k(x^1+(2n+1)L_1)+\omega t]$$
$$(-1)^n \frac{A}{2k}[1-\cos[k(x^1-(2n+1)L_1)+\omega t]]U[k(x^1-(2n+1)L_1)+\omega t].$$

On peut calculer aisément la somme que l'on trouve dans la dernière expression :

$$(47)\quad \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j e^{-ik(2j+1)L} = \begin{cases} a)\ (-1)^{N+1}, & \text{pour} \quad kL = (2N+1)\pi/2 \\ b)\ \dfrac{1-e^{-in(2kL+\pi)}}{2\cos kL}, & kL \neq (2N+1)\pi/2 \end{cases}$$

Le cas *a*) est le cas de la résonance, c'est-à-dire pour

$$kL = \frac{\omega L}{v} = (2N+1)\pi/2 \qquad \text{et} \qquad \frac{2nL}{v} \leqslant t \leqslant \frac{2(n+1)L}{v}:$$

$$(48)\quad S^1 = \frac{nA}{k}(-1)^{N+1}\sin kx^1 \cos\omega t$$
$$-(-1)^n \frac{A}{2k}[1-\cos[-k(x^1+(2n+1)L_1)+\omega t]]U[-k(x^1+(2n+1)L_1)+\omega t]$$
$$(-1^n)\frac{A}{2k}[1-\cos[k(x^1-(2n+1)L_1)+\omega t]]U[k(x^1-(2n+1)L_1)+\omega t]$$

et le déplacement croît avec le nombre n de réflexions.

Si on définit la fréquence fondamentale ω_0 par $\frac{\omega_0 L}{v} = k_0 L = \frac{\pi}{2}$, les fréquences de résonance sont $\omega = (2N+1)\omega_0$.

Nous trouvons pour le cas $kL \neq (2N+1)\pi/2$, c'est-à-dire en dehors de la résonance, après n réflexions.

$$(49)\quad S^1 = \frac{A\sin kx^1}{2k\cos kL_1}[\sin\omega t - \sin[\omega t - n(2kL_1+\pi)]]$$
$$-(-1)^n \frac{A}{2k}[1-\cos[-k(x^1+(2n+1)L_1)+\omega t]]U[-k(x^1+(2n+1)L_1)+\omega t]$$
$$(-1)^n \frac{A}{2k}[1-\cos[k(x^1-(2n+1)L_1)+\omega t]]U[k(x^1-(2n+1)L_1)+\omega t]$$

Comme dans le cas bien connu de l'oscillateur harmonique de fréquence naturelle ω_0, le mouvement total est la superposition d'un mouvement de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et d'un autre, de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4L}{v}$.

En effet, d'après (43), on a

$$n_{t+T_0} = \mathscr{E}\,\frac{[v(t + T_0)]}{2L} = n_t + 2, \tag{50}$$

d'où l'on déduit pour le deuxième terme de (49) :

$$\begin{aligned}\sin\,[\omega(t + T_0) - n_{t+T_0}(2kL + \pi)] &= \sin\,[\omega t + 4kL - (n_t + 2)(2kL + \pi)] \\ &= \sin\,[\omega t - n_t(2kL + \pi)]\end{aligned} \tag{51}$$

et, d'une façon analogue, nous pouvons démontrer la même propriété pour les deux derniers termes de (49). Cependant, dans ce cas, le mouvement n'est plus la superposition de deux vibrations harmoniques simples; en effet, tous les harmoniques $\omega_N = (2N + 1)\omega_0$ sont excités.

Nous avons montré que l'onde élastique de déplacement induite par l'onde gravitationnelle se propage à partir de la surface du milieu élastique. Par conséquent, en tenant compte que $v \ll c$, pendant une certaine période de temps après l'arrivée de l'onde gravitationnelle les déplacements seront nuls sauf dans la région proche aux limites du corps. Cependant, les tensions induites par l'onde sont non nulles, même avant l'arrivée de l'onde élastique de déplacement. En effet, d'après (17) et (20), on a pour l'onde plane (25) dans la région où $S_{ik} = 0$:

$$\vartheta_{ik} = \frac{-E}{2(1 + \sigma)}\,\lambda_{ik}. \tag{52}$$

Ce phénomène est dû à la variation de la distance entre deux points du milieu au repos à cause de la modification de la métrique par l'onde gravitationnelle.

