

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

RADU ROSCA

Espaces-temps possédant la propriété de Killing

Annales de l'I. H. P., section A, tome 30, n° 4 (1979), p. 333-337

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1979__30_4_333_0

© Gauthier-Villars, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Espaces-temps possédant la propriété de Killing

par

Radu ROSCA

Faculté des Sciences et Techniques,
Sfax, Tunisie.

Soit (M, g) un espace-temps et soit $R(M)$ un champ de repères de Sachs sur M . Si au voisinage de chaque point $p \in M$ il existe un repère

$$R = \{ h_A \} \in R(M)$$

tels que tous les vecteurs (isotropes) h_A soient des champs de Killing on dit que (M, g) possède la *propriété de Killing*. On démontre que tout espace-temps qui possède cette propriété est de *courbure scalaire constante* et est du *type D* dans la classification de Petrov. En outre la connexion ∇_K induite par cette propriété définit sur l'espace tangent $T_p(M)$ un *double feuilletage géodésique*. D'autres considérations sont aussi faites.

1. Soit (M, g) un espace-temps assujetti aux conditions d'intégrabilité usuelles et soit $R(M)$ le fibré des repères de Sachs et $R = \{ h_A \} \in R(M)$ un pareil repère.

Nous disons que (M, g) possède la *propriété de Killing* si au voisinage de chaque point $p \in M$ il existe un R tel que tous les vecteurs h_A soient des *champs de Killing* [1]. Si $T_p(M)$ est l'espace tangent en chaque point $p \in M$ et ∇ la dérivation covariante par rapport à g , cette propriété s'exprime d'une manière intrinsèque, par

$$(1.1) \quad \langle \nabla_W h_A, W' \rangle + \langle \nabla_{W'} h_A, W \rangle = 0; \quad \forall W, W' \in T_p(M).$$

Nous ferons usage dans ce qui suit du formalisme vectoriel complexe [2] (abr. f. v. c.) : Si $\{ \theta^A \}$ est la base duale de $\{ h_A \}$ il existe un isomorphisme entre les 2-formes $\theta^A \wedge \theta^B$ de l'espace 6-dimensionnel L_6^* et les 2-formes autoduales Z^α , ($\alpha = 1, 2, 3$) qui forment une base de l'espace complexe C^3 . L'on a :

$$(1.2) \quad Z^1 = \theta^3 \wedge \theta^4, \quad Z^2 = \theta^1 \wedge \theta^2, \quad Z^3 = \frac{1}{2}(\theta^1 \wedge \theta^4 - \theta^2 \wedge \theta^3)$$

et la connexion ∇ est déterminée par la 1-forme σ (à valeurs dans $SO^3(\mathbb{C})$) telle que le premier groupe d'équations de structure dans \mathbb{C}^3 est sous forme compacte : $d \wedge Z = \sigma \wedge Z$ ($d \wedge$: différentiation extérieure). Les 1-formes $\sigma_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha$ ($-$: complexe conjugué) sont exprimées en fonctions des θ^A par $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha A} \theta^A, \bar{\sigma}_\alpha = \bar{\sigma}_{\alpha A} \bar{\theta}^A$ ($\theta^2 = \bar{\theta}^3, \theta^1 = \bar{\theta}^1, \theta^4 = \bar{\theta}^4$) et les coefficients $\sigma_{\alpha A}, \bar{\sigma}_{\alpha A}$ correspondent dans f. v. c. aux coefficients spinoriels de Newmann-Penrose. En termes de σ la variété (M, g) est structurée par la connexion :

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \nabla h_1 &= -\frac{1}{4}(\sigma_3 + \bar{\sigma}_3) \otimes h_1 + \frac{\bar{\sigma}_2}{2} \otimes h_2 + \frac{\sigma_2}{2} \otimes h_3 \\ \nabla h_2 &= -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_1 \otimes h_1 + \frac{(\bar{\sigma}_3 - \sigma_3)}{4} \otimes h_2 + \frac{\sigma_2}{2} \otimes h_4 \\ \nabla h_3 &= -\frac{1}{2}\sigma_1 \otimes h_1 - \frac{(\bar{\sigma}_3 - \sigma_3)}{4} \otimes h_3 + \frac{\bar{\sigma}_2}{2} \otimes h_4 \\ \nabla h_4 &= -\frac{1}{2}\sigma_1 \otimes h_2 - \frac{\bar{\sigma}_1}{2} \otimes h_3 + \frac{1}{4}(\sigma_3 + \bar{\sigma}_3) \otimes h_4 \end{aligned}$$

