ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

SPYROS N. PNEVMATIKOS

Contraintes génériques en géométrie de contact

Annales de l'I. H. P., section A, tome 42, nº 2 (1985), p. 117-126
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1985__42_2_117_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 42, n° 2, 1985, p. 117-126. *Physique théorique*

Contraintes génériques en géométrie de contact

par

Spyros N. PNEVMATIKOS
Université de Dijon, Département de Mathématiques,
21100 Dijon, France

RÉSUMÉ. — On se donne une variété de contact (W, α) et une sous-variété M, dite des états permis, en position générale dans W, et on montre dans quel sens un formalisme hamiltonien générique peut être élaboré relativement à M. On décrit la nature géométrique de l'ensemble des points de M sur lesquels l'espace caractéristique de la restriction $\alpha \mid M$ peut ne pas être nul, et, lorsque M est de dimension impaire, on caractérise l'algèbre des fonctions f sur M qui admettent une extension différentiable F sur W dont le champ de contact X_F est tangent à M.

ABSTRACT. — We are given a contact manifold (W, α) and a submanifold M of permissible states, in general position in W, and we study a generic hamiltonian formalism on the restriction to the constraint submanifold M. We describe the geometrical nature of the set of points of M for which the restriction $\alpha \mid M$ has a nontrivial characteristic space, and, in the odd-dimensional case, we characterize the algebra of functions f on M admitting differentiable extensions F on W whose contact vector fields X_F are tangent to M.

INTRODUCTION

Cet article est consacré à l'étude, sous l'aspect de la Géométrie de Contact, de l'évolution dynamique d'un système mécanique obéissant à des *contraintes génériques.* Il s'agit de la suite de l'étude sur les « Singularités génériques en Géométrie de Contact » entreprise dans [*8*].

Soit (W, α) une variété de contact, i. e. une variété différentiable W de dimension impaire munie d'une forme de Pfaff α dont l'espace caractéristique est partout nul, et M une sous-variété de W que nous appellerons *variété d'états permis.* Si F est une fonction différentiable sur W, alors la dynamique qu'elle définit par son champ de contact X_F sur W n'est pas en général admissible pour M : les trajectoires de X_F de conditions initiales dans M peuvent ne pas être entièrement contenues dans M. La première obstruction peut déjà se lire sur la nature de la forme $\alpha \mid M$ induite sur M, par la non possibilité d'associer à la restriction $F \mid M$ un « champ de contact » $X_{F|M}$ sur M, i. e. un champ de vecteurs différentiable satisfaisant les conditions :

$$\left| \begin{array}{l} (\alpha \mid M)(X_{F|M}) = F \mid M \\ L_{X_{F|M}}(\alpha \mid M) \wedge (\alpha \mid M) = 0 . \end{array} \right.$$

Notons que des exemples simples montrent que le champ de contact X_F peut ne pas être tangent à M, bien que la restriction $F \mid M$ admette un « champ de contact » $X_{F|M}$ sur M ; en d'autres termes, on peut éventuellement avoir une évolution sur la variété d'états permis M définie par $F \mid M$ distincte de l'évolution qui est définie par F dans l'espace de phases ambiant.

Le problème de l'existence d'un champ de contact $X_{F|M}$ sur M, a été traité, sous des hypothèses génériques concernant la forme induite $\alpha \mid M$, dans [*8*] (théorème 7). Ici, après avoir complété cette étude en portant la généricité sur le plongement de M dans W, nous étudions le problème de l'extension de $F \mid M$ en une fonction différentiable F' sur W dont le champ de contact $X_{F'}$ est tangent à M. L'approche suivie emploie la technique de symplectisation générique introduite dans [*8*] et conduit à l'extension des méthodes qui nous ont permis d'étudier le problème analogue dans le cadre de la Géométrie Symplectique, cf. [*7*].