LES MILIEUX VISCOÉLASTIQUES EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

On a supposé jusqu'ici que les déformations sont des phénomènes réversibles. L'existence de processus irréversibles a comme conséquence la dissipation de l'énergie en chaleur.

On a deux sources de dissipation : premièrement, les processus de conduction thermique dus aux différences de température entre les points du milieu; deuxièmement, les processus de friction interne, c'est-à-dire de viscosité.

Ici, nous n'étudierons que le deuxième type de processus.

Le tenseur symétrique des tensions $\Theta^{\mu\nu}$ satisfait à la condition d'orthogonalité (5) et il est la somme d'une partie élastique, plus une partie dissipative :

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{E\mu\nu} + \Theta^{D\mu\nu} \tag{53}$$

où $\Theta^{E\mu\nu}$ est le tenseur des tensions élastiques, lié au tenseur de vitesse de déformation $E_{\mu\nu}$ par la loi de Hooke (8) et, par conséquent,

$$\Theta^{D\mu\nu} = \Theta^{D\nu\mu} \quad , \quad \Theta^{D\mu\nu}\mathscr{U}_\nu = 0. \tag{54}$$

La projection de l'équation dynamique de la Relativité Générale (11) selon $\mathscr{U}_\mu$ nous donne :

$$\begin{aligned}(55)\qquad \mathscr{L}_{\mathscr{U}}\rho = \dot{\rho} + \rho\mathscr{U}^\nu{}_{;\nu} = \Theta^{\mu\nu}{}_{;\nu}\mathscr{U}_\mu = -\,\Theta^{\mu\nu}\mathscr{U}_{\mu;\nu} \\ = -\,\Theta^{\mu\nu}E_{\mu\nu} = -\,(\Theta^{E\mu\nu} + \Theta^{D\mu\nu})E_{\mu\nu}\end{aligned}$$

avec

$$\dot{\rho} = \rho_{;\alpha}\mathscr{U}^\alpha.$$

Le vecteur d'entropie est

$$(56)\qquad S^\mu = n\sigma\mathscr{U}^\mu$$

où n est le nombre de particules par unité de volume et σ représente maintenant l'entropie par particule.

Si m est l'énergie de la masse au repos par particule et ε l'énergie interne spécifique, on a

$$(57)\qquad \rho = nm(1 + \varepsilon)$$

En tenant compte de (55) et de l'équation de conservation du nombre des particules :

$$(58)\qquad (n\mathscr{U}^\mu)_{;\mu} = 0,$$

on trouve à l'aide de la première loi de la thermodynamique la vitesse de dissipation de l'énergie par unité de volume [*10*]-[*13*] :

$$\begin{aligned}(59)\qquad TS^\mu{}_{;\mu} = Tn\dot{\sigma} = nm\dot{\varepsilon} + \Theta^{E\mu\nu}E_{\mu\nu} = \mathscr{L}_{\mathscr{U}}\rho + \Theta^{E\mu\nu}E_{\mu\nu} \\ = -\,\Theta^{D\mu\nu}E_{\mu\nu} \geqslant 0.\end{aligned}$$

A cause de la deuxième loi de la thermodynamique, la vitesse de dissipation de l'énergie doit être positive pour toute vitesse de déformation non nulle; elle est, donc, minimum pour $E_{\alpha\beta} = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}(60)\qquad TS^\mu{}_{;\mu} = D^{\alpha\beta\mu\nu}E_{\alpha\beta}E_{\mu\nu}\,; \\ D^{\alpha\beta\mu\nu} = D^{\beta\alpha\mu\nu} = D^{\alpha\beta\nu\mu} = D^{\mu\nu\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$(61)\qquad \Theta^{D\mu\nu} = -\,D^{\mu\nu\alpha\beta}E_{\alpha\beta}$$

où

$$(62)\qquad D^{\alpha\beta\mu\nu}\mathscr{U}_\nu = 0$$

et $D^{\alpha\beta\mu\nu}$ a 21 composantes indépendantes, comme dans la théorie de l'Élasticité newtonienne.

Dans le système de coordonnées local de Lorentz en comouvement avec une particule du corps, $D^{\alpha\beta\mu\nu}$ est réduit à l'expression classique η_{iklm} [*14*]. Pour un corps isotrope, on a :

$$(63)\qquad D_{\mu\nu\alpha\beta} = \eta c\left[(\tilde{g}_{\mu\alpha}\tilde{g}_{\nu\beta} + \tilde{g}_{\mu\beta}\tilde{g}_{\nu\alpha}) - \frac{2}{3}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}\right] + \zeta c\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}$$

où η et ζ sont les deux coefficients de viscosité et c la vitesse de la lumière.