et sur le fibré $R(M)$ le 1^{er} groupe d'équations de structure s'écrit :

$$(1.4) \quad \begin{aligned} d \wedge \theta^1 &= \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_3 + \sigma_3) \wedge \theta^1 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1 \wedge \theta^2 + \frac{1}{2}\sigma_1 \wedge \theta^3 \\ d \wedge \theta^2 &= -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_2 \wedge \theta^1 + \frac{1}{4}(\sigma_3 - \bar{\sigma}_3) \wedge \theta^2 + \frac{1}{2}\sigma_1 \wedge \theta^4 \\ d \wedge \theta^3 &= -\frac{1}{2}\sigma_2 \wedge \theta^1 - \frac{1}{4}(\sigma_3 - \bar{\sigma}_3) \wedge \theta^3 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1 \wedge \theta^4 \\ d \wedge \theta^4 &= -\frac{1}{2}\sigma_2 \wedge \theta^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2 \wedge \theta^3 - \frac{1}{4}(\sigma_3 + \bar{\sigma}_3) \wedge \theta^4. \end{aligned}$$

En faisant usage des équations 1.3 les conditions de définition 1.1 donnent après calculs :

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \lambda_3 \theta^1 - \mu_4 \theta^2, & \sigma_2 &= \lambda_2 \theta^4 - \mu_1 \theta^3, \\ \sigma_3 &= \mu_1 \theta^1 + \mu_4 \theta^4 - \lambda_2 \theta^2 - \lambda_3 \theta^3 \\ \bar{\sigma}_1 &= \lambda_2 \theta^1 + \mu_4 \theta^3, & \bar{\sigma}_2 &= \lambda_3 \theta^4 + \mu_1 \theta^2, \\ \bar{\sigma}_3 &= -\mu_1 \theta^1 - \mu_4 \theta^4 - \lambda_2 \theta^2 - \lambda_3 \theta^3 \\ &(\mu_a, \lambda_b \in C^\infty(M); \quad a = 1, 4; \quad b = 2, 3). \end{aligned}$$

Il résulte aussitôt de 1.5 que l'on a : $\sigma_{14} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{21} = 0, \sigma_{22} = 0$ et ces conditions caractérisent comme on sait un espace-temps du type D dans la classification de Petrov [2]. En nous rapportant à [3] il résulte aussi que (M, g) possède la *propriété géodésique*, mais la réciproque n'est évidemment plus vraie. Nous considérons d'appeler la connexion ∇ induite par la propriété 1.1 une connexion de Killing (notée par ∇_k).

L'espace tangent $T_p(M)$ en $p \in M$ peut se décomposer en $T_p(M) = \mathcal{D}_h \oplus \mathcal{D}_s$ où $\mathcal{D}_h = \{h_a\}$ et $\mathcal{D}_s = \{h_b\}$ sont respectivement une 2-distribution hyperbolique et une 2-distribution spatiale.

Posons :

$$(1.6) \quad \omega_s = \lambda_b \theta^b \in \mathcal{D}_s^*, \quad \omega_h = \mu_a \theta^a \in \mathcal{D}_h^*$$

et introduisant les 2-formes simples $\eta_s = \theta^2 \wedge \theta^3$ et $\eta_h = \theta^1 \wedge \theta^4$ correspondant respectivement à \mathcal{D}_s et \mathcal{D}_h . Eu égard à 1.5 et 1.6 les équations :

$$(1.7) \quad \begin{aligned} d \wedge \theta^1 &= -\omega_s \wedge \theta^1 - \mu_4 \eta_s \\ d \wedge \theta^4 &= \omega_s \wedge \theta^4 - \mu_1 \eta_s \\ d \wedge \theta^2 &= \omega_h \wedge \theta^2 + \lambda_3 \eta_h \\ d \wedge \theta^3 &= -\omega_h \wedge \theta^3 + \lambda_2 \eta_h \end{aligned}$$

