ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

SEBASTIANO GIAMBÒ

Existence et unicité des solutions du problème de Cauchy pour un fluide relativiste conducteur de la chaleur

Annales de l'I. H. P., section A, tome 27, nº 2 (1977), p. 185-192
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1977__27_2_185_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXVII, n° 2, 1977, p. 185 à 192. *Physique théorique.*

Existence et unicité des solutions du problème de Cauchy pour un fluide relativiste conducteur de la chaleur

par

Sebastiano GIAMBÒ
Istituto di Matematica, Università degli Studi, Messina

SUMMARY. — We prove the existence and unicity of the Cauchy problem, in a certain Gevrey class, for the evolution system of a relativistic fluid heat-conducting in the Landau-Lifchitz and G. Carini scheme.

RÉSUMÉ. — On établit l'existence et l'unicité du problème de Cauchy, dans une certaine classe de Gevrey, pour le système d'évolution d'un fluide relativiste conducteur de la chaleur dans le schéma de Landau-Lifchitz et G. Carini.

1. INTRODUCTION

Dans un récent travail [*1*], on a étudié la propagation des ondes pour un fluide relativiste conducteur de la chaleur dans le schéma de Landau-Lifchitz [*2*] et G. Carini [*3*] associé avec une équation de conduction de la chaleur proposée par G. Boillat [*4*].

Dans ce travail, nous montrerons que le système d'évolution considéré dans [*1*] est hyperbolique non strict au sens de Leray-Ohya [*5*] et nous établirons les théorèmes d'existence et unicité pour le problème de Cauchy, en déterminant la classe de Gevrey des solutions.

Après avoir rappelé aux numéros 2 et 3 le schéma envisagé et le système d'évolution, au numéro 4 nous démontrerons qu'il s'agit d'un système quasi linéaire [*6*] du type de Cauchy-Kowalewski selon la généralisation de Leray-Garding et nous retrouverons les variétés caractéristiques déjà obtenues dans [*1*], dans les mêmes conditions thermodynamiques.

Au numéro 5, nous démontrerons le caractère hyperbolique non strict du système considéré en même temps que l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha = 7/6$.

Au numéro 6, enfin, en utilisant un théorème de Mme Y. Choquet-Bruhat [7] nous prouverons l'équivalence du système considéré avec un système simplifié, dont les solutions du problème de Cauchy existent uniques dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha' = 2$.

NOTATIONS. — L'espace-temps V_4 est une variété différentiable à quatre dimensions munie d'une métrique riemannienne hyperbolique normale ds^2, de signature $(+, -, -, -)$. Dans un système de coordonnées locales admissible x^α, cette métrique peut s'écrire dans la forme usuelle :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{1}$$

Nous supposons que la variété V_4 et les potentiels $g_{\alpha\beta}$ sont de classes de différentiabilité suffisantes pour justifier les calculs suivants.

Le vecteur vitesse est défini par $u^\alpha = dx^\alpha/ds$ qui implique son caractère unitaire

$$u^\alpha u_\alpha = 1 \tag{2}$$

Nous désignons par ∂_α la dérivation ordinaire par rapport à la coordonnée locale x^α, par ∇_α l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion définie par la métrique.

2. DESCRIPTION DU SCHÉMA FLUIDE

Nous nous plaçons dans la suite dans un système d'unités tel que la vitesse de la lumière dans le vide soit égale à 1.

Dans V_4, un fluide parfait est décrit [8] par un tenseur d'énergie de la forme :

$$T^{\alpha\beta} = rfu^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}, \tag{3}$$

où r est la densité propre de la matière, f l'indice du fluide, tel que $rf = \rho + p$, où ρ est la densité propre d'énergie du fluide et p la pression. La température propre θ du fluide et son entropie spécifique S sont définies par la relation différentielle

$$r\theta d\mathrm{S} = rdf - dp. \tag{4}$$

Dans la formulation de Landau-Lifchitz et G. Carini, un fluide relativiste conducteur de la chaleur est décrit par le tenseur d'énergie (3) et par le vecteur courant de la chaleur :

$$Q^\alpha = q^* u^\alpha + q^\alpha \quad , \quad q^\alpha u_\alpha = 0 \tag{5}$$

où $q^* u^\alpha$ est le vecteur courant de chaleur de convection et q^α le vecteur courant de chaleur de conduction, q^* étant la densité matérielle d'origine thermique.