I. SINGULARITÉS APPARAISSANT GÉNÉRIQUEMENT SUR LES SOUS-VARIÉTÉS D'UNE VARIÉTÉ DE CONTACT

Soit (W, α) une variété de contact de dimension $2n + 1$ et M une variété différentiable de dimension k, $k \leqq 2n + 1$. Afin de définir la notion de plongement générique de M dans W, on considère le fibré $T^*M \times \overset{2}{\wedge} T^*M$ muni de sa stratification canonique par le rang construite dans [*4*], et les morphismes de fibrés sur M :

$$\begin{array}{ccc} J^1(T^*M) \overset{\Phi_1}{\rightarrow} T^*M \times \overset{2}{\wedge} T^*M & & T^*M \times \overset{2}{\wedge} T^*M \overset{\Phi_2}{\leftarrow} J^1(M, W) \\ j_x^1\alpha' \mapsto (j_x^0\alpha', j_x^0 d\alpha') & \text{et} & (\iota^*\alpha(x), \iota^*d\alpha(x)) \leftarrow j_x^1\iota \end{array}$$

où $J^1(T^*M)$ désigne le fibré des 1-jets de sections de T^*M et $J^1(M, W)$ le fibré des 1-jets d'applications différentiables de M dans W. Comme on peut le voir facilement Φ_1 est une submersion, et comme il résulte du lemme d'algèbre extérieure qui suit, Φ_2 est aussi une submersion en chaque 1-jet d'immersion de M dans W. Ainsi, la stratification du fibré $T^*M \times \overset{2}{\wedge} T^*M$ se relève par image réciproque en une stratification de $J^1(T^*M)$, et en une stratification de l'ouvert des 1-jets d'immersions de $J^1(M, W)$. La stratification de $T^*M \times \overset{2}{\wedge} T^*M$ étant finie et localement triviale, il en est de même de ces stratifications.

LEMME 1. — *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* $2n + 1$, E^* *son espace dual, et* (α, β) *un élément de* $E^* \times \overset{2}{\wedge} E^*$ *tel que* $\alpha \wedge \beta^n \neq 0$. *Si* E' *est un espace vectoriel de dimension* k, $k \leqq 2n + 1$, *et* $\mathscr{L}(E', E)$ *l'espace des applications linéaires de* E' *dans* E, *alors en chaque élément de rang* k *de* $\mathscr{L}(E', E)$, *l'application*

$$\mathscr{L}(E', E) \overset{\Phi}{\to} E'^* \times \overset{2}{\wedge} E'^*$$
$$\ell \mapsto (\ell^*\alpha, \ell^*\beta)$$

est une submersion.

Démonstration. — L'existence d'une base $\{ \varepsilon_i \}_{i=1,\dots,2n+1}$ de E^* telle que

$$\left| \begin{array}{l} \alpha = \varepsilon_{2n+1} \\ \beta = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{2n-1} \wedge \varepsilon_{2n} \end{array} \right.$$

est une propriété bien connue prouvée dans [*4*]. On identifie E à $\mathbb{R}^{2n+1}$ et on considère les projections

$$\pi_1 : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n}, \qquad \pi_1 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$$
$$\pi_2 : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R} \;\;, \qquad \pi_2 = \varepsilon_{2n+1}$$

et l'isomorphisme

$$\mathscr{L}(E', \mathbb{R}^{2n+1}) \to E'^* \times \mathscr{L}(E', \mathbb{R}^{2n})$$
$$\ell \mapsto (\pi_2 \circ \ell, \pi_1 \circ \ell) .$$