et le théorème de Frobenius montrent aussitôt que les deux distributions \mathcal{D}_s et \mathcal{D}_h sont involutives. Si j est l'isomorphisme canonique défini par la métrique g nous convenons d'appeler $X_s = j^{-1}(\omega_s) \in \mathcal{D}_s$ et $X_h = j^{-1}(\omega_h) \in \mathcal{D}_h$ respectivement le champ vectoriel spatial et le champ vectoriel hyperbolique associés à ∇_k . D'autre part en nous rapportant à 1.2 nous poserons $\Omega = 2Z^3$, $\bar{\Omega} = 2\bar{Z}^3 (= \theta^1 \wedge \theta^4 + \theta^2 \wedge \theta^3)$. Les 2-formes Ω et $\bar{\Omega}$ sont visiblement presque symplectique ($(\wedge \Omega)^2 \neq 0$, $(\wedge \bar{\Omega})^2 \neq 0$). Notons par μ et $\bar{\mu}$ les isomorphismes de fibrés définis par Ω et $\bar{\Omega}$ ($\mu : w \rightarrow i_w \Omega$; $w \in T(M)$, etc.). En faisant usage de (1.7) la différentiation extérieure de η_h et η_s donne :

$$(1.8) \quad d \wedge \eta_h = -\bar{\mu}(X_h) \wedge \eta_s, \quad d \wedge \eta_s = -\mu(X_s) \wedge \eta_h$$

et à l'aide de (1.8) la différentiation extérieure de (1.7) donne après calculs :

$$(1.9) \quad d\mu_a = 0, \quad d\lambda_b = 0.$$

D'autre part soient Σ_α et $C_{\alpha\beta}$ respectivement les 2-formes de courbures complexes et les composantes du tenseur symétrique (et de trace nulle) qui correspond dans le f. v. c. au tenseur conforme de Weyl [2]. On a comme

$$\text{on sait (1.9) } \Sigma_\alpha = \left(C_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R \mu_{\alpha\beta} \right) Z^\beta + E_{\alpha\bar{\beta}} Z^\beta \text{ et}$$

$$(1.10) \quad \begin{aligned} d \wedge \sigma_1 &= \Sigma_1 + \frac{1}{2} \sigma_3 \wedge \sigma_1 \\ d \wedge \sigma_2 &= \Sigma_2 + \frac{1}{2} \sigma_2 \wedge \sigma_3 \\ d \wedge \sigma_3 &= \Sigma_3 + \sigma_2 \wedge \sigma_1. \end{aligned}$$

Dans (1.9) R , $E_{\alpha\bar{\beta}}$ et $\mu_{\alpha\beta}$ sont respectivement la courbure scalaire de (M, g) ,

la tenseur d'Einstein et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

A l'aide de (1.5) et (1.7) on déduit de (1.9) et (1.10) $R = 3(\mu_1\mu_4 - \lambda_2\lambda_3) = \text{const.}$ Enfin des distributions \mathcal{D}_s et \mathcal{D}_h étant les deux involutives considérons par exemple la surface (feuille) M_h tangente à \mathcal{D}_h . Elle est définie par $\theta^b = 0$ et par conséquent la forme de soudure de M_h est $dp = \theta^a \otimes h_a$ (nous avons noté avec les mêmes lettres les éléments induites par l'immersion $x : M_h \rightarrow M$). Les vecteurs h_b étant des sections normales, les deux formes quadratiques l_b associés à x sont $l_b = - \langle dp, \nabla h_b \rangle$. De (1.3), (1.6) et (1.7) il vient :

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \nabla h_2 &= \frac{1}{2} (-\omega_h \otimes h_2 + \lambda_2(\theta^4 \otimes h_4 - \theta^1 \otimes h_1)) \\ \nabla h_3 &= \frac{1}{2} (\omega_h \otimes h_3 + \lambda_3(\theta^4 \otimes h_4 - \theta^1 \otimes h_1)) \end{aligned}$$

et un calcul immédiat donne $l_b = 0$ ce qui prouve que l'immersion x est *totale*ment géodésique [4]. La considération de la surface M_s tangente à \mathcal{D}_s conduit à la même propriété. On peut donc dire que la connexion ∇_k induit un double feuilletage géodésique.

THÉORÈME. — Soit (M, g) un espace-temps ayant la propriété de Killing et soit ∇_k la connexion induite par cette propriété. Alors :

i) L'espace-temps (M, g) est du type D dans la classification de Petrov et est de courbure scalaire constante;

ii) la connexion ∇_k induit sur l'espace tangent $T_p(M)$ un double feuilletage géodésique dont les feuilles sont respectivement des surfaces spatiales et hyperboliques.