Les équations de mouvement sont données par la conservation du tenseur d'énergie

(6) $$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

auxquelles on joint la condition de conservation du vecteur courant de chaleur

(7) $$\nabla_\alpha Q^\alpha = 0, \qquad \text{III}$$

la condition de conservation

(8) $$\nabla_\alpha(\mu u^\alpha) = 0 \qquad \mu = r + q^*, \qquad \text{II}$$

et la loi de conduction de la chaleur [1], [4] :

(9) $$q_\alpha + \chi u^\beta(\partial_\beta q_\alpha - \partial_\alpha q_\beta) + \kappa u^\beta \{ \partial_\beta(\theta u_\alpha) - \partial_\alpha(\theta u_\beta) \} = 0. \qquad \text{V}$$

3. SYSTÈME D'ÉVOLUTION

Nous prenons dans la suite les variables r et θ comme variables thermodynamiques fondamentales : toutes les autres variables (thermodynamiques) seront donc considérées fonctions de r et θ.

Les variables u^α, q^α, r, θ et q^* sont ainsi déterminées par le système des 11 équations (6), (7), (8), (9) et (2).

De (6), on déduit :

(10) $$\nabla_\alpha(rfu^\alpha)u^\beta + rfu^\alpha\nabla_\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta}\partial_\alpha p = 0,$$

qui contractée par u_β fournit l'équation de continuité

(11) $$\nabla_\alpha(rfu^\alpha) - u^\alpha\partial_\alpha p = 0$$

qui, compte tenu de (4), (8) et (7), peut s'écrire

(12) $$r\theta u^\alpha\partial_\alpha S + f\nabla_\alpha q^\alpha = 0. \qquad \text{IV}$$

Enfin, compte tenu de (11) et (6), on obtient le système aux lignes de courant :

(13) $$rfu^\alpha\nabla_\alpha u^\beta - \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha p = 0. \qquad \text{I}$$

Le système (6), (7), (8), (9) et (2) est équivalent au système (13), (8), (7), (12) et (9) dans les inconnues u^α, q^α, r, θ et q^*, qu'on appellera système (S).

4. VARIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES

Le système (S) est quasi-linéaire pour le choix suivant des indices de Leray (cf. Leray [6]) :

(14) $$\begin{gathered} m(u^\alpha) = m(q^\alpha) = m(r) = m(\theta) - (q^*) = 1 \\ n(\mathrm{I}) = n(\mathrm{II}) = n(\mathrm{III}) = n(\mathrm{IV}) = n(\mathrm{V}) = 0 \end{gathered}$$

Les parties principales relativement à toutes les inconnues dans toutes les équations sont toutes d'ordre 1.

Le système (S) est du type de Cauchy-Kovalevski : son polynôme caractéristique P n'est pas identiquement nul.

Les vecteurs ξ_α qui annulent en un point x le polynôme P sont normaux en ce point aux variétés caractéristiques, ou fronts d'onde.

Le polynôme P est un déterminant dont le calcul direct nous donne :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\xi) = -(\chi rf)^3 \mathcal{U}^7 \{ & \chi rfr\theta \mathrm{S}'_\theta \mathcal{U}^4 + [krf^2 + \chi rp'_r r\theta \mathrm{S}'_\theta \\
& + krfr\theta \mathrm{S}'_r - \chi rp'_\theta r\theta \mathrm{S}'_r \\
& + k\theta(r\theta p'_r \mathrm{S}'_\theta - r\theta p'_\theta \mathrm{S}'_r - fp'_\theta)]\mathcal{U}^2\mathcal{C} + krfp'_r\mathcal{C}_2 \\
& + \chi \mathcal{U}\mathcal{Q}(\mathcal{U}^2 + \mathcal{C})[r\theta(p'_r \mathrm{S}'_\theta - p'_\theta \mathrm{S}'_r) - fp'_\theta] \}
\end{aligned} \tag{15}
$$

où

$$\mathcal{U} = u^\alpha \xi_\alpha \quad , \quad \mathcal{C} = \gamma^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \quad , \quad \mathcal{Q} = q^\alpha \xi_\alpha .$$

Pour la suite, nous considérons valable la relation thermodynamique suivante :

$$r\theta(p'_r \mathrm{S}'_\theta - p'_\theta \mathrm{S}'_r) - fp'_\theta = 0. \tag{16}$$

Cette relation, équivalente à celle déjà considérée dans [*1*]

$$\left(\frac{\partial(rf)}{\partial \mathrm{S}}\right)_{p=\text{const.}} = 0, \tag{17}$$

implique et est impliquée par la relation

$$\rho = \rho(p) \tag{18}$$

qui admet le fluide parfait polytropique comme cas particulier. Dans ces conditions $\mathrm{P}(\xi)$ se réduit à

$$\mathrm{P}(\xi) = -\frac{\chi^3(rf)^4\mathcal{U}^7}{p'_\theta}(\chi p'_\theta \mathcal{U}^2 + kp'_r\mathcal{C})(r\theta \mathrm{S}'_\theta \mathcal{U}^2 + p'_\theta \mathcal{C}) \tag{19}$$