VIBRATIONS VISCOÉLASTIQUES EXCITÉES PAR UNE ONDE GRAVITATIONNELLE

Considérons maintenant le cas d'une onde gravitationnelle qui arrive sur le corps viscoélastique.

Nous allons travailler avec les hypothèses de Papapetrou que nous avons énumérées dans la première partie.

Avant l'arrivée de l'onde, le corps est au repos, par conséquent :

$$(64) \qquad {}_0\Theta^{D\mu\nu} = 0 \qquad \text{et} \qquad {}_0\Theta^{\mu\nu} = {}_0\Theta^{E\mu\nu}$$

et

$$(65) \qquad \vartheta^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} - {}_0\Theta^{\mu\nu} = \vartheta^{E\mu\nu} + \Theta^{D\mu\nu} = \vartheta^{E\mu\nu} + \vartheta^{D\mu\nu}.$$

Avec ces hypothèses, la relation (16) reste valable et on trouve à partir de (61) et (63) :

$$(66) \qquad \begin{aligned} \vartheta^{D}_{ik} &= \left\{ \eta c \left[(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{kj}) - \frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{jl} \right] + \zeta c \delta_{ik}\delta_{jl} \right\} \varepsilon_{jl,0} \\ &= 2\eta c\left(\varepsilon_{ik,0} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_{ll,0} \right) + \zeta c \delta_{ik}\varepsilon_{ll,0} \end{aligned}$$

Si on tient compte que $\Theta^{\mu\nu} = {}_0\Theta^{\mu\nu} + \vartheta^{\mu\nu}$, on trouve à partir des composantes spatiales de la projection orthogonale à $\mathcal{U}^\mu$ de l'équation dynamique de la Relativité Générale,

$$(67) \qquad \rho\dot{\mathcal{U}}_i = \Theta_{i\alpha}{}^{;\alpha} - \mathcal{U}_i \Theta_{\alpha\beta}{}^{;\beta}\mathcal{U}^\alpha$$

avec une méthode tout à fait analogue à celle de Papapetrou [*2*], l'équation du mouvement :

$$(68) \qquad \rho\left(S^i{}_{,00} + \frac{1}{2}\lambda_{00,i} - \lambda_{0i,0} \right) = \vartheta_{ik,k} = \vartheta^{E}{}_{ik,k} + \vartheta^{D}{}_{ik,k}$$

où, pour un corps isotrope ϑ^{E}_{ik} est donné par (20).

Pour un milieu viscoélastique limité par une surface S, on doit chercher les solutions de

$$(69) \qquad \rho\left(S^i{}_{,00} + \frac{1}{2}\lambda_{00,i} - \lambda_{0i,0} \right) = \{ \vartheta^{E}{}_{ik,k} \} + \{ \vartheta^{D}{}_{ik,k} \}$$

avec les conditions aux limites

$$(70) \qquad (\vartheta^{E}{}_{ik} + \vartheta^{D}{}_{ik})n^k|_S = 0.$$

Si l'on tient compte que pour une onde plane de la forme (25), à l'intérieur du corps

$$(71) \qquad \{ \vartheta^{D}{}_{ik,k} \} = \sigma^{D}{}_{ik,k},$$

où σ^{D}_{ik} est le tenseur de tensions dissipatives classique, on peut encore réduire le problème de l'étude des vibrations viscoélastiques induites par une onde gravitationnelle plane à un problème classique avec une force appliquée sur la surface qui dépend de la contribution $\lambda_{\mu\nu}$ de la métrique de l'onde.

En effet, on peut réécrire (69) :

$$\rho S^{i}{}_{,00} = \sigma^{E}{}_{ik,k} + \sigma^{D}{}_{ik,k} \tag{72}$$

et (70)

$$(\sigma^{E}{}_{ik} + \sigma^{D}{}_{ik})n^{k}\,|_{S} = \left[\frac{E}{2(1+\sigma)}\lambda_{ik} + \eta c\lambda_{ik,0}\right]n^{k}\,|_{S}. \tag{73}$$

Pour comparer cette formulation avec celle donnée par Weber [1], nous allons calculer l'équation d'ondes viscoélastiques. En prenant la dérivée par rapport à x^k de (69), on trouve après la symétrisation par rapport à i, k.