L'application $\Phi(\ell) = (\ell^*\alpha, \ell^*\beta) = (\pi_2 \circ \ell, \ell^*\beta)$ s'écrit alors

$$E'^* \times \mathscr{L}(E', \mathbb{R}^{2n}) \to E'^* \times \overset{2}{\wedge} E'^*$$
$$(\imath, \jmath) \mapsto (\imath, \jmath^*\beta)$$

ou encore

$$\Phi = (\mathrm{Id}\, E'^*, \Psi) .$$

L'application Ψ, pour tout $\jmath = (\jmath_1, \dots, \jmath_{2n}) \in \mathscr{L}(E', \mathbb{R}^{2n})$ s'écrit

$$\Psi(\jmath) = \jmath^*\beta = \jmath_1 \wedge \jmath_2 + \jmath_3 \wedge \jmath_4 + \dots + \jmath_{2n-1} \wedge \jmath_{2n} ,$$

et sa dérivée en un point $s = (s_1, \ldots, s_{2n}) \in \mathscr{L}(E', \mathbb{R}^{2n})$, s'écrit

$$D_s\Psi(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} [s_{2i-1} \wedge \sigma_{2i} + \sigma_{2i-1} \wedge s_{2i}].$$

Si s est de rang k, alors $D_s\Psi$ est surjective. En effet, il existe une base de E'^* formée par k composantes de s que, quitte à les réordonnées, on les note $s_1, \ldots, s_k$, et la famille $\{ s_i \wedge s_j \}_{1 \leqq i < j \leqq k}$ constitue une base de $\overset{2}{\wedge} E'^*$. Il suffit donc de prouver que pour tout i, j, $1 \leqq i < j \leqq k$, il existe $\sigma \in \mathscr{L}(E', \mathbb{R}^{2n})$ tel que

$$D_s\Psi(\sigma) = s_i \wedge s_j .$$

Pour cela on choisit

$$\sigma = (0, \ldots, 0, \sigma_{i+1} = s_j, 0, \ldots, 0), \qquad \text{lorsque } i \text{ est impair},$$

ou bien

$$\sigma = (0, \ldots, 0, \sigma_{i-1} = -s_j, 0, \ldots, 0), \qquad \text{lorsque } i \text{ est pair}.$$

On en déduit que Ψ est une submersion en chaque immersion, et par conséquent il en est de même pour Φ.

D'après le théorème classique de transversalité de R. Thom, les plongements de M dans W (resp. les formes de Pfaff sur M), dont le 1-jet est transverse à la stratification du fibré des 1-jets d'immersions de M dans W (resp. à la stratification du fibré des 1-jets de sections de T*M), constituent un ouvert dense de l'espace $\mathscr{P}(M, W)$ des plongements de M dans W (resp. de l'espace $\Lambda^1(M)$ des formes de Pfaff sur M), pour la C^∞-topologie de Whitney, cf. [*2*] [*4*]. Les plongements (resp. les formes de Pfaff), qui satisfont à cette condition de transversalité seront appelés ici *génériques*. On en déduit à partir du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
J^1(T^*M) \arrow[r, "\Phi_1"] & T^*M \times \overset{2}{\wedge} T^*M & J^1(M, W) \arrow[l, "\Phi_2"'] \\
& M \arrow[ul, "j^1(\iota^*\alpha)"] \arrow[u] \arrow[ur, "j^1\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* M *une variété différentiable plongée dans une variété de contact* (W, α). *Alors, le plongement de* M *dans* W *est générique, si et seulement si, la forme de contact* α *induit sur* M *une forme générique.*

Ainsi, on peut se ramener à la théorie générale des singularités des formes différentielles génériques et en déduire que les ensembles

$$\Xi_\nu(\alpha \mid M) = \{ x \in M/(\alpha \mid M)(x) \neq 0 \ \& \ \dim \mathscr{K}_x(\alpha \mid M) = \nu \}$$

où $\mathscr{K}_x(\alpha \mid M)$ désigne l'espace caractéristique de $\alpha \mid M$ en x, $\nu = 0, 1, 2, \ldots,$

sont des sous-variétés régulières, de codimension $v(v+1)/2$ lorsqu'ils apparaissent, et la forme $\alpha \mid M$ peut s'annuler qu'en des points isolés sur lesquels sa différentielle est de rang maximum. La stratification de M ainsi réalisée est finie et localement triviale. L'adhérence de chaque strate est localement difféomorphe à une sous-variété algébrique de $\mathbb{R}^k$ et possède la propriété de frontières

