Annales de l'I. H. P., section A

Roland Omnes

À propos de la dualité onde-particule

Annales de l'I. H. P., section A, tome 49, nº 3 (1988), p. 351-354

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1988__49_3_351_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 49, n° 3, 1988, p. 351-354. *Physique théorique*

A propos de la dualité onde-particule

par

Roland OMNES

LPTHE (Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies),
Université de Paris-Sud, 91405 Orsay, France

RÉSUMÉ. — Nous étudions comment la dualité onde-corpuscule, exemple fondamental du principe de complémentarité de Bohr, entre dans le cadre de la « reformulation logique de la mécanique quantique ».

ABSTRACT. — We study the wave-particle duality, which is a fundamental example of the Bohr Principle of Complementarity, within the framework of the « logical reformulation of quantum mechanics ».

La dualité onde-particule, qui est à l'origine de la réflexion de Louis de Broglie et qui se trouve au centre de multiples essais parmi lesquels celui de Bohm et Vigier est l'un des plus marquants, a été prise par Niels Bohr comme un exemple fondamental de complémentarité.

Le principe de complémentarité n'a pas toujours chez Bohr une forme parfaitement claire. Tout récemment, dans le cadre de la reformulation logique de la mécanique quantique proposée par le présent auteur, il a pu recevoir une forme précise : deux propositions relatives à un système quantique ont un caractère complémentaire lorsqu'il est impossible de construire une représentation quantique cohérente de la logique qui les englobe toutes deux. Il apparaît intéressant de voir comment la dualité onde-corpuscule, qui a révélé la complémentarité, entre dans ce cadre général.

Nous allons considérer cette question à propos du phénomène qui l'a soulevée pour la première fois : la complémentarité entre la description d'un phénomène électromagnétique en termes de champ électromagnétique ou de photons. Du point de vue des fondements qui seul nous intéresse ici, il n'est pas essentiel d'insister sur le caractère vectoriel du champ

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Physique théorique - 0246-0211
Vol. 49/88/03/351/ 4 /$ 2,40/© Gauthier-Villars

électromagnétique ni sur son correspondant corpusculaire, le spin du photon. De même, on peut se contenter d'examiner le cas d'un champ monochromatique de fréquence ν bien déterminée en le comparant à une assemblée de photons possédant tous la même énergie $h\nu$. Ces deux restrictions permettent de réduire l'espace de Hilbert de l'électrodynamique quantique à un espace séparable qui n'est autre que celui qu'engendrent des opérateurs création et annihilation a et a^+.

En désignant l'état du vide par $| 0 \rangle$, on sait qu'un état $| \mathrm{N} \rangle$ qui consiste en exactement N photons est de la forme $| \mathrm{N} \rangle = (a^+)^{\mathrm{N}}(\mathrm{N}!)^{-1/2} | \mathrm{O} \rangle$. Pour comparaison, un état propre du champ (scalaire) ayant une amplitude complexe λ est représentable comme un état normé cohérent $| \lambda \rangle$ donné par

$$| \lambda \rangle = \exp(\lambda a^+ - | \lambda |^2/2) | \mathrm{O} \rangle . \tag{1}$$

Les représentations quantiques cohérentes de la logique sont construites à l'aide de projecteurs dans l'espace de Hilbert. La question se pose donc de construire deux types de projecteurs :

1) Un projecteur E_1 qui spécifie le nombre des photons entre certaines limites, par exemple $n_1 < \mathrm{N} < n_2$.

2) Un projecteur E_2 qui spécifie que le champ λ prend ses valeurs dans un domaine C_2 donné du plan complexe.

Lorsque $n_1 = n_2$, on a affaire à un état pur du type photonique ; lorsque C_2 est petit, c'est le champ qui est relativement bien déterminé. Pour exhiber le caractère complémentaire des caractères corpusculaire et ondulatoire, il suffit de montrer que les prédicats élémentaires $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$, $(\mathrm{E}_1^*, \mathrm{E}_2)$, $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2^*)$, $(\mathrm{E}_1^*, \mathrm{E}_2^*)$ (avec, par exemple $\mathrm{E}_1^* = 1 - \mathrm{E}_1$) ne peuvent ensemble constituer la base d'une logique cohérente. Le problème est d'ailleurs simplifié du fait que le nombre de photons et l'opérateur hamiltonien commutent, de telle sorte que le temps ne joue aucun rôle.

Il est élémentaire de produire le projecteur E_1 comme un opérateur dans l'espace de Hilbert-Fock. La question n'est pas aussi simple dans le cas de E_2. D'ordinaire, les problèmes de ce type sont abordés à l'aide des états cohérents du type (1) ou en passant par l'espace de Hilbert des fonctions d'une variable complexe avec le produit scalaire

$$\langle f | g \rangle = \int \bar{f}(\lambda) g(\lambda) \exp(- | \lambda |^2) d(\mathrm{Re}\, \lambda) d(\mathrm{Im}\, \lambda)/2\pi \tag{2}$$

qui a été introduit par Bargmann. En fait, la méthode la plus commode est une troisième voie : elle consiste à revenir à des variables conjuguées X et P telles que

$$a = 2^{-1/2}(\mathrm{X} + i\mathrm{P}) \qquad a^+ = 2^{-1/2}(\mathrm{X} - i\mathrm{P}) \tag{3}$$

et d'utiliser l'analyse microlocale sous la forme correspondant au calcul de Weyl : tout opérateur est associé à une fonction $f(x, p)$ sur un espace de phase classique. Dans le cas présent, E_1 serait associé à $\delta[(x^2 + p^2)^{2/2} - n](2\pi)^{-1}$ si $n_1 = n_2 = \mathrm{N}$ et E_2 à la fonction caractéristique $\chi_2(x, p)$ de la cellule C_2 (c'est-à-dire la fonction égale à 1 lorsque (x, p) est intérieur à C_2, à zéro lorsqu'il est extérieur).

Ni l'une, ni l'autre de ces deux formes n'est réellement utilisable car les fonctions correspondantes ne sont pas suffisamment régulières. Dans le langage mathématique, elles ne sont