Ainsi nous pouvons écrire :

$$\mathrm{P}(\xi) = -\frac{\chi^3(rf)^4}{p'_\theta}[\mathrm{C}_0(\xi)]^7 \mathrm{C}_1(\xi)\mathrm{C}_2(\xi) \tag{20}$$

où

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{C}_0(\xi) \equiv u^\alpha \xi_\alpha, \\
& \mathrm{C}_1(\xi) \equiv (\chi p'_\theta - kp'_r)(u^\alpha\xi_\alpha)^2 + kp'_r \xi^\alpha \xi_\alpha \\
& \mathrm{C}_2(\xi) \equiv (r\theta \mathrm{S}'_\theta - p'_\theta)(u^\alpha\xi_\alpha)^2 + p'_\theta \xi^\alpha \xi_\alpha .
\end{aligned} \tag{21}
$$

Nous retrouvons les variétés caractéristiques déjà obtenues [*1*], en annulant chaque facteur irréductible du polynôme P, c'est-à-dire :

— les ondes matérielles, solution de : $\mathrm{C}_0(\xi) = 0$,

— les ondes hydrodynamiques, solutions de : $\mathrm{C}_1(\xi) = 0$, $\mathrm{C}_2(\xi) = 0$.

Dans l'hypothèse où k et χ sont liées par une relation du type

$$kf - h\chi p'_\theta = 0 \qquad (h = \text{const.} > 0), \tag{22}$$

nous retrouvons les ondes hydrodynamiques déjà obtenues dans [9] avec $h = 1$.

Un choix plus opportun est $h = 2$, qui nous permet d'obtenir, dans le cas de la complète exceptionnalité [10], les deux vitesses de propagation des ondes hydrodynamiques égales à celle de la lumière.

Considérons au point x un repère propre : $g^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \equiv (\xi_0)^2 - \Sigma_i(\xi_i)^2$, $u^0 = 1$, $u^i = 0$. Dans ce repère, les divers cônes s'écrivent :

— Cône gravitationnel ou fondamental

$$C(\xi) \equiv (\xi_0)^2 - \Sigma_i(\xi_i)^2 = 0 \tag{23}$$

— Cône (plan) matériel

$$C_0(\xi) \equiv u^\alpha\xi_\alpha = \xi_0 = 0 \tag{24}$$

— Cônes hydrodynamiques

$$C_1(\xi) \equiv kp'_r\left\{\frac{\chi p'_\theta}{kp'_r}(\xi_0)^2 - \Sigma_i(\xi_i)^2\right\} = 0 \tag{25}$$

$$C_2(\xi) \equiv p'_\theta\left\{\frac{r\theta S'_\theta}{p'_\theta}(\xi_0)^2 - \Sigma_i(\xi_i)^2\right\} = 0 \tag{26}$$

Nous savons alors que :

le cône C_1 est extérieur à C si

$$\chi p'_\theta/kp'_r > 1 \tag{27}$$

et le cône C_2 est extérieur à C si

$$r\theta S'_\theta/p'_\theta > 1 \tag{28}$$

Les inégalités (27) et (28) coïncident respectivement, à part les notations, avec les inégalités correspondantes déjà considérées dans [1].

VITESSES DE PROPAGATION. — Des raisonnements classiques [8] permettent de déduire des équations précédentes les vitesses de propagation des ondes correspondantes par rapport au repère propre.

Ce sont :

— Ondes gravitationnelles (ou fondamentales)

$$\lambda = 1. \tag{29}$$

— Ondes matérielles

$$\lambda_0 = 0. \tag{30}$$

— Ondes hydrodynamiques

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= \left(\frac{kp'_r}{\chi p'_\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \lambda_2 &= \left(\frac{p'_\theta}{r\theta S'_\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Ces vitesses sont inférieures à 1 si C est inférieur à C_1 et C_2.

5. CARACTÈRE HYPERBOLIQUE NON STRICT DU SYSTÈME (S)

Le polynôme $P(\xi)$ est évidemment produit de m polynômes hyperboliques stricts P_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), de degré $d_i = 1$ ou 2, donc tel que

$$\sup d_i > \sup m_K - \inf n_S = 1,$$

et les cônes $C_i(\xi) = 0$ contiennent tous dans leur intérieur le cône fondamental C, si sont vérifiées les conditions (27) et (28).

Le système (S) est donc hyperbolique non strict (cf. [5], [7]).