$$\overline{\Xi_v(\alpha \mid M)} = \bigcup_{v' \geqq v} \Xi_{v'}(\alpha \mid M)$$

sauf pour $\Xi_0(\alpha \mid M)$ en dimension paire, et $\Xi_0(\alpha \mid M)$ et $\Xi_1(\alpha \mid M)$ en dimension impaire, dont les adhérences peuvent contenir les zéros de $\alpha \mid M$. L'espace caractéristique $\mathscr{K}_x(\alpha \mid M)$ est donc nul sur l'ouvert dense $\Xi_0(\alpha \mid M)$ de M et cesse de l'être sur les points du lieu singulier $\Xi(\alpha \mid M) = M - \Xi_0(\alpha \mid M)$. Lorsque ce lieu singulier apparaît, c'est une hypersurface dont la partie lisse est constituée des points où l'espace caractéristique est unidimensionnel. Son type différentiable local ne dépend que de la dimension de l'espace caractéristique au point considéré ; les modèles d'équations algébriques qui le définissent localement en sont donnés dans [*8*].

II. EXTENSIONS DES DYNAMIQUES ADMISSIBLES A LA VARIÉTÉ DE CONTACT AMBIANTE

Soit (W, α) une variété de contact et M une variété différentiable plongée dans W ; nous identifions M à son image dans W et nous la munissons de la restriction $\bar{\alpha}$ de la forme de contact α à M. Nous dirons que M est une *variété d'états permis générique* lorsque son plongement dans W est générique, au sens du § I. Si f est une fonction différentiable sur M, nous dirons, comme dans [*8*], que c'est une *hamiltonienne de contact admissible* pour M, lorsqu'elle possède un *champ de contact* X_f sur M, i. e. un champ de vecteurs différentiable solution (unique) du système d'équations

$$\left| \begin{array}{l} \bar{\alpha}(X_f) = f \\ L_{X_f}\bar{\alpha} \wedge \bar{\alpha} = 0 . \end{array} \right.$$

L'objectif de cette partie est la démonstration du :

THÉORÈME 3. — *Soit* (W, α) *une variété de contact et* M *une variété d'états permis générique de dimension impaire* $2m+1$. *Si f est une fonction différentiable sur* M *alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *La fonction f admet une extension différentiable* F *sur* W *dont le champ de contact* X_F *est tangent à* M.

2) *La fonction f possède un champ de contact* X_f *sur* M.

3) *Sur une partie dense de l'ensemble des points où l'espace caractéristique de $\bar{\alpha}$ est unidimensionnel les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$(A) \qquad d(f\bar{\alpha}) \wedge (d\bar{\alpha})^{m-1} = 0$$

et

$$(B) \qquad df \wedge (d\bar{\alpha})^{m} = 0 .$$

Démonstration. — Le théorème 7 de [*8*], via le théorème 2, affirme immédiatement l'équivalence (3) $\Leftrightarrow$ (2). Nous prouverons par la suite l'implication (2) $\Rightarrow$ (1), sa réciproque étant facilement vérifiable. Supposons donc que la fonction f possède un champ de contact X_f sur M, et considérons sur la variété $M \times \mathbb{R}^+$ où $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ la fonction $h = tf$ qui, d'après la proposition 12 de [*8*], possède un champ hamiltonien X_h solution différentiable unique sur $M \times \mathbb{R}^+$ de l'équation

$$X_h \lrcorner\, d(t\bar{\alpha}) = -\, dh , \tag{1}$$

vérifiant aussi la relation

$$X_h = X_f - \lambda t \frac{\partial}{\partial t} \tag{2}$$

où λ est le coefficient de proportionnalité défini, d'après la proposition 6 de [*8*], de façon unique sur M par

