ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

Y. POMEAU

Sur un problème de stéréologie

Annales de l'I. H. P., section A, tome 38, nº 1 (1983), p. 75-80
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1983__38_1_75_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXVIII, n° 1, 1983, p. 75-80.

Section A :
Physique théorique.

Sur un problème de stéréologie

par

Y. POMEAU
Service de Physique Théorique, CEN-Saclay

RÉSUMÉ. — On considère un remplissage de l'espace Euclidien par des sphères identiques impénétrables. Chaque sphère est immobilisée par contact avec ses voisines. L'étude statistique d'une section plane de cet arrangement, lorsqu'il est amorphe, permet de trouver le nombre moyen de contacts par sphère.

La stéréologie [*1*] étudie la question suivante : supposons l'espace Euclidien ordinaire rempli de divers objets. On en fait une coupe plane sur laquelle se dessinent les intersections des dits objets. Que peut-on dire à partir de cette coupe en ce qui concerne la répartition, la forme, la taille des objets coupés ?

Le problème tel qu'il est posé ci-dessus est bien entendu trop général pour appeler une réponse simple. Toutefois, quand les objets en question ne présentent ni ordre de position ni ordre d'orientation à longue portée, une section apporte une information considérable sur la structure coupée, explorant en quelque sorte toutes les configurations locales possibles. Il n'est pas clair malgré tout que *toutes* les quantités significatives puissent être connues à partir de l'analyse d'une section. Ainsi on pourra déduire de cette section toute fonction de corrélation ponctuelle dans laquelle les points sont coplanaires. Par contre il ne paraît pas simple (mais peut-être possible) d'en déduire une fonction de corrélation — par exemple entre quatre points — dans laquelle les points en argument ne sont pas coplanaires. On peut même dire qu'il existe un résultat négatif en ce qui concerne la reconstitution d'un objet par ses sections [*2*]. Soit un convexe compact du plan Euclidien. Une droite de ce plan qui le coupe supporte un segment (ou « intercept ») de longueur (bornée) ρ à l'intérieur du convexe. Considérons maintenant l'ensemble des droites de ce plan avec la répartition statistique respectant l'isotropie et l'invariance par translation [*3*]. Le sous-ensemble des droites rencontrant le convexe induit de façon naturelle une répartition stastistique des ρ, soit $P(\rho)$ (≥ 0) telle que

$$\int_0^{\rho} d\rho_1 P(\rho_1)$$

soit le poids relatif des intercepts de longueur comprise entre 0 et ρ. Alors il existe [*2*] un exemple de $P(\rho)$ correspondant à deux convexes non isométriques. Si l'on remplissait le plan de façon uniforme en moyenne par des échantillons de ces convexes sans recouvrement et sans ordre à longue portée, la répartition statistique des longueurs des intercepts par une droite aléatoire du plan définirait $P(\rho)$ et ne permettrait donc pas de savoir si l'on a affaire à l'un ou l'autre des deux convexes.

Ceci n'empêche pas malgré tout de remonter de façon précise à certaines données du remplissage de R^3 à partir de l'analyse d'une section plane. Naturellement il existe [*1*] [*4*] déjà de nombreux exemples d'une telle démarche.

Dans ce qui suit, je vais montrer comment résoudre, par des arguments statistiques assez simples une question qui m'a été posée par Guy Giraud [*5*], et qui ne paraît pas avoir été déjà examinée.

Le problème est le suivant : on remplit l'espace de sphères impénétrables identiques de rayon R, chaque sphère étant immobilisée [*5*] [*6*] grâce à ses contacts avec ses voisines. On suppose que cet arrangement n'a pas d'ordre à longue portée, possibilité connue plus ou moins empiriquement depuis déjà fort longtemps [*6*]. Étant donné donc une section plane de cet assemblage, peut-on connaître la coordinance (= le nombre de contacts avec les sphères voisines) moyenne de chaque sphère ? La littérature propose des méthodes pour résoudre cette question, qui conduisent pratiquement [*5*] à des résultats erronés. Il ne paraît donc pas inutile de donner une solution de ce problème.

La première question à résoudre est de trouver la densité numérique des sphères à partir de la section. Cette section est formée d'un ensemble de cercles de rayon $\rho \leq R$, R étant le rayon de la sphère. Si $\overline{h}$ est la distance au plan de section du centre de la sphère, on a

$$\rho = \sqrt{R^2 - \overline{h}^2}$$

et, pour une distribution uniforme de $\overline{h}$ entre 0 et R

$$\langle \rho \rangle = \frac{R\pi}{4}$$

où $\langle \rho \rangle$ est la valeur moyenne du rayon du cercle mesurée en donnant un même poids à chaque cercle. Ceci fournit donc un moyen de connaître R.

