

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. GAUDIN

**Sur la transformée de Laplace de  $tr e^{-A}$  considérée  
comme fonction de la diagonale de  $A$**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 28, n° 4 (1978), p. 431-442

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1978\\_\\_28\\_4\\_431\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1978__28_4_431_0)

© Gauthier-Villars, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Sur la transformée de Laplace de $\text{tr } e^{-A}$ considérée comme fonction de la diagonale de A**

par

**M. GAUDIN**

C. E. N., Saclay, 91190 Gif-sur-Yvette, France

---

**ABSTRACT.** — A finite decomposition of  $\text{tr } e^{-A}$  as a function of the diagonal matrix elements of A is derived from the support properties of its Laplace transform.

**RÉSUMÉ.** — Une décomposition finie de  $\text{tr } e^{-A}$  considérée comme fonction des éléments diagonaux de la matrice A découle des propriétés de support de sa transformée de Laplace.

---

### **1. POSITION DU PROBLÈME**

Une conjecture due à Bessis [1] [2] énonce que la fonction d'une variable  $Z(\lambda) = \text{tr } e^{A + \lambda B}$  serait la transformée de Laplace d'une mesure positive, quelles que soient les matrices hermitiennes finies A et B. Dans la recherche d'une preuve ou d'un contre-exemple, on a été amené à considérer  $\text{tr } e^{A+B}$  comme fonction des éléments de B ou, de façon équivalente,  $\text{tr } e^A$  comme fonction des éléments diagonaux de A, et l'on a pu penser que la conjecture s'étendît à la transformée de Laplace multidimensionnelle dans la diagonale de A. Nous montrons que ce n'est pas le cas généralement (sauf pour les matrices d'ordre 2) en donnant une représentation de la transformée de  $\text{tr } e^A$ .

Soit  $A$  une matrice  $N \times N$ , d'éléments  $a_{ij}$  et  $P(\lambda)$  le polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = |\lambda - A| = \prod_{n=1}^N (\lambda - \lambda_n) \quad (1.1)$$

Définissons  $Z = \text{tr } e^A$  par la série

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{tr } A^k. \quad (1.2)$$

qui, d'après (1.1), converge vers  $\sum_{n=1}^N e^{\lambda_n}$ , et représente une fonction entière

des éléments de  $A$ . On considérera  $Z$  comme fonction de ses éléments diagonaux  $a_{ii} \equiv a_i \in \mathbb{C}$ , les éléments non-diagonaux étant des paramètres fixés formant une matrice hermitique.

La représentation intégrale cherchée est la suivante

$$Z(a_1 a_2 \dots a_N) = \int_{\mathbb{R}_N} d^N p \Phi(p_1 p_2 \dots p_N) e^{\sum_j p_j a_j} \quad (1.3)$$

Le calcul pour  $N = 2$  est simple et sera utile pour le cas général. On a

$$\text{tr } e^A = 2e^{\frac{1}{2}(a_1 + a_2)} \text{ch } \sqrt{a^2 + |a_{12}|^2} \quad (1.4)$$

où l'on a posé  $a = \frac{1}{2}(a_1 - a_2)$ . D'après G. R. p. 737, on a

$$\text{ch } \sqrt{b^2 + \lambda^2} - \text{ch } \lambda = \int_0^1 dx \text{ch } \lambda x \frac{b I_1(b\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (1.5)$$

et, par conséquent

$$\text{tr } e^A = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{x}{2}(a_1 - a_2)} \left[ 2\delta(1-x^2) + \theta(1-x)\theta(1+x) \frac{|a_{12}|}{\sqrt{1-x^2}} I_1(|a_{12}| \sqrt{1-x^2}) \right]. \quad (1.6)$$

La transformée cherchée s'écrit donc

$$\Phi(p_1 p_2) = \delta(p_1 + p_2 - 1) \left[ \delta(p_1) + \delta(p_2) + \theta(p_1)\theta(p_2) \frac{|a_{12}|}{\sqrt{p_1 p_2}} I_1(2|a_{12}| \sqrt{p_1 p_2}) \right]. \quad (1.7)$$

$\Phi(p_1 p_2)$  est une mesure positive dont le support est défini par les relations

$$p_1 + p_2 = 1, \quad p_1 \geq 0, \quad p_2 \geq 0. \tag{1.8}$$

(I désigne la fonction de Bessel d'argument imaginaire et  $\theta(p)$  est l'échelon unité :  $\theta(p) = 0, p < 0; \theta(p) = 1, p > 0$ ).