$$\varepsilon_{ik,00} + R_{i00k} = \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}\left\{\varepsilon_{il,lk} + \varepsilon_{kl,li} + \frac{2\sigma}{1-2\sigma}\varepsilon_{ll,ik}\right\} + \frac{\eta c}{\rho}\left\{\varepsilon_{il,lk0} + \varepsilon_{kl,li0} + \frac{\zeta - \frac{2}{3}\eta}{\eta}\varepsilon_{ll,ik0}\right\} \tag{74}$$

où

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\lambda_{\alpha\nu,\beta\mu} + \lambda_{\beta\mu,\alpha\nu} - \lambda_{\alpha\mu,\beta\nu} - \lambda_{\beta\nu,\alpha\mu}\right]$$

est la valeur linéarisée du tenseur de Riemann.

On déduit de (17) en tenant compte que l'onde gravitationnelle satisfait les équations d'Einstein pour le vide :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ik,00} + R_{i00k}\left(1 - \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}\right) - \frac{\eta c}{\rho}R_{i00k,0} \\ - \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}\varepsilon_{ik,ll} - \frac{E}{2\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}\varepsilon_{ll,ik} \\ - \frac{\eta c}{\rho}\varepsilon_{ik,ll0} - \frac{(\zeta + \eta/3)c}{\rho}\varepsilon_{ll,ik0}.\end{aligned} \tag{75}$$

Pour une onde gravitationnelle de fréquence ω,

$$\left|\frac{\eta c}{\rho}R_{i00k,0}\right| = \left|\frac{\eta\omega}{\rho}R_{i00k}\right|$$

en tenant compte que pour les matériaux ordinaires et pour les fréquences $\omega \sim 10^3 c/s$ (expérience de Weber)

$$\frac{E}{2\rho(1+\sigma)} \ll 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\eta\omega}{\rho} \ll 1$$

on a :

$$\varepsilon_{ik,00} + R_{i00k} - \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}\varepsilon_{ik,ll} - \frac{E}{2\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}\varepsilon_{ll,ik} - \frac{\eta c}{\rho}\varepsilon_{ik,ll0} - \frac{(\zeta+\eta/3)c}{\rho}\varepsilon_{ll,ik0}. \tag{76}$$

Dans le cas d'un corps viscoélastique avec $\sigma = 0$, $\zeta - 2\eta/3 = 0$ sous l'action d'une onde gravitationnelle de la forme (31), l'équation (76) pour les ondes longitudinales se propageant dans la direction x^1 devient

$$\varepsilon_{11,00} + R_{1001} - \frac{E}{\rho}\varepsilon_{11,11} - \frac{2\eta c}{\rho}\varepsilon_{11,110} = 0 \tag{77}$$

Cette équation est à comparer avec l'équation correspondante donnée par Weber [*1*] (²). Le terme dissipatif est différent, en effet, notre terme est proportionnel à la dérivée seconde du terme trouvé par Weber (³).

Si l'on cherche la solution de (77) ou de l'équation du mouvement équivalente que l'on trouve à partir de (72) :

$$\rho S^1{}_{,00} = ES^1{}_{,11} + 2\eta c S^1{}_{,110} \tag{78}$$

avec la condition aux limites (73) qui devient

$$S^1{}_{,1}(\pm L_1) = \frac{1}{2}\lambda_{11}, \tag{79}$$

on trouve pour $\lambda_{11} = Ae^{i(\omega t - kx^3)} \simeq Ae^{i\omega t}$ dans l'hypothèse d'un cylindre de rayon beaucoup plus petit que $\lambda_G = \dfrac{2\pi}{k}$ la solution :

$$S^1 = C.\sin\left[\frac{k_0}{\sqrt{1 + i\dfrac{2\eta\omega}{E}}}x^1\right]e^{i\omega t} \tag{80}$$

où

$$k_0 = \sqrt{\frac{\rho}{E}}\frac{\omega}{c}.$$

Dans l'approximation

$$\frac{\eta\omega}{E} = \frac{\eta\omega c^2}{\rho v^2} = \frac{\eta k_0 c^2}{\rho v} \ll 1 \tag{81}$$

on a :

$$S^1 = B\ \mathrm{sh}\left[\left(\frac{\eta c^2 k_0^2}{\rho v} + ik_0\right)x^1\right]e^{i\omega t}. \tag{82}$$

Si on définit

$$\alpha = \frac{\eta c^2 k_0^2}{\rho v} = \frac{\eta k_0^2}{\rho_M v}\quad,\quad \gamma = \alpha + ik_0$$

(²) Équation (8-34), p. 132.