2. De (1.3) et (1.5) on déduit après calculs

$$(2.1) \quad \nabla_{X_s} X_s = 0, \quad \nabla_{X_h} X_h = 0, \quad \nabla_{X_s} X_h + \nabla_{X_h} X_s = 0$$

et les deux premières équations (2.1) montrent que les champs vectoriels X_s et X_h sont géodésiques. En outre les propriétés de l'opérateur ∇ montrent aussitôt que les champs $\underline{X} = X_s + X_h$ et $\underline{X} = X_s - X_h$ sont aussi géodésiques. Si nous posons maintenant :

$$(2.2) \quad i_X \bar{\Omega} = \mu_1 \theta^1 - \lambda_2 \theta^2 + \lambda_3 \theta^3 - \mu_4 \theta^4 = \phi.$$

on trouve à l'aide (1.7) $d \wedge \phi = 0$. Mais d'autre part compte tenu de (1.8) il vient :

$$(2.3) \quad d \wedge \bar{\Omega} = (\mu \theta^1 - \mu_4 \theta^4) \wedge \eta_s + (\lambda_3 \theta^3 - \lambda_2 \theta^2) \wedge \eta_h$$

et l'on obtient $i_X(d \wedge \bar{\Omega}) = 0$. On a donc $L_X \bar{\Omega} = 0$ (L_w : dérivée de Lie dans la direction W) ce qui montre que \underline{X} est un automorphisme infinitésimal de $\bar{\Omega}$. De plus on trouve que l'adjointe $_*\phi$ de ϕ a pour expression

$$_*\phi = -(\lambda_3 \theta^2 + \lambda_2 \theta^3) \wedge \eta_h + (\mu_4 \theta^1 + \mu_1 \theta^4) \wedge \eta_s$$

et à l'aide de (1.7) et (1.8) on déduit $d \wedge *_\phi = 0$.

Il résulte de là que ϕ est *harmonique* ou encore que le champ vectoriel $j^{-1}\phi = (j^{-1} \circ \bar{\mu})\underline{X}$ est harmonique. D'une manière analogue on retrouve les mêmes propriétés pour la 2-forme Ω et le champ vectoriel \underline{X}_+ .

THÉORÈME. — *Le champ spatial X_s et le champ hyperbolique X_h associés à la connexion ∇_k qui structure un espace-temps possédant la propriété de Killing sont les deux géodésiques et cette propriété est encore vraie pour les champs $\underline{X} = X_s - X_h$ et $\underline{X}_+ = X_s + X_h$. Ces deux derniers champs sont des automorphismes infinitésimaux respectivement des formes presque symplectiques $\bar{\Omega}$ et Ω et les champs $(j^{-1} \circ \bar{\mu})\underline{X}$ et $(j^{-1} \circ \mu)\underline{X}_+$ sont harmoniques.*

Let (M, g) be a general space-time and let $R(M)$ be the bundle of Sachs frames. If in the neighbourhood of each point $p \in M$ there exists a frame $R = \{h_A; A = 1, \dots, 4\} \in R(M)$ such that all vectors h_A are Killing vector fields we say that (M, g) has the *Killing property*. Making use of the complex vectorial formalism [2] it is proved that any space-time which has the Killing property is of *type D* in Petrov's classification and M is of *constant scalar curvature*. The connection ∇_k induced by this property defines on the tangent space $T_p(M)$ a *double geodesic foliation* whose leaves are hyperbolic and spatial surfaces respectively. The properties of some vector fields induced by ∇_k are also discussed.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. E. D'ATRI, H. K. NICKERSON, *The existence of special orthogonal frames*. Diff., t. 2, 1968.
- [2] M. CAHEN, R. DEBEVER, L. DEFRISE, *A complex vectorial formalism in general Relativity*. *Journal of Mathematics and Mechanics*, t. 16, 7, 1967.
- [3] R. ROSCA, *Espace-temps ayant la propriété géodésique*, *C. R. Acad. Sc., Paris, Série A*, t. 285, 1977, p. 305-308.
- [4] B. Y. CHEN, *Geometry of submanifolds*, M. Dekker, N. Y., 1973.

(Manuscrit reçu le 22 mars 1979)