## 2. MATRICES SYMÉTRIQUES D'ORDRE 3

Considérons la famille particulière de matrices symétriques d'ordre N

$$a_{ij} = a_i \delta_{ij} + v_i v_j \quad i, j = [1, N] \tag{2.1}$$

Pour N = 3, c'est d'ailleurs la matrice symétrique générale avec

$$v_1^2 = a_{12} a_{13} / a_{23}, \quad \text{etc.}$$

Si l'on se limite aux matrices réelles, les  $v_j^2$  auront le signe du produit  $a_{12} a_{13} a_{23}$ ; les  $v_j$  seront tous réels ou tous imaginaires purs.

Les valeurs propres de la matrice A sont les racines de l'équation

$$f(\lambda) \equiv 1 - \sum_j \frac{v_j^2}{\lambda - a_j} = 0, \tag{2.3}$$

racines toutes réelles et séparées par les  $a_j$  lorsque ces derniers sont réels. Cependant le calcul de la distribution  $\Phi$  définie par (1.3) s'effectuera par la formule d'inversion de l'intégrale de Fourier

$$\tilde{\Phi}(p_1 p_2 \dots p_N) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{-i\infty}^{+i\infty} da_1 \dots da_N \text{tr } e^{A} e^{-\sum_j p_j a_j} \tag{2.4}$$

où l'on a posé

$$\Phi(p_1 p_2 \dots p_N) = \tilde{\Phi}(p_1 p_2 \dots p_N) e^{\sum_j p_j v_j^2} \tag{2.5}$$

Il nous faut donc construire une représentation de  $\text{tr } e^A$  valide pour tout  $\text{Im } a_j; (\text{Re } a_j = 0)$ . Localisons les zéros de  $f(\lambda)$  uniformément par rapport aux  $a_j$ . On déduit de (2.3)

$$\text{Rf} > \text{Min} \left( 1, 1 - \frac{\sum v_j^2}{\text{R}\lambda} \right) \tag{2.6}$$

Dans tous les cas les zéros de  $f$  ne sont pas extérieurs à la bande  $\left[ \text{R}\lambda = 0, \text{R}\lambda = \sum_j v_j^2 \right]$ . Choisissons

$$\lambda_0 > \left| \sum_j v_j^2 \right| \tag{2.7}$$

le théorème de Cauchy nous donne

$$\begin{aligned} \zeta(a_1 a_2 \dots a_N) &\equiv \text{tr } e^A - \sum_j e^{a_j} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} d\lambda e^\lambda \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} d\lambda e^\lambda \log f(\lambda) \end{aligned} \quad (2.8)$$

où la branche du logarithme est réelle pour  $\lambda$  réel,  $\lambda > \lambda_0$ . Refermant le contour à l'infini du côté  $\text{Re } \lambda < 0$ , la contribution à  $\zeta$  due aux zéros de  $f$  est  $\text{tr } e^A$ , et la contribution des pôles est  $-\sum_j e^{a_j}$ . On peut encore écrire

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} e^\lambda f'(\lambda) \int_0^\infty e^{-t f(\lambda)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} e^\lambda d\lambda \int_0^\infty \frac{dt}{t} (e^{-t f} - e^{-t}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

La première intégrale est uniformément convergente par rapport aux  $a_j$ , car elle est majorée par  $(1/2) \left( \lambda_0 - \sum_j v_j^2 \right)^{-1}$ .

On vérifie sur (2.9) la relation

$$\left( \frac{\partial}{\partial a_1} + \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial a_N} \right) \zeta = \zeta; \quad (2.10)$$

le support de  $\Phi$  est donc contenu dans l'hyperplan  $\sum_j p_j = 1$ .