$$L_{X_f}\bar{\alpha} = \lambda\bar{\alpha} . \tag{3}$$

La variété M est ici identifiée à $M \times \{1\}$ par son plongement dans $M \times \mathbb{R}^+$ défini par $x \mapsto (x, 1)$. De même, la variété W est identifiée à $W \times \{1\}$ par le plongement correspondant dans $W \times \mathbb{R}^+$; on voit facilement que la forme $d(t\alpha)$ est symplectique sur $W \times \mathbb{R}^+$, et que sa restriction à $M \times \mathbb{R}^+$ est $d(t\bar{\alpha})$. La forme $d(t\bar{\alpha})$ étant générique au sens de [7], i. e. son 0-jet est transverse à la stratification par le rang du fibré $\overset{2}{\wedge}\, T^*(M \times \mathbb{R}^+)$, d'après la proposition 3.1 de [7], $M \times \mathbb{R}^+$ est une variété d'états permis générique dans la variété symplectique $W \times \mathbb{R}^+$, au sens de [7]. Ainsi, d'après le théorème 4.1 de [7], la fonction h se prolonge en une fonction différentiable H sur $W \times \mathbb{R}^+$ dont le champ hamiltonien X_H est tangent à $M \times \mathbb{R}^+$. De plus, sur un voisinage ouvert V d'un point de $M \times \mathbb{R}^+$ muni d'un système de coordonnées approprié

$$(x, y, t) = (x_1, \ldots, x_{2m+1}, y_{2m+2}, \ldots, y_{2n+1}, t)$$

tel que $U = V \cap (M \times \mathbb{R}^+)$ soit donné par $y = 0$, on peut écrire

$$H(x, y, t) = h(x, t) + \sum_{i=2m+2}^{2n+1} \zeta_i(x, t) y_i \tag{4}$$

les ζ_i étant des fonctions différentiables convenables sur U. Nous montrerons par la suite qu'en fait il existe une extension H telle que

$$H(x, y, t) = tF(x, y). \tag{5}$$

Pour cela il suffit de prouver que pour tout $i = 2m + 2, 2m + 3, \ldots, 2n+1$ on peut avoir

$$\zeta_i(x, t) = t\zeta_i'(x), \tag{6}$$

ou bien que dans un nouveau système de coordonnées (x, y', t) avec $y' = ty$ on peut écrire

$$H(x, y', t) = h(x, t) + \sum_{i=2m+2}^{2n+1} \zeta_i'(x)y'. \tag{7}$$

Précisons tout d'abord la construction des fonctions ζ_i :

$$X_1, \ldots, X_{2m+1}, \qquad Y_{2m+2}, \ldots, Y_{2n+1}, \qquad Z$$

désigneront les restrictions à U respectivement des champs

$$\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_{2m+1}, \qquad \partial/\partial y_{2m+2}, \ldots, \partial/\partial y_{2n+1}, \qquad \partial/\partial t,$$

et $K_{2m+2}, \ldots, K_{2n+1}$ les champs duaux relativement à la forme symplectique $d(t\alpha) \mid U$ des formes $dy_{2m+2} \mid U, \ldots, dy_{2n+1} \mid U$; ces champs sont des sections de la restriction $T(W \times \mathbb{R}^+) \mid U$ du fibré $T(W \times \mathbb{R}^+)$ à U. Il est clair que les champs $y_{2m+2}, \ldots, y_{2n+1}$ définissent un sous-fibré, N, de $T(W \times \mathbb{R}^+) \mid U$ supplémentaire de TU, et les champs $K_{2m+2}, \ldots, K_{2n+1}$ définissent un sous-fibré ,$TU^\perp$, de $T(W \times \mathbb{R}^+) \mid U$ dont chaque fibre $T_aU^\perp$ est l'orthocomplément de T_aU dans l'espace $T_a(W \times \mathbb{R}^+)$ pour la forme $d(t\alpha)(a)$. Considérons alors la décomposition