(³) Maugin [*15*] a trouvé récemment la même équation.

et on calcule la déformation invariante de jauge, on trouve

$$\varepsilon_{11} = \left[B\gamma \operatorname{ch} \gamma x^1 - \frac{A}{2} \right] e^{i\omega t} \tag{83}$$

avec

$$B = \frac{A}{2\gamma(i\alpha L \sin k_0 L + \cos k_0 L)} . \tag{84}$$

On retrouve donc dans cette approximation la solution de Weber, à cause de la dérivée seconde par rapport à x^1 dans le terme dissipatif; le coefficient b de Weber est égal à $2\eta k_0^2$.

Dans l'expérience de Weber [*16*] de détection d'ondes gravitationnelles, on considère un cylindre d'axe Ox^1 soumis à l'action d'une onde polarisée (31).

En général, on étudie seulement les vibrations parallèles à l'axe, parce qu'elles sont les plus intéressantes du point de vue de la détection. Les vibrations parallèles à l'axe sont données par (83).

Nous allons étudier aussi les vibrations perpendiculaires à l'axe Ox^1 du cylindre à l'aide des équations (72) et (73).

Il est plus commode de travailler avec des coordonnées cylindriques :

$$x^1 = z \quad , \quad x^2 = r \cos \varphi \quad , \quad x^3 = r \sin \varphi .$$

Les déplacements radiaux et tangentiels des vibrations sont de la forme

$$\left\{ \begin{aligned} S_r &= S^2 \cos \varphi + S^3 \sin \varphi \\ S_\varphi &= - S^2 \sin \varphi + S^3 \cos \varphi \end{aligned} \right. \tag{85}$$

et les déformations sont :

$$\left\{ \begin{aligned} S_{rr} &= S_{r,r} \\ S_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} S_{\varphi,\varphi} + \frac{S_r}{r} \\ 2S_{\varphi r} &= \frac{1}{r} S_{r,\varphi} + S_{\varphi,r} - \frac{S_\varphi}{r} . \end{aligned} \right. \tag{86}$$

Les équations du mouvement (72) en coordonnées cylindriques pour un corps viscoélastique avec $\sigma = 0$ et $\zeta - \frac{2}{3}\eta = 0$ sont :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho S_{r,00} &= (E + 2\eta c\partial_0)\left[S_{rr,r} + \frac{S_{r\varphi,\varphi}}{r} + \frac{S_{rr} - S_{\varphi\varphi}}{r} \right] , \\ \rho S_{\varphi,00} &= (E + 2\eta c\partial_0)\left[S_{\varphi r,r} + \frac{S_{\varphi\varphi,\varphi}}{r} + \frac{2S_{\varphi r}}{r} \right] . \end{aligned} \right. \tag{87}$$

Dans le cas d'une onde polarisée $\lambda_{11} = -\lambda_{22} \simeq Ae^{i\omega t}$, les conditions aux limites (73) deviennent

$$(88)\quad \begin{cases} S_{rr} = \dfrac{1}{2}\lambda_{rr} = \dfrac{1}{2}\lambda_{22}\cos^2\varphi = -\dfrac{A}{2}\cos^2\varphi e^{i\omega t}, \\ S_{r\varphi} = \dfrac{1}{2}\lambda_{\varphi r} = -\dfrac{1}{2}\lambda_{22}\sin\varphi\cos\varphi = -\dfrac{A}{2}\sin\varphi\cos\varphi e^{i\omega t}. \end{cases}$$

Si on suppose que le système admet une solution de la forme

$$(89)\quad \begin{cases} S_r = -[\mathcal{U}_0(r) + \mathcal{U}_2(r)\cos 2\varphi]e^{i\omega t}, \\ S_\varphi = v_2(r)\sin 2\varphi e^{i\omega t}, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(90)\quad \begin{cases} S_{rr} = -[\mathcal{U}'_0 + \mathcal{U}'_2\cos 2\varphi]e^{i\omega t}, \\ S_{\varphi\varphi} = \left[\dfrac{2v_2}{r}\cos 2\varphi - \dfrac{\mathcal{U}_2}{r}\cos 2\varphi - \dfrac{\mathcal{U}_0}{r}\right]e^{i\omega t}, \\ S_{r\varphi} = \left[\dfrac{\mathcal{U}_2}{r}\sin 2\varphi + \dfrac{v'_2}{2}\sin 2\varphi - \dfrac{v_2}{2r}\sin 2\varphi\right]e^{i\omega t}, \end{cases}$$