D'après (2.4), l'intégration sur les  $a_j$  peut être effectuée directement à l'aide de la représentation (2.9). On obtient pour la transformée de  $\zeta(a_1 \dots a_N)$  la fonction généralisée  $\varphi(p_1 \dots p_N)$

$$\begin{aligned} \varphi(p_1 p_2 \dots p_N) &= \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i} e^\lambda \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{t} \\ &\quad \cdot \left[ \prod_j \Theta_j(p_j; t, \lambda) - \prod_j \delta(p_j) \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

où l'on a posé

$$\Theta_j \equiv \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{da_j}{2\pi i} e^{-p_j a_j + t \frac{v_j^2}{\lambda - a_j}} = e^{-p_j \lambda} \int_{-\lambda_0 - i\infty}^{-\lambda_0 + i\infty} \frac{da}{2\pi i} e^{-ap - \frac{tv_j^2}{a}}, \quad (2.12)$$

ou encore, en terme de fonction de Bessel,

$$\Theta_j(p) = e^{-p\lambda} \frac{d}{dp} [\theta(p) I_0(2v_j \sqrt{pt})]. \quad (2.13)$$

L'intégration sur  $\lambda$  au second membre de (2.11) donne immédiatement un facteur  $\delta$  et l'on obtient

$$\varphi(p_1 p_2 \dots p_N) = \delta \left( \sum_j p_j - 1 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} \dots \frac{\partial}{\partial p_N} \cdot \theta(p_1) \dots \theta(p_N) \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{t} \left[ \prod_j I_0(2v_j \sqrt{p_j t}) - 1 \right]. \quad (2.14)$$

La formule est valide lorsque les  $v_j^2$  sont négatifs : il suffit de remplacer  $I_0$  par  $J_0(2|v_j| \sqrt{p_j t})$ .

CAS  $N = 3$ .

Le cas des matrices  $3 \times 3$  symétriques révèle bien la structure générale ; En effectuant les dérivations indiquées dans (2.14), on obtient la somme :

$$\begin{aligned} \varphi(p_1 p_2 p_3) = & \delta(p_1 + p_2 + p_3 - 1) \\ & \cdot \{ \varphi_{123}(p_1 p_2 p_3) + \delta(p_1) \varphi_{23}(p_2 p_3) + \delta(p_2) \varphi_{13}(p_1 p_3) \\ & + \delta(p_3) \varphi_{12}(p_1 p_2) + \delta(p_2) \delta(p_3) \varphi_1(1) + \delta(p_1) \delta(p_3) \varphi_2(1) \\ & + \delta(p_1) \delta(p_2) \varphi_3(1) \}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec les définitions des divers termes

$$\varphi_{123} = \theta(p_1) \theta(p_2) \theta(p_3) \int_0^\infty e^{-t} \sqrt{t} dt \prod_{j=1}^3 \frac{v_j}{\sqrt{p_j}} I_1(2v_j \sqrt{p_j t}). \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{12} = & \theta(p_1) \theta(p_2) \int_0^\infty e^{-t} dt \frac{v_1 v_2}{\sqrt{p_1 p_2}} I_1(2v_1 \sqrt{p_1 t}) I_1(2v_2 \sqrt{p_2 t}) \\ = & \theta(p_1) \theta(p_2) \frac{v_1 v_2}{\sqrt{p_1 p_2}} e^{-(p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2)} I_1(2v_1 v_2 \sqrt{p_1 p_2}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\varphi_1(1) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} v_1 I_1(2v_1 \sqrt{t}) = e^{-v_1^2} - 1 \quad (2.18)$$

Les expressions des intégrales (2.17) et (2.18) sont données dans G. R.

La collection des termes  $-1$  figurant dans chaque  $\varphi_j(1)$  de la somme (2.15) donne exactement la transformée de la somme  $-\sum_j e^{a_j}$ . Tous les autres termes contribuent donc à  $\tilde{\Phi}$ . Après multiplication par  $e^{\sum_j p_j^2}$  on obtient donc la distribution  $\Phi$

$$\begin{aligned} \Phi(p_1 p_2 p_3) = & \delta(p_1 + p_2 + p_3 - 1) \\ & \cdot \{ \phi_{123}(p_1 p_2 p_3) + \Sigma \delta(p_1) \phi_{23}(p_2 p_3) + \Sigma \delta(p_1) \delta(p_2) \} \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec

$$\phi_{123}(p_1 p_2 p_3) = \theta(p_1) \theta(p_2) \theta(p_3) e^{\sum_{j=1}^3 p_j p_j^2} \int_0^\infty e^{-t} \sqrt{t} dt \prod_{j=1}^3 \frac{v_j}{\sqrt{p_j}} I_1(2v_j \sqrt{p_j t}), \quad (2.20)$$

et  $v_1^2 = a_{12} a_{13} / a_{23}$ . Les fonctions  $\phi_{12}$  sont exactement celles qui interviennent pour  $N = 2$ , formule (1.7) :

$$\phi_{12}(p_1 p_2) = \theta(p_1) \theta(p_2) \frac{v_1 v_2}{\sqrt{p_1 p_2}} I_1(2v_1 v_2 \sqrt{p_1 p_2}). \quad (2.21)$$

