ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. GARIEL

Un nouvel effet couplé en thermodynamique relativiste locale des phénomènes irréversibles

Annales de l'I. H. P., section A, tome 34, nº 2 (1981), p. 153-161
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1981__34_2_153_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXXIV, n° 2, 1981, p. 153-161. *Physique théorique.*

Un nouvel effet couplé en thermodynamique relativiste locale des phénomènes irréversibles

par

J. GARIEL
Université de Madagascar (B. P. 372, Antsiranana, Madagascar)

RÉSUMÉ. — Nous montrons que le terme supplémentaire $\dot{q}^\alpha u_\alpha$ qui apparaît dans la théorie d'Eckart [*1*] d'un fluide conducteur de la chaleur (où $\dot{q}^\alpha$ est la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne du 4-vecteur densité de conduction calorifique et u_α la quadrivitesse locale normée) pose un problème d'interprétation du point de vue thermodynamique. On peut le résoudre en postulant l'existence d'un nouvel effet couplé, « thermocinétique », d'origine relativiste, qui conduit à l'hypothèse de Fourier relativiste posée par Pham Mau Quan [*2*].

ABSTRACT. — We show that the supplementary term $\dot{q}^\alpha u_\alpha$ which appears in the caloric conducting fluid Eckart's theory [*1*] (where $\dot{q}^\alpha$ is the derivative by the curvilinear asbciss of the calorific conduction density and u_α the local unitary speed) states a thermodynamics construction problem. We can solve this one by admitting the existence of a new relativistic « thermokinetic » cross-effect, which leads to the relativistic Fourier's hypothesis of Pham Mau Quan [*2*].

§ 1. INTRODUCTION

Soit un fluide simple, monophasé, non réactif, non visqueux, sans rayonnement, susceptible seulement de conduire la chaleur, dans l'espace de Minkowski de la relativité restreinte de métrique $g^{\alpha\beta} = C^{te}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) de signature $(+, -, -, -)$, et dont l'élément d'univers est :

$$d\xi^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{1-1}$$

où x^α est le quadripoint centré sur l'élément de matière. Nous noterons la dérivée totale relativement à ξ par un point sur le symbole qu'on dérive $\left(\text{ex. : } \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\xi}\right)$. On sait qu'Eckart [1] et d'autres [2] [3] ont proposé de décrire un tel fluide en relativité restreinte par un tenseur d'impulsion-énergie symétrique de la forme :

$$\text{(1-2)} \qquad T^{\alpha\beta} = n(1 + \bar{h})u^\alpha u^\beta - Pg^{\alpha\beta} - u^\alpha q^\beta - u^\beta q^\alpha$$

où n, $\bar{h} = \frac{h}{n}$, P, $u^\alpha = \dot{x}^\alpha$, et q^α sont respectivement les champs de densité du nombre de particules (ou de la « matière »), d'enthalpie spécifique (h : densité d'enthalpie), de pression scalaire, de 4-vitesse normée de la matière, et de densité de conduction calorifique. On se place dans un système d'unités tel que $m_0 = 1$, $c = 1$, m_0 notant la masse au repos d'une particule et c la vitesse de la lumière dans le vide :

$$\text{(1-3)} \qquad u^\alpha u_\alpha = 1$$

$$\text{(1-4)} \qquad u_\alpha q^\alpha = 0.$$

Le principe de conservation de l'énergie totale :

$$\text{(1-5)} \qquad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

où ∇_α désigne la dérivation covariante, se décompose alors en :

i) le premier principe :

$$\text{(1-6)} \qquad u_\beta \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

qui, avec (1-2), et compte tenu du principe de conservation du nombre de particules (principe de Lavoisier [5]) :

$$\text{(1-7)} \qquad \sigma_N = \nabla_\alpha(nu^\alpha) = 0$$

(σ_N : source du nombre de particules), donne le bilan d'enthalpie :

$$\text{(1-8)} \qquad n\dot{\bar{h}} = \dot{P} + \nabla_\alpha q^\alpha + u_\alpha \dot{q}^\alpha\,;$$

et, $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta$ notant le projecteur local d'espace [4] [5], en :

ii) l'équation du mouvement :

$$\text{(1-9)} \qquad \gamma_{\alpha\beta}\nabla_\sigma T^{\sigma\beta} = 0$$

qui donne ici, avec (1-2) :

$$\text{(1-10)} \qquad n(1 + \bar{h})\dot{u}^\alpha = \gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta P + \gamma^{\alpha\beta}\dot{q}_\beta + q^\beta\nabla_\beta u^\alpha + q^\alpha\nabla_\beta u^\beta.$$

§ 2. BILAN ET SOURCE D'ENTROPIE

2.1. Montrons que le terme $\dot{q}^\alpha u_\alpha$ de (1-8), supplémentaire en théorie relativiste d'Eckart par rapport à la théorie classique [9], est inclus dans la fonction dissipative $T\sigma_S$, où T est le champ scalaire de température et σ_S la source d'entropie, et non pas dans le terme de flux ou d'échange avec l'extérieur. En effet, l'axiome d'équilibre local $\bar{u} = f\left(\bar{s}, \bar{v} = \frac{1}{n}\right)$ ou $\bar{h} = \varphi(\bar{s}, P)$ où $\bar{u} = \frac{u}{n}$ note l'énergie interne spécifique (u étant la densité d'énergie interne), $\bar{v}$ le volume spécifique, et $\bar{s} = \frac{s}{n}$ l'entropie spécifique (s étant la densité d'entropie), posé aussi bien classiquement [*9*] [*10*] qu'en relativité [*1*] à [*8*] dans le cas de pure conduction ici considéré, conduit à l'équation de Gibbs :

$$\text{(2-1)} \qquad \dot{\bar{s}} = \frac{\dot{\bar{u}}}{T} + \frac{1}{T}P\left(\dot{\overline{\frac{1}{n}}}\right) = \frac{\dot{\bar{h}}}{T} - \frac{1}{n}\frac{\dot{P}}{T}.$$

Avec (1-8), (2-1) devient :

$$\text{(2-2)} \qquad \dot{\bar{s}} = \frac{\nabla_\alpha q^\alpha}{nT} + \frac{u_\alpha \dot{q}^\alpha}{nT}.$$

L'hypothèse :

$$\text{(2-3)} \qquad q^\alpha = -Ts^{\alpha*}$$

où $s^{\alpha*} = \gamma^{\alpha\beta}s_\beta$ est le 4-courant densitaire de conduction d'entropie, s_β étant le 4-courant densitaire d'entropie total :

$$\text{(2-4)} \qquad s_\beta = su_\beta + s_{\beta*} = n\bar{s}u_\beta + s_{\beta*},$$

couramment admise dans ce cas ([*1*] à [*8*]), transforme (2-2) en :

$$\text{(2-5)} \qquad T\dot{\bar{s}} = -\frac{\nabla_\alpha(Ts^{\alpha*})}{n} + \frac{u_\alpha \dot{q}^\alpha}{n}$$

Or, d'après (1-7) :

$$\text{(2-6)} \qquad \sigma_S \overset{\text{déf}}{=} \nabla_\alpha s^\alpha = \nabla_\alpha(n\bar{s}u^\alpha) + \nabla_\alpha s^{\alpha*} = n\dot{\bar{s}} - \nabla_\alpha s^{\alpha*} ;$$

(2-5) et (2-6) donnent alors :

$$-T\nabla_\alpha s^{\alpha*} - s^{\alpha*}\nabla_\alpha T + u_\alpha \dot{q}^\alpha = nT\dot{\bar{s}} = T\sigma_S - T\nabla_\alpha s^{\alpha*}$$

$$\text{(2-7)} \qquad T\sigma_S = -s^{\alpha*}\nabla_\alpha T + u_\alpha \dot{q}^\alpha = \frac{q^\alpha}{T}\nabla_\alpha T + u_\alpha \dot{q}^\alpha$$

ce qu'on voudrait démontrer.