Problème de Cauchy. — Les données de Cauchy, sur une variété initiale Σ d'équation locale $x^0 = 0$, sont

$$\{u^\alpha, q^\alpha, r, \theta, q^*\}_{x^0=0} \tag{32}$$

Pour des données de Cauchy sur Σ, restrictions sur Σ de fonctions vérifiant les conditions d'hyperbolicité non stricte énoncées ci-dessus (c'est-à-dire telles que dans un voisinage des valeurs prises par ces données les inégalités du paragraphe 4 soient vérifiées) et appartenant à une classe de Gevrey d'indice $\alpha = m/(m-1)$, le système (S) a une solution unique dans cette classe de Gevrey. Cette solution admet un domaine d'influence déterminé par le cône C, c'est-à-dire que sa valeur en un point x ne dépend que des données de Cauchy dans le « passé » (au sens relativiste de ce mot, déterminé par le cône C) de ce point, sous les inégalités du paragraphe 4.

Reprenons le polynôme défini par (20). Écrivons-le de manière à y faire apparaître le plus petit nombre m possible de polynômes hyperboliques, pour que l'indice α (donc la classe de Gevrey) soit aussi grand que possible. On peut écrire

$$P = P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7 \tag{33}$$

où

$$\begin{aligned} P_1 &= -\chi^3\frac{(rf)^4}{p'_\theta}u^\alpha\xi_\alpha \\ P_2 &= P_3 = P_4 = P_5 = u^\alpha\xi_\alpha \\ P_6 &= C_1(\xi)u^\alpha\xi_\alpha \\ P_7 &= C_2(\xi)u^\alpha\xi_\alpha \end{aligned}$$

Sous les mêmes conditions que précédemment, les polynômes P_i sont hyperboliques stricts et les cônes Γ_i correspondants admettent tous dans leurs intérieurs le cône C. On obtient donc ainsi l'existence et l'unicité (ainsi que la causalité relativiste) dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha=7/6$.

6. SIMPLIFICATION

Mme Y. Choquet-Bruhat a montré [7] que quand tous les mineurs du déterminant P contiennent en facteur un même polynôme $f(\xi)$ (qui est nécessairement produit de facteurs irréductibles de P), on peut obtenir une forme diagonale simplifiée pour le système.

Si le polynôme

$$\widehat{P}(\xi) = P(\xi)/f(\xi) \tag{34}$$

est produit de m' facteurs hyperboliques stricts, le système aux dérivées partielles a une solution et une seule dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha' = m'/(m' - 1)$.

Pour le système (S), un calcul élémentaire nous permet d'établir que tous les mineurs du déterminant P contiennent en facteur $(u^\alpha\xi_\alpha)^6$.

Ainsi le polynôme caractéristique simplifié $\widehat{P}(\xi)$ donné par (34) où $f(\xi) = (u^\alpha\xi_\alpha)^6$, est égal à

$$\widehat{P}(\xi) = -\chi^3 \frac{(rf)^4}{p'_\theta} C_0(\xi)C_1(\xi)C_2(\xi) \tag{35}$$

Nous pouvons le mettre sous la forme

$$\widehat{P}(\xi) = P'_1(\xi)P'_2(\xi) \tag{36}$$

avec

$$P'_1(\xi) = -\chi^3 \frac{(rf)^4}{p'_\theta} C_1(\xi)$$

$$P'_2(\xi) = C_2(\xi)u^\alpha\xi_\alpha$$

où $P'_1(\xi)$ et $P'_2(\xi)$ sont deux polynômes hyperboliques stricts. Les conditions du critère d'hyperbolicité non strict sont encore vérifiées pour le système simplifié. On obtient ainsi l'existence et l'unicité de la solution de (S) dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha' = 2$.

RÉFÉRENCES

[1] A. GRECO, S. GIAMBÒ, On the evolution system for a relativistic inviscid fluid heat conducting (à paraître dans *Rend. Ac. Naz. Lincei*, 1976).

[2] L. D. LANDAU, E. M. LIFCHITZ, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1959.

[3] G. Carini, *Annali di Mat. pura e Appl.*, t. **4**, 1973, p. 97.
[4] G. Boillat, *Lett. Nuovo Cimento*, t. **10**, 1974, p. 295.
[5] J. Leray, Y. Ohya, *Math. Ann.*, t. **162**, 1966, p. 228; t. **170**, 1967, p. 167.
[6] J. Leray, *Hyperbolic differential equation*, Inst. for advanced study, Princeton, 1953 (Notes miméographiées).
[7] Y. Choquet-Bruhat, *J. Math. Pures et Appl.*, t. **45**, 1966, p. 371.
[8] A. Lichnerowicz, *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics*, Benjamin Inc., New York, Amsterdam, 1967.
[9] S. Giambò, *Comptes Rendus*, t. **280**, Ser. A, 1975, p. 599.
[10] S. Giambò, Sur les ondes exceptionnelles d'un fluide relativiste conducteur de chaleur (à paraître dans *Comptes Rendus*, 1976).

(Manuscrit reçu le 12 janvier 1977).