On aura noté la propriété de support

$$p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1, \quad p_j \geq 0, \quad (2.22)$$

et enfin l'existence d'une décomposition de la forme

$$Z(a_1 a_2 a_3) = Z_{123}(a_1 a_2 a_3) + \Sigma Z_{12}(a_1 a_2) + \Sigma Z_1(a_1), \quad (2.23)$$

où chaque terme est associé à une sous-matrice symétrique de  $A$ , construite sur la diagonale de  $A$ , et ne dépend que d'elle seule.

*Remarque sur la positivité.* — Pour les matrices réelles  $3 \times 3$ , telles que le produit  $a_{12} a_{13} a_{23}$  soit positif, on voit que  $\phi_{123}$  est une fonction positive. La mesure  $\Phi$  est donc aussi positive. Cependant, si  $a_{12} a_{13} a_{23} < 0$ , on a

$$\phi_{123} = -\theta\theta\theta \int_0^\infty e^{-t} \sqrt{t} dt \prod_j \frac{|v_j|}{\sqrt{p_j}} J_1(2|v_j| \sqrt{p_j t}). \quad (2.24)$$

Cette fonction est manifestement négative lorsque les  $v_j$  (ou les  $a_{ij}$ ) sont assez petits ; à l'ordre le plus bas on a  $\phi_{123} \propto 2a_{12} a_{13} a_{23}$ . Les termes de la somme (2.19) ne sont donc pas tous de même signe, les  $\phi_{12}$  étant toujours positifs.  $Z = \text{tr } e^A$  n'est donc pas la transformée multidimensionnelle d'une mesure positive, ce qui n'infirme en rien la conjecture initiale sur  $\text{tr } e^{A+\lambda B}$ .

### 3. STRUCTURE DU DÉVELOPPEMENT DE $\text{tr } e^{-A}$

Montrons que la décomposition (2.19) se généralise directement à l'ordre  $N$ , et que l'on a pour la fonction  $\text{tr } e^{-A}$  elle-même un développement formellement analogue à celui de Laplace pour le déterminant d'une matrice

$$\begin{aligned} \text{tr } e^{-A} \equiv Z(a_1 a_2 \dots a_N) &= \sum_i Z_i(a_i) + \sum_{i < j} Z_{ij}(a_i a_j) \\ &+ \sum_{i < j < k} Z_{ijk}(a_i a_j a_k) + \dots + Z_{123\dots N}(a_1 a_2 \dots a_N). \end{aligned} \quad (3.1)$$

avec

$$Z_1(a_1) = e^{-a_{11}}, \quad \text{etc.}$$

et

$$Z_{12\dots n}(a_1 \dots a_n) = \int_{\mathbb{R}_n} d^n p \Phi_{12\dots n}(p_1 \dots p_n) e^{\sum_{j=1}^n p_j a_j} \quad (3.2)$$

où chaque  $\Phi_{12\dots n}(Z_{12\dots n})$  est entièrement déterminé par la sous-matrice de  $A$  construite sur une partie d'ordre  $n$  des éléments diagonaux. La transformée  $\Phi_{12\dots n}$  a le support polyédrique  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1, p_j \geq 0$ , et sa restriction à l'hyperplan est une fonction analytique entière. Les  $Z_{ijk\dots}$  eux-mêmes peuvent être déterminés de façon récurrente à partir des fonctions  $\text{tr } e^{-A_{ijk\dots}}$  définies avec les sous-matrices  $A_{ijk\dots}$ .

Partons de la représentation intégrale bien connue du déterminant inverse d'une matrice  $A$  dont la partie hermitique est définie positive

$$A = X + iY, \quad X > 0. \quad (3.3)$$

Nous avons

$$\frac{1}{|A|} = \int \prod_{j=1}^N \frac{dz_j dz_j^*}{2\pi} \cdot e^{-\sum_{i,j} a_{ij} z_i^* z_j} \quad (3.4)$$

avec  $z = re^{i\varphi}, dz dz^* = 2r dr d\varphi$ .

Pour majorer l'intégrale il suffit d'effectuer le changement de variables qui diagonalise la partie hermitique  $X$ , on obtient

$$\left| \frac{1}{|A|} \right| < \frac{1}{|X|} \quad (3.5)$$

et  $|A|$  ne s'annule pas si  $X > 0$ .