on trouve à partir de (87) le système d'équations différentielles ordinaires :

$$(91)\quad \mathcal{U}''_0 + \frac{\mathcal{U}'_0}{r} - \mathcal{U}_0\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\rho}{E + 2i\eta\omega}\frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0$$

et

$$(92)\quad \begin{cases} \mathcal{U}''_2 + \dfrac{\mathcal{U}'_2}{r} - \mathcal{U}_2\left(\dfrac{3}{r^2} - \dfrac{\rho}{E + 2i\eta\omega}\dfrac{\omega^2}{c^2}\right) - \dfrac{v'_2}{r} + \dfrac{3v_2}{r^2} = 0 \\ v''_2 + \dfrac{v'_2}{r} - v_2\left(\dfrac{9}{r^2} - \dfrac{2\rho}{E + 2i\eta\omega}\dfrac{\omega^2}{c^2}\right) + \dfrac{2\mathcal{U}'_2}{r} + \dfrac{6\mathcal{U}_2}{r^2} = 0 \end{cases}$$

et on déduit à l'aide de (88) et (90) les conditions aux limites :

$$(93)\quad \begin{aligned} &a)\quad \mathcal{U}'_0(R) = \frac{A}{4}, \\ &b)\quad \mathcal{U}'_2(R) = \frac{A}{4}, \\ &c)\quad \frac{\mathcal{U}_2(R)}{R} + \frac{v'_2(R)}{2} - \frac{v_2(R)}{2R} = \frac{A}{4}, \end{aligned}$$

où R est le rayon du cylindre.

L'équation (91) est une équation de Bessel. Elle admet une solution régulière :

$$(94)\quad \mathcal{U}_0(r) = D\mathcal{J}_1(kr) = D\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\dfrac{kr}{2}\right)^{2m+1}}{m!\,(m+2)!}$$

où $\mathcal{J}_1$ est la fonction de Bessel, d'ordre 1 et

$$k = \frac{k_0}{\sqrt{1 + i\frac{2\eta\omega}{E}}}.$$

Dans l'approximation (81), on a $k = k_0 - i\alpha$.

Quant à (60), le système admet une solution régulière développable en séries de puissances dont les premiers termes sont de la forme :

$$(95) \qquad \begin{cases} \mathcal{U}_2(r) = Ckr - \frac{C}{6}(kr)^3 + \frac{2C - 3B}{288}(kr)^5 \dots \\ v_2(r) \ = Ckr + B(kr)^3 - \frac{2C + 33B}{288}(kr)^5 \dots \end{cases}$$

Les coefficients D, C et B sont à déterminer à l'aide des conditions aux limites (93).

Il est possible de trouver une solution particulière très simple dans la limite des grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire pour $k_0^2 R^2 \ll 1$.

En effet, dans ce cas on a

$$(96) \qquad \begin{cases} \mathcal{U}_0 = D\frac{kr}{4}, \\ \mathcal{U}_2 = Ckr, \\ v_2 \ = Ckr, \end{cases}$$

et les conditions aux limites (93) permettent de calculer D et C :

$$(97) \qquad D = -\frac{A}{k} \quad , \quad C = -\frac{A}{4k}.$$

Par conséquent, on trouve en tenant compte de (89) :

$$(98) \qquad \begin{cases} S_r \ = \frac{A}{2} r \cos^2 \varphi e^{i\omega t} \\ S_\varphi = -\frac{A}{2} r \sin \varphi \cos \varphi e^{i\omega t} \end{cases}$$

avec des composantes cartésiennes

$$(99) \qquad \begin{cases} S^2 = \frac{A}{2} x^2 e^{i\omega t}, \\ S^3 = 0. \end{cases}$$

L'équation (59) permet de calculer la production d'entropie due au passage de la radiation gravitationnelle :

$$(100) \qquad TS^{\alpha}{}_{,\alpha} = 2\eta c\left(\varepsilon^2{}_{ik,0} - \frac{1}{3}\varepsilon^2{}_{ll,0}\right) + \zeta\varepsilon^2{}_{ll,0}.$$

Comme dans le cas de l'élasticité parfaite, pendant une certaine période de temps après l'arrivée de l'onde gravitationnelle, les déplacements seront