$$\begin{aligned} T(W \times \mathbb{R}^+) \mid U &= TU \oplus N \\ K_j &= \Delta_j + N_j \end{aligned} \tag{8}$$

où Δ_j est une section de TU et N_j une section de N, $j = 2m+2, \ldots, 2n+1$. Si $\Pi = [\pi_{ij}]$ désigne la matrice définie sur U qui projette le $TU^\perp$ sur N parallèlement à TU dans les bases $\{ K_j \}$ et $\{ Y_i \}$ alors pour tout

$$i, j = 2m + 2, \ldots, 2n + 1$$

on a

$$\pi_{ij} = dy_i(K_j) = d(t\alpha)(K_i, K_j) \tag{9}$$

et aussi le noyau de Π est identifié au noyau de la restriction $d(t\bar{\alpha}) \mid U$. D'après la proposition 4.2 de [7], l'existence d'une extension H donnée par la relation (4) dont le champ hamiltonien X_H est tangent à $M \times \mathbb{R}^+$

en tout point de U équivaut à l'existence d'un système de coordonnées (x, y, t) sur V tel que le système d'équations

$$\sum_{i=2m+2}^{2n+1} \pi_{ij}\zeta_i = - \Delta_j h, \qquad j = 2m + 2, \ldots, 2n + 1 \tag{10}$$

ait une solution différentiable $\zeta = (\zeta_{2m+2}, \ldots, \zeta_{2n+1})$ sur U. Ainsi, pour prouver l'existence d'une extension H satisfaisant la décomposition (5), il suffit de prouver que ce système admet une solution indépendante de t. Montrons d'abord que

$$\Pi(x, t) = t\Pi'(x) \tag{11}$$

où $\Pi'(x)$ est une matrice indépendante de t. En effet, si $X_{y_i'}$ désigne le champ hamiltonien de la fonction y_i' relativement à la forme symplectique $d(t\alpha)$, et X_{y_i} le champ de contact de la fonction y_i relativement à la forme de contact α, alors on sait que

$$X_{y_i'}(x, y, t) = X_{y_i}(x, y) - \lambda_i'(x, y)t\partial/\partial t. \tag{12}$$

Comme la restriction du champ hamiltonien $X_{y_i'}$ à U est identifiée au champ K_i, on a

$$K_i(x, t) = X_{y_i}(x, 0) - \lambda_i(x)t\partial/\partial t \tag{13}$$

et donc

$$\begin{aligned}\pi_{ij}(x, t) &= d(t\alpha)(K_i, K_j)(x, 0, t) = (dy_i')(K_j)(x, 0, t)\\ &= t(dy_i)(K_j)(x, 0) \qquad = t(dy_i)(X_{y_j})(x, 0) = t\pi_{ij}'(x)\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Montrons maintenant que

$$\Delta h(x, t) = t R(x) \tag{15}$$

où $R(x)$ est une matrice colonne indépendante de t. En effet, Δ_j est la composante tangentielle de K_j et elle s'écrit

$$\Delta_j = \sum_{i=2m+2}^{2n+1} \rho_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} - \lambda_j(x)t\,\frac{\partial}{\partial t} \tag{16}$$

et donc

$$\Delta_j h = t\left(\sum_{i=2m+2}^{2n+1} \rho_{ij}(x)\,\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_j(x)f(x)\right). \tag{17}$$

Ainsi le système d'équations (10) s'écrit

$$t\Pi'(x)\zeta(x, t) = - t R(x) \tag{18}$$

La matrice $t\Pi'(x)$ est inversible sur l'ensemble des points de U où le noyau de $d(t\overline{\alpha})$ est nul et donc, si ζ est solution de ce système elle est nécessairement indépendante de t sur cet ensemble et par continuité partout sur U. Considérons alors la fonction F obtenue par la décomposition (5) de l'hamiltonienne H, qui constitue une extension différentiable de f localement sur la variété de contact ambiante, et prouvons que son champ de contact X_F est tangent à M. En effet, on sait que