Considérons la classe des matrices complexes de la forme

$$A : \quad a_{ij} = a_i \delta_{ij} + b_{ij} \quad (3.6)$$

où  $B$  est hermitique positive, les variables  $a_j$  étant complexes de partie réelle positive ou nulle.

On déduit de (3.5) que  $|a_i \delta_{ij} + b_{ij}|$  ne s'annule pas ; en effet, une matrice reste positive si l'on augmente ses éléments diagonaux de quantités positives ou nulles. On a

$$\Delta(a_1 a_2 \dots a_N) = |A| = |a_i \delta_{ij} + b_{ij}| \neq 0, \quad \text{Re } a_i \geq 0. \quad (3.7)$$

La fonction  $\Delta^{-1}$  est donc holomorphe dans le domaine  $\cup \text{Re } a_i \geq 0$ . Sa transformée de Laplace  $F(p_1 p_2 \dots p_N)$  telle que l'on ait

$$\frac{1}{\Delta} = \int_{\mathbb{R}_N} dp_1 \dots dp_N F(p_1 \dots p_N) e^{-(p_1 a_1 + \dots + p_N a_N)}, \quad (3.8)$$

se calculera par la formule

$$F(p_1 \dots p_N) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{\Delta} e^{(p_1 a_1 + \dots + p_N a_N)} da_1 \dots da_N. \quad (3.9)$$



Cette transformée est nulle dès qu'un seul des  $p_j$  est négatif; en effet si  $p_2 < 0$  l'intégration sur  $a_2$  s'effectue en refermant le contour vers  $\text{Re } a_2 = +\infty$ , et donne zéro du fait de l'holomorphic.

La représentation (3.4) permet de construire F; limitons-nous, par commodité, aux matrices B symétriques réelles

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \int \prod_j \frac{dz_j dz_j^*}{2\pi} \cdot e^{-\sum_j a_j |z_j|^2 - \sum_{ij} b_{ij} z_j^* z_i} \\ &= \int_0^\infty \prod_j dr_j^2 \int_0^{2\pi} \prod_j \frac{d\varphi_j}{2\pi} e^{-\sum_j a_j r_j^2 - \sum_{ij} b_{ij} r_i r_j \cos(\varphi_i - \varphi_j)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

et par comparaison avec (3.8)

$$F(p_1 p_2 \dots p_N) = \theta(p_1) \dots \theta(p_N) \langle e^{-\chi} \rangle, \quad (3.11)$$

avec la notation  $\langle \ \rangle$  pour la valeur moyenne sur les angles  $\varphi_j$  :

$$\langle e^{-\chi} \rangle = \int_0^{2\pi} \prod_j \frac{d\varphi_j}{2\pi} e^{-\chi}, \quad (3.12)$$

où l'on a posé

$$\chi = \sum_{i,j} b_{ij} \sqrt{p_i p_j} \cos(\varphi_i - \varphi_j). \quad (3.13)$$

Le théorème de Cauchy nous donne, comme en (2.8) :

$$\text{tr } e^{-A} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\lambda e^\lambda \frac{d}{d\lambda} \frac{|A + \lambda|}{|A + \lambda|}. \quad (3.14)$$

A l'aide de (3.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \log |A + \lambda| &= \int_{\mathbb{R}^N} d^N p F \frac{d}{d\lambda} \left| b_{ij} + \delta_{ij}(a_j + \lambda) \right| e^{-\sum_i p_i(\lambda + a_i)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} d^N p F \frac{d}{d\mu} \left| b_{ij} + \delta_{ij} \left( \mu - \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \right|_{\mu=0} e^{-\sum_i p_i(\lambda + a_i)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituant dans (3.14), nous avons

$$\text{tr } e^{-A} = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^N} d^N p F \left| b_{ij} - \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} \right|' e^{\lambda - \lambda \sum p_i - \sum a_i p_i} \quad (3.16)$$

où la notation  $\left| b_{ij} - \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} \right|'$  signifie la somme des mineurs diagonaux d'ordre  $(N - 1)$  de la matrice considérée. A noter que dans (3.15) ou (3.16),

l'opérateur différentiel opère à droite. Intégrant par parties sur chacun des  $p_j$ , puis intégrant sur  $\lambda$  après interversion légitime on obtient

$$\text{tr } e^{-A} = \int_{\mathbb{R}^N} d^N p \delta\left(1 - \sum_j p_j\right) e^{-\sum_j \lambda p_j} \left| b_{ij} + \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} \right|' F. \quad (3.17)$$