On reconnaît, comme premier terme du deuxième membre de (2-7), la contribution classique due à la conduction calorifique; le deuxième terme, $u_\alpha \dot{q}^\alpha$, reste à interpréter. En raison de (1-4) et de (2-3), on peut encore écrire (2-7) sous les formes :

$$\text{(2-8)} \qquad T\sigma_S = q^\alpha\left(\frac{\nabla_\alpha T}{T} - \dot{u}_\alpha\right) = -s^{\alpha*}(\nabla_\alpha T - T\dot{u}_\alpha).$$

2.2. On peut chercher à interpréter $-q^\alpha \dot{u}_\alpha$ comme un nouvel effet dissipatif (le flux étant q^α, la « force » $\dot{u}_\alpha$), d'origine relativiste car il n'existe pas classiquement, et devant être associé au mouvement d'ensemble local (contrairement à ce qui se passe classiquement : [*10*], p. 828). Comme il s'agit du *même* flux, q^α, dans le premier terme de $T\sigma_S$ (2-8), la force associée étant alors $\nabla_\alpha T/T$, il faudrait donc interpréter (2-8) comme un effet *direct*, *le* flux étant q^α et *la* « force » $\left(\gamma^{\alpha\beta}\dfrac{\nabla_\beta T}{T} - \dot{u}^\alpha\right)$.

Dans cette perspective, l'hypothèse de Fourier généralisée d'Eckart [*1*] :

$$q^\alpha = -K\gamma^{\alpha\beta}(\nabla_\beta T - T\dot{u}_\beta) \tag{2-9}$$

où $K = K(T)$ est la conductivité thermique du fluide, semblerait meilleure que celle de Pham Mau Quan [*2*] :

$$q_P^\alpha = -K\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta T \tag{2-10}$$

comme l'ont déjà souligné Eringen ([*7*], p. 500, § 7) et d'autres [*8*]; elle devrait être considérée comme une relation phénoménologique linéaire traduisant un tel effet direct :

$$q^\alpha = L_{11}\left(\gamma^{\alpha\beta}\frac{\nabla_\beta T}{T} - \dot{u}^\alpha\right) = \frac{L_{11}}{T}(\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\alpha T - T\dot{u}^\alpha) \tag{2-11}$$

avec, par conséquent, d'après (2-9) :

$$L_{11} = -KT. \tag{2-12}$$

L_{11} est différent de zéro, le fluide étant supposé conducteur.

(2-11) et (2-8) donnent alors :

$$T\sigma_S = \frac{q^\alpha q_\alpha}{L_{11}} \tag{2-13}$$

L'état stationnaire, $q^\alpha = 0$, correspond à une transformation réversible ($T\sigma_S = 0$). (2-9) et (1-10) entraînent dans ce cas :

$$\gamma^{\alpha\beta}\frac{\nabla_\beta T}{T} = \dot{u}^\alpha = \frac{1}{(n+h)}\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta P, \tag{2-14}$$

c'est-à-dire que le fluide est holonome ([*5*] (8-7)).

§ 3. CRITIQUE DE L'INTERPRÉTATION D'ECKART

Plaçons-nous dans le cas particulier où le fluide n'a pas de 4-gradient de température :

$$\nabla_\alpha T = 0 \tag{3-1}$$

d'où par conséquent

$$\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta \mathrm{T} = 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{\mathrm{T}} = 0, \tag{3-2}$$

on a affaire à un fluide à température uniforme et isotherme. Cependant, même dans ce cas, la théorie d'Eckart prévoit un courant de chaleur de conduction donné par (2-9) avec (3-2), soit :

$$q^\alpha = \mathrm{KT}\dot{u}^\alpha = -\mathrm{L}_{11}\dot{u}^\alpha = \mathrm{K}\dot{\mathrm{T}}^\alpha \qquad (\mathrm{T}^\alpha = \mathrm{T}u^\alpha) \tag{3-3}$$

dont on ne voit pas l'interprétation : que peut signifier un courant de chaleur de conduction en l'absence de gradient de température ? Il suffirait qu'il y ait une 4-accélération pour qu'un courant de chaleur apparaisse si le fluide est conducteur ($\mathrm{K} \neq 0 \neq \mathrm{L}_{11}$), et ce, sans conditions restrictives particulières. Cela ne semble pas exact : toute force causant une accélération $\dot{u}^\alpha$ n'est pas nécessairement dissipative.

Si l'on pose :

$$\dot{u}^\alpha = an^\alpha \tag{3-4}$$

où a note la première courbure et n^α le premier vecteur unitaire d'espace de la tétrade de Frénet-Serret :

$$n^\alpha u_\alpha = 0 \quad , \quad n^\alpha n_\alpha = -1, \tag{3-5}$$

la fonction dissipative (2-7) se réduit à :

$$\mathrm{T}\sigma_{\mathrm{S}} = u_\alpha \dot{q}^\alpha = -q^\alpha \dot{u}_\alpha = -\mathrm{KT}\dot{u}^\alpha \dot{u}_\alpha = \mathrm{KT}a^2, \tag{3-6}$$

d'où la source d'entropie et le deuxième principe local :

$$\sigma_{\mathrm{S}} = \mathrm{K}a^2 \geqslant 0 \tag{3-7}$$

La condition de réversibilité $\sigma_{\mathrm{S}} = 0$ pour un fluide conducteur ($\mathrm{K} \neq 0$) entraîne alors une courbure nulle, $a = 0$, c'est-à-dire que les lignes de courant soient des géodésiques :

$$u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0, \tag{3-8}$$

et réciproquement ($\dot{u}^\alpha = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \sigma_{\mathrm{S}} = 0$). Pour qu'il y ait source d'entropie dans un fluide où $\nabla_\alpha \mathrm{T} = 0$, il serait nécessaire et suffisant que le fluide conducteur ait des lignes de courant non géodésiques, c'est-à-dire ici courbes. Cette conséquence de la théorie d'Eckart semble inacceptable.

§ 4. NOUVELLE INTERPRÉTATION PROPOSÉE

4.1. Si l'on revient à la forme (2-7) de la fonction dissipative, il semble qu'on puisse proposer la nouvelle interprétation que voici :

On a affaire à un *nouvel effet couplé*, qu'on pourrait qualifier de « *thermo-cinétique* », avec :

les *deux* flux : q^α et $\dot{q}^\alpha$,
et les *deux* « forces » : $\nabla_\alpha T/T$ et u_α,

car rien n'oblige *a priori* à ce qu'une « force » ou un flux soit du genre espace ou du genre temps. D'où les relations phénoménologiques linéaires :

$$q^\alpha = L_{11}\frac{\nabla^\alpha T}{T} + L_{12}u^\alpha \tag{4-1}$$

$$\dot{q}^\alpha = L_{21}\frac{\nabla^\alpha T}{T} + L_{22}u^\alpha \tag{4-2}$$

avec la relation de réciprocité d'Onsager :

$$L_{12} = L_{21}. \tag{4-3}$$

(4-1) et (4-2) entraînent respectivement :

$$0 = u_\alpha q^\alpha = L_{11}\frac{\dot{T}}{T} + L_{12} \tag{4-4}$$

$$u_\alpha \dot{q}^\alpha = L_{21}\frac{\dot{T}}{T} + L_{22}. \tag{4-5}$$

4.2. **Annulation des forces (états d'équilibre partiel).**

i) Reprenons le cas particulier (3-1); il correspond à l'équilibre thermique, mais non mécanique (*a priori* $\dot{u}^\alpha \neq 0$). (4-1) et (4-2) se réduisent alors à :

$$q^\alpha = L_{12}u^\alpha \Rightarrow 0 = u_\alpha q^\alpha = L_{12} \Longrightarrow q^\alpha = 0 \Rightarrow \dot{q}^\alpha = 0 \tag{4-6}$$

$$\dot{q}^\alpha = L_{22}u^\alpha \Rightarrow u_\alpha \dot{q}^\alpha = L_{22} \quad \overset{(4-6)}{\Longrightarrow} L_{22} = 0. \tag{4-7}$$

(2-7) et (4-6) donnent alors

$$T\sigma_S = 0 \tag{4-8}$$

résultat qui semble plus plausible, dans le cas où $\nabla_\alpha T = 0$, que celui, (3-3) et (3-7), issu de l'interprétation d'Eckart.

Remarque. — *A priori* on pourrait penser poser une interprétation semblable à celle de 4.1., mais avec les deux flux q^α et u_α et les deux « forces » $\nabla_\alpha T/T$ et $\dot{q}^\alpha$. Cela conduirait, cependant, dans le cas particulier (3-1), à un état doublement stationnaire (les deux flux q^α et u_α seraient nuls), sans force $\dot{q}^\alpha$, sans flux de chaleur et *statique* ($u^\alpha = 0 = \dot{u}^\alpha$), avec état d'équilibre

($T\sigma_S = 0$). Nous rejetons cette interprétation, car on ne voit pas physiquement pourquoi l'annulation du gradient de température imposerait au fluide d'être statique; cela serait même encore plus restrictif que l'interprétation d'Eckart.

Ainsi (4-1) et (4-2) nous paraissent fournir la meilleure interprétation possible. On peut les réécrire :

$$q^\alpha = L_{11}\gamma^{\alpha\beta}\frac{\nabla_\beta T}{T} + \left(L_{11}\frac{\dot{T}}{T} + L_{12}\right)u^\alpha = L_{11}\gamma^{\alpha\beta}\frac{\nabla_\beta T}{T} \tag{4-9}$$

en utilisant (4-4), et :

$$\dot{q}^\alpha = L_{21}\frac{\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta T}{T} + \left(L_{21}\frac{\dot{T}}{T} + L_{22}\right)u^\alpha \tag{4-10}$$

où $\left(L_{21}\frac{\dot{T}}{T} + L_{22}\right)$ est différent de zéro en général.

(4-9) montre que l'hypothèse (2-10) de Fourier généralisée de Pham Mau Quan [*2*] avec, donc :

$$- K = \frac{L_{11}}{T} \tag{4-11}$$

qui est sous-tendue par l'interprétation (4-1) et (4-2), est préférable à celle (2-9) d'Eckart [*1*] elle-même sous-tendue par l'interprétation (2-11).

ii) On ne peut supposer que la deuxième « force », u^α, est nulle car cela serait en contradiction avec (1-3). Aussi la supposerons-nous seulement constante (état d'équilibre mécanique, mais *a priori* non thermique) :

$$u^\alpha = C^{te} \qquad (\Rightarrow \dot{u}^\alpha = 0 \Rightarrow \dot{u}^\alpha q_\alpha = 0 = - u^\alpha \dot{q}_\alpha) \tag{4-12}$$

Alors (4-9) reste inchangée et (4-10) devient :

$$\dot{q}^\alpha = L_{21}\gamma^{\alpha\beta}\frac{\nabla_\beta T}{T} \tag{4-13}$$

puisque, d'après (4-12) et (4-2) :

$$L_{21}\frac{\dot{T}}{T} + L_{22} = 0. \tag{4-14}$$

(2-7) se réduit à :

$$T\sigma_S = \frac{q^\alpha \nabla_\alpha T}{T}. \tag{4-15}$$

4.3. États stationnaires (annulation des flux).

i) Supposons d'abord que le premier flux est nul :

$$q^\alpha = 0 \Rightarrow \dot{q}^\alpha = 0 \tag{4-16}$$

(4-1) et (4-2) deviennent :

(4-17) $$0 = L_{11} \frac{\nabla_\alpha T}{T} + L_{12} u_\alpha \Rightarrow 0 = L_{11} \frac{\dot{T}}{T} + L_{12}$$

(4-18) $$0 = L_{21} \frac{\nabla_\alpha T}{T} + L_{22} u_\alpha \Rightarrow 0 + L_{21} \frac{\dot{T}}{T} = L_{22} = L_{22} - L_{11}\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2$$

$\nabla_\alpha T$ doit donc être du genre temps :

(4-19) $$\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta T = 0$$

ce qu'on aurait pu écrire directement à partir de (4-9) et (4-16) sachant que $L_{11} \neq 0$.

(2-7) donne avec (4-16) :

(4-20) $$T\sigma_S = 0$$

Cet état stationnaire est une transformation réversible.

ii) Supposons que le deuxième flux est nul :

(4-21) $$\dot{q}^\alpha = 0$$

(4-9) et (4-10) deviennent alors

(4-22) $$q^\alpha = L_{11} \gamma^{\alpha\beta} \frac{\nabla_\beta T}{T} = C^{te}$$

(4-23) $$0 = L_{21} \frac{\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta T}{T} + \left(L_{21} \frac{\dot{T}}{T} + L_{22}\right) u^\alpha \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L_{21} \dfrac{\gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta T}{T} = 0 \\ L_{21} \dfrac{\dot{T}}{T} + L_{22} = 0 \end{array} \right.$$

(4-23) impose d'après (4-22) :

(4-24) $$L_{21} = 0 \quad , \quad L_{22} = 0$$

et (2-7) devient avec (4-21) et (4-22) :

(4-25) $$T\sigma_S = \frac{q^\alpha \nabla_\alpha T}{T} = \frac{q^\alpha q_\alpha}{L_{11}} = \frac{C^{te}}{L_{11}}.$$

§ 5. CONCLUSION

L'interprétation selon laquelle la théorie d'Eckart amène à définir les deux flux q^α et $\dot{q}^\alpha$, les deux « forces » $\nabla_\alpha T/T$ et u_α, et l'effet couplé « thermo-cinétique » correspondant traduit par (4-1) et (4-2), d'où résulte en particulier l'hypothèse (2-10) de Fourier relativiste de Pham Mau Quan [*2*], semble la meilleure.

RÉFÉRENCES

[*1*] C. Eckart, *Phys. Rev.*, t. **58**, 1940, p. 919 (III).
[*2*] Pham Mau Quan, *Thèse*, Paris, 1954 et *Relativistic Fluid Dynamics*, Cime, ed., Cremonese, Rome, 1971.
[*3*] A. H. Taub, *Phys. Rev.*, t. **74**, 1948, p. 328-334.
[*4*] C. Cattaneo, *Introduction à la théorie macroscopique des fluides relativistes* (I), Collège de France, 1970.
[*5*] P. V. Grosjean, *Bull. de la Soc. Roy. des Sc. de Liège*, n° 3-4, 1975.
[*6*] O. Costa de Beauregard, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. **280** A, 17-02, 1975.
[*7*] A. C. Eringen, in *A critical Review of Thermodynamics*, Pittsburgh, Pennsylvania, ed. Mono Book Corp., 1970.
[*8*] R. Esposito, *Ric. Mat. ITA*, t. **27**, n° 1, 1978, p. 187-210.
[*9*] De Groot et Mazur, *Non-equilibrium thermodynamics*, N. H. P. C., Amsterdam, 1963.
[*10*] J. Chanu, *Thermodynamique*, Bruhat-Kastler, Masson, Paris, 1968.

(Manuscrit reçu le 18 septembre 1980)