$$X_H(x, y, t) = X_F(x, y) - \lambda'(x, y)t \frac{\partial}{\partial t} \tag{19}$$

et

$$X_h(x, t) = X_f(x) - \lambda(x)t \frac{\partial}{\partial t} \tag{20}$$

et de plus

$$X_H(x, 0, t) = X_h(x, t) \tag{21}$$

d'où

$$X_F(x, 0) = X_f(x)$$

ce qui achève la démonstration du théorème, le résultat global étant obtenu sans difficultés par recollement des extensions locales à l'aide d'une partition de l'unité.

Remarques. — Si f est une fonction sur une variété d'états permis M admettant une extension différentiable F sur la variété de contact ambiante (W, α) dont le champ de contact X_F est tangent à M, alors l'extension F n'est pas en général unique. Cependant, sur une variété d'états permis générique de dimension impaire, on peut préciser que l'extension F est unique modulo le carré de l'idéal des fonctions différentielles sur W qui sont nulles sur M ; ceci résulte de la propriété analogue concernant l'extension de l'hamiltonienne $h = tf$ en l'hamiltonienne $H = tF$ sur la variété symplectisée ambiante $W \times \mathbb{R}^+$ prouvée dans [7], proposition 4.3. Par contre, le champ de contact X_f associé à f sur cette variété d'états permis générique, qui est identifié à la restriction de X_F à M, est unique sur l'ensemble des points réguliers et par continuité sur toute la variété M. Comme on l'a vu dans [*8*], l'ensemble des hamiltoniennes de contact admissibles f reçoit une structure naturelle d'algèbre de Lie définie par le crochet de Lagrange générique

$$[\![f, f']\!] = \bar{\alpha}([X_f, X_{f'}]).$$

Ce crochet est en fait identifié à la restriction sur M du crochet de Lagrange classique de la variété de contact ambiante

$$[\![F, F']\!] \mid M = [\![f, f']\!]$$

où F et F′ sont des extensions quelconques des f et f' respectivement sur W dont les champs de contact X_F et $X_{F'}$ sont tangents à M. Nous terminons en précisant que, d'après le corollaire 13 de [*8*], les trajectoires des champs de contact X_f associés aux hamiltoniennes de contact f, de conditions initiales dans une strate $\Xi_\nu(\bar{\alpha})$, sont entièrement contenues dans cette même strate.

RÉFÉRENCES

[*1*] P. A. M., DIRAC, Generalized hamiltonian dynamics. *Canad. J. Math.*, t. **2**, 1950, p. 129-148.

[*2*] M. HIRSCH, *Differential Topology*. Springer-Verlag, New York, 1976.

[*3*] A. LICHNEROWICZ, Variétés symplectiques et dynamique associée à une sous-variété. *C. R. Acad. Sciences Paris*, t. **280A**, 1975, p. 523-527.

[*4*] J. MARTINET, Sur les singularités des formes différentielles. *Annales Institut Fourier*, t. **20**, nº 1, 1970, p. 95-178.

[*5*] S. N. PNEVMATIKOS, Étude géométrique des contraintes génériques dans les espaces de phases. *Thèse*, Amsterdam, 1981.

[*6*] S. N. PNEVMATIKOS, Sur les formes de Pfaff et les structures de contact singulières génériques. *C. R. Acad. Sciences Paris*, t. **295A**, 1982, p. 695-698.

[*7*] S. N. PNEVMATIKOS, Singularités en Géométrie Symplectique. Symplectic Geometry, ch. 15, p. 184-216, *Research Notes in Mathematics*, t. **80**, Pitman Adv. Publ., London, 1983.

[*8*] S. N. PNEVMATIKOS, Singularités génériques en géométrie de contact. *Annales Institut H. Poincaré*, t. **41**, nº 3, 1984, p. 237-253.

(Manuscrit reçu le 10 mai 1984)

(Version révisée, reçue le 10 août 1984)