On en déduit la distribution  $\Phi(p_1 \dots p_N)$  (relative à la matrice  $-A$  dans la notation (1.3))

$$\Phi(p_1 \dots p_N) = \delta\left(1 - \sum_j p_j\right) \left| b_{ij} + \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} \right|' F(p_1 \dots p_N). \quad (3.18)$$

Si l'on se reporte à (3.11),  $F$  contient un facteur  $\prod_j \theta(p_j)$  qui, sous

l'action des dérivations, donnera des produits de delta. Développons le « déterminant » au second membre de (3.18) qui est une forme multilinéaire des opérateurs de dérivation partielle

$$|\dots|' F \equiv \sum c_{ijk\dots} \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial p_k} \dots (\Pi \theta(p)) \langle e^{-x} \rangle \quad (3.19)$$

où la somme porte sur toutes les parties  $[ijk\dots]$  de  $[1, 2, \dots, N]$ , d'ordre inférieur à  $N$ ; dans une notation condensée :

$$|\dots|' F = \sum_{(\alpha)} c_{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial p_{(\alpha)}} F \quad (3.20)$$

Effectuons les dérivations sur les  $\theta$

$$|\dots|' F = \sum_{(\alpha)(\gamma)} c_{(\alpha)} \theta(p_{(C_\gamma)}) \delta(p_{(\gamma)}) \frac{\partial}{\partial p_{(\beta)}} \langle e^{-x} \rangle \quad (3.21)$$

où la somme porte sur les partitions  $(\alpha), (\gamma)$  telles que  $(\gamma) \subset (\alpha) \subset [1, N]$ , de sorte que  $(\gamma) \cup (\beta) = (\alpha)$ .  $(C_\gamma)$  est le complémentaire de  $\gamma$  dans  $[1, N]$ . On a donc

$$\begin{aligned} |\dots|' F &= \sum_{(\gamma)} \delta(p_{(\gamma)}) \theta(p_{(C_\gamma)}) \sum_{(\alpha)} c_{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial p_{(\beta)}} \langle e^{-x} \rangle_{p_{(\gamma)}=0} \\ &= \sum_{(\gamma)} \delta(p_{(\gamma)}) \theta(p_{(C_\gamma)}) \phi_{(C_\gamma)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

avec

$$\phi_{(\alpha)} \equiv \left| b_{ij} + \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} \right|'_{i,j \in (\alpha)} \langle e^{-x_{(\alpha)}} \rangle \quad (3.23)$$

où la forme  $\chi_{(\alpha)}$  est simplement la restriction de  $\chi$  définie par  $p_i = 0, \forall i \notin (\alpha)$ ,

et ne dépend que des variables associées aux indices ( $\alpha$ ). Plus explicitement le développement (3.22) s'écrit dans une notation suffisamment claire

$$\Phi(p_1 p_2 \dots p_N) = \delta\left(1 - \sum_j p_j\right) \left\{ \phi_{12\dots N} + \sum \delta(p_1) \phi_{23\dots N} + \sum \delta(p_1) \delta(p_2) \phi_{34\dots N} + \dots + \sum \delta(p_1) \delta(p_2) \dots \delta(p_{N-1}) \phi_N(1) \right\}. \quad (3.24)$$

avec

$$\phi_{12\dots n}(p_1 \dots p_n) = \theta(p_1) \dots \theta(p_n) \cdot \left| b_{ij} + \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} \right|'_{12\dots n} \langle e^{-x_{12\dots n}} \rangle \quad (3.25)$$

Le point remarquable est le suivant : chaque terme de la décomposition (3.24) de la transformée  $\Phi$  est associé à une sous-matrice principale de  $A$  et ne dépend que des paramètres de cette sous-matrice. Il en est de même évidemment de chaque terme du développement de  $Z = \text{tr } e^{-A}$ . La formule est valide quelle que soit la matrice symétrique  $A$  (ou  $B$ ), et la restriction de positivité peut être levée. Explicitons les premiers termes de ce développement :

$$\begin{aligned} \phi_1(1) &= e^{-b_{11}} \\ \phi_{12}(p_1 p_2) &= \theta(p_1) \theta(p_2) \left| \begin{array}{cc} b_{11} + \frac{\partial}{\partial p_1} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} + \frac{\partial}{\partial p_2} \end{array} \right|' \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-x_{12}} \\ &\equiv \theta(p_1) \theta(p_2) e^{-(p_1 b_{11} + p_2 b_{22})} \left( \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2} \right) I_0(2b_{12} \sqrt{p_1 p_2}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

ce qui coïncide avec l'expression (1.7) sur le support.