Remarquons que la distribution normalisée des rayons des cercles de section est telle que

$$P_R(\rho)d\rho = \frac{d\bar{h}}{R}$$

soit

$$P_R(\rho) = \frac{\rho}{R\sqrt{R^2 - \rho^2}},$$

qui vérifie bien la condition de normalisation

$$\int_0^R d\rho P_R(\rho) = 1$$

Si les sphères n'avaient pas toutes le même rayon, soit donc s'il existait une répartition statistique de ces rayons telle que $\omega(R)dR$ soit la fraction numérique des sphères de rayon compris entre R et $R + dR$, alors la contribution à $P(\rho)$ de ces sphères sera $\omega(R)P_R(\rho)dR$, la distribution (non normalisée) des rayons des cercles de section étant naturellement obtenue à partir de cette distribution par intégration sur R :

$$P(\rho) = \rho \int_\rho^\infty \frac{dR\omega(R)}{R\sqrt{R^2 - \rho^2}}$$

Soit, en faisant apparaître comme nouvelle variable $z = \dfrac{1}{R^2}$

$$P(\rho) = \int_0^{1/\rho^2} \frac{dz}{2\sqrt{z}} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\rho^2} - z}}$$

ce qui montre que $\dfrac{1}{2\sqrt{\rho}} P(\rho)$ est comme fonction de $1/\rho^2$ la transformée d'Abel [7] de $\dfrac{1}{2\sqrt{z}} \omega\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$. D'où l'on déduit [7] la formule d'inversion.

$$\omega(R) = \frac{2}{\pi} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \frac{dP}{d\rho}(\rho)$$

Ceci constitue une solution particulière du problème d'inversion général : peut-on remonter à l'objet d-dimensionnel à partir de la statistique de ses intersections par des $(d - 1)$ plans aléatoires ? Et si on le peut, comment ? On apprécie qu'au moins dans une catégorie de cas cette inversion est unique. Il ne semble pas que l'on sache trouver en général le nombre de solutions du problème d'inversion, même pour $d = 2$. On sait seulement [3] que les moments entiers de $P(\rho)$ doivent satisfaire des inégalités du type des inégalités d'Hausdorff [7] et que, comme on l'a dit plus haut, il y a des cas où il n'y a pas unicité de la solution du problème d'inversion.

Si n est la densité numérique des sphères, la proportion de la surface de section occupée par l'intérieur des cercles est $n\frac{4}{3}\pi R^3$, ce qui permet d'accéder à la densité numérique cherchée à partir de la seule section.

Pour trouver maintenant la coordinance moyenne, on va chercher la densité des contacts entre sphères, soit n_c. La coordinance moyenne sera donc n_c/n. Appelons pseudocontact une situation où 2 cercles voisins de la section sont très proches l'un de l'autre. Ceci dénote (en général) un contact réel entre les sphères près du plan de section. Soit Δ la distance la plus proche de deux cercles en pseudocontact et $P_c(\Delta)\, d\Delta$ la densité numérique dans le plan de section Π_Σ des pseudocontacts tels que Δ est dans l'intervalle $\left(\Delta - \frac{d\Delta}{2}, \Delta + \frac{d\Delta}{2}\right)$ avec $d\Delta \ll \Delta \ll R$. On va montrer que le comportement de $P_c(\Delta)$ au voisinage de $\Delta = 0$ dépend de la densité n_c cherchée. Soient O_1 et O_2 les centres des sphères responsables du pseudocontact. Elles ont un contact en C qui est à une hauteur ($\ll$ R) au-dessus de Π_Σ. La droite des centres de ces deux sphères est orientée au hasard par rapport à Π_Σ (puisque l'arrangement des sphères ne présente pas d'ordre à longue portée et que le plan de section est orienté au hasard). Et C étant proche de Π_Σ, les centres O_1 et O_2 sont situés de part et d'autre de Π_Σ, sauf si la droite O_1O_2 est presque parallèle à ce plan, ce qui est en première approximation, une situation exceptionnelle ne contribuant pas à l'ordre dominant de $P_c(\Delta)$ près de $\Delta = O_+$.

Dans le plan Π passant par O_1 et O_2 et perpendiculaire à Π_Σ on a la figure 1. Soit ω_1 et ω_2 les points d'intersection de Π_Σ, Π et des sphères centrées en O_1 et O_2 respectivement, soit H_1 et H_2 les pieds des hauteurs

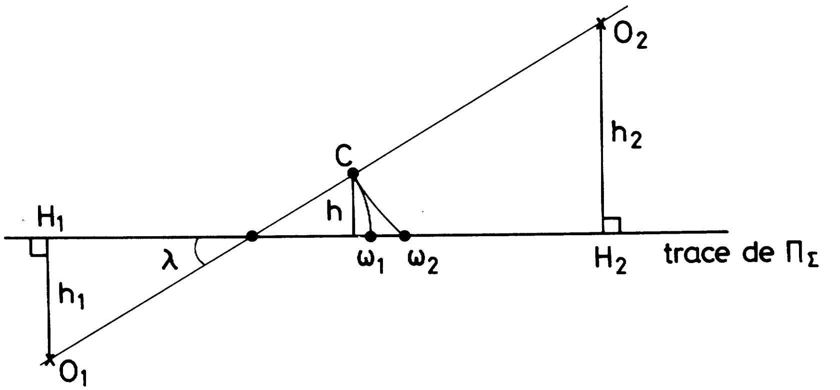

FIG. 1. — Dans le plan vertical passant par O_1 et O_2, centre des sphères de rayon R tangentes en C. Dans la limite $h \to 0$, $\Delta \equiv \omega_1\omega_2 \simeq h^2/R \cos^3 \lambda$ où λ est l'angle de O_1O_2 avec le plan de section, de trace H_1H_2 dans le plan de la figure.

abaissées de O_1 et O_2 sur Π_Σ et posons $h_1 = O_1H_1$, $h_2 = H_2O_2$. On a les relations

$$H_1\omega_1 = (R^2 - h_1^2)^{1/2}, \qquad H_2\omega_2 = (R^2 - h_2^2)^{1/2}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta = \omega_1\omega_2 &= H_1H_2 - H_1\omega_1 - H_2\omega_2 \\ &= 2\left(R^2 - \frac{(h_1 + h_2)^2}{4}\right)^{1/2} - (R^2 - h_1^2)^{1/2} - (R^2 - h_2^2)^{1/2} \\ &\simeq \frac{h^2}{R\cos^3\lambda}\end{aligned}$$

$$h_2 - h_1 = h \ll R$$

où λ est l'angle de la droite O_1O_2 avec Π_Σ. Cet angle est distribué au hasard entre 0 et $\pi/2$ avec le poids $\cos\lambda$. Si δ est la distribution de Dirac, on a donc

$$P_c(\Delta) = n_c\int_0^R dh\int_0^{\pi/2} d\lambda \sin\lambda\delta\left(\Delta - \frac{h^2}{R\cos^3\lambda}\right),$$

où l'on a tenu compte de ce que $n_c dh$ est la densité numérique en surface des projections sur Π_Σ des points C dont la distance à Π_Σ est comprise entre h et $h + dh$. Dans cette expression de $P_c(\Delta)$ on a étendu formellement l'intégration sur h jusqu'à R. En fait on a supposé que $h \ll R$ pour établir cette formule. Il est facile de montrer que ceci est sans conséquence, et qu'il suffit de borner supérieurement l'intégration sur h par une quantité nettement inférieure à R, mais très supérieure à $(R\Delta)^{1/2}$ pour obtenir à partir de l'expression ci-dessus le résultat suivant :

$$P_c(\Delta) \underset{\Delta\to 0}{\simeq} \frac{n_c}{2}\left(\frac{R}{\Delta}\right)^{1/2}\int_0^{\pi/2} d\lambda \cos^{5/2}\lambda$$

où

$$\int_0^{\pi/2} d\lambda \cos^{5/2}\lambda = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma^2(7/4)$$

$\Gamma(.)$ étant la transcendante habituelle.

Puisque la section plane donne accès, en principe à $P_c(\Delta)$, on peut déduire de cette dernière formule n_c et donc la coordinance moyenne.

L'extension des considérations précédentes au cas d'objets simplement convexes pose des problèmes considérables, mais peut-être pas insolubles, on peut en dire de même du calcul du coefficient de Darcy [*8*] pour un tel assemblage.

REMERCIEMENTS

Je remercie Guy Giraud et Étienne Guyon de m'avoir suggéré ce problème.

RÉFÉRENCES

[*1*] E. E. UNDERWOOD, *Quantitative Stereology*, Addison Wesley, 1969.
[*2*] C. L. MALLOWS, J. M. CLARK, *J. Appl. Probability*, t. **7**, 1970, p. 240.
[*3*] L. A. SANTALÓ, *Integral geometry and geometric probability*, Addison Wesley, New York, 1976.
[*4*] F. N. RHINES, *Metallurgical Transactions*, t. **8A**, 1977, p. 127.
[*5*] G. GIRAUD, Thèse d'État, Université de Provence, 1980.
[*6*] R. ZALLEN in *Fluctuation phenomena*, Studies in Statistical Mechanics, vol. **VII**, North Holland, 1979.
[*7*] D. V. WIDDER, *An introduction to transform theory*, Academic Press, New York, 1971.
[*8*] J. HAPPEL, L. BRENNER, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Noordhoff, 1973.

(Manuscrit reçu le 20 janvier 1982)