Pour  $n = 3$ , on a

$$\begin{aligned} \phi_{123}(p_1 p_2 p_3) &= e^{-\sum_j p_j b_{jj}} \prod_{j=1}^3 \theta(p_j) \\ &\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial p_1} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & \frac{\partial}{\partial p_2} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & \frac{\partial}{\partial p_3} \end{array} \right|' \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3}{(2\pi)^3} e^{-2b_{12} \sqrt{p_1 p_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dots}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

On peut transformer l'intégrale triple en une série simple :

$$\begin{aligned} \phi_{123} &= -2b_{12} b_{13} b_{23} e^{-\sum p_i b_{ii} - \frac{b_{12} b_{13}}{b_{23}}} \\ &\times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1} I_k(2\sqrt{p_1 p_2} b_{12}) I_k(2\sqrt{p_1 p_3} b_{13}) I_k(2\sqrt{p_2 p_3} b_{23}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Il est un peu long, mais pas difficile, de montrer que la somme de cette série est égale à l'intégrale obtenue en (2.20).

D'une façon générale nous avons

$$\phi_{12\dots n}(p_1 p_2 \dots p_n) = \prod_j^n \theta(p_j) e^{-\sum_j p_j b_{jj}} \times \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial p_1} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & \frac{\partial}{\partial p_2} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & \frac{\partial}{\partial p_n} \end{array} \right| \langle e^{-\sum_{i \neq j} b_{ij} \sqrt{p_i p_j} \cos(\varphi_i - \varphi_j)} \rangle. \quad (3.29)$$

Les propriétés de  $\phi$  ne nous sont pas connues pour  $n > 3$ . La difficulté vient de l'application de l'opérateur différentiel sur la fonction  $\langle e^{-x} \rangle = F$  qui, elle, est plus abordable. Donnons pour finir deux propriétés de la fonction entière  $F$  :

.  $F$  est une fonction croissante de chaque variable réelle  $p_j$  : En effet

$$\frac{\partial}{\partial p_1} \langle e^{-x} \rangle = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2\sqrt{p_1}} \sum_{j>1} b_{1j} \sqrt{p_j} \cos(\varphi_1 - \varphi_j) e^{-x} \frac{d\varphi_1}{2\pi} \dots \frac{d\varphi_n}{2\pi}. \quad (3.30)$$

Effectuant dans l'intégrand la translation  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_1 + \pi$  et ajoutant

$$\frac{\partial}{\partial p_1} \langle e^{-x} \rangle = \int \frac{1}{2p_1} \left( \sum_{j>1} b_{1j} \sqrt{p_1 p_j} \cos(\varphi_1 - \varphi_j) \cdot \text{sh} \left( \sum_{j>1} b_{1j} \sqrt{p_1 p_j} \cos(\varphi_1 - \varphi_j) \cdot e^{-x_2 \dots n} \frac{d\varphi_1}{2\pi} \dots \frac{d\varphi_n}{2\pi} \right) \right) \quad (3.31)$$

. A l'aide de (3.9), on montre aisément que  $\langle e^{-x} \rangle$  vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial p_1} + b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & \frac{\partial}{\partial p_2} + b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & \frac{\partial}{\partial p_n} + b_{nn} \end{array} \right| \langle e^{-x} \rangle = 0 \quad (3.30)$$

On aura noté que c'est la somme des mineurs principaux de ce déterminant opérateur qui intervient dans la représentation (3.29).

## REMERCIEMENTS

Je remercie D. Bessis, M. L. Mehta, P. Moussa et J. P. Gazeau de m'avoir intéressé à cette question en m'expliquant leurs résultats.

## RÉFÉRENCES

- [1] D. BESSIS, P. MOUSSA et M. VILLANI, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. **16**, n° 11, 1975, p. 2318.
- [2] M. L. MEHTA et K. KUMAR, *J. Phys.*, Vol. **9**, n° 2, 1976, p. 197.

(Manuscrit reçu le 18 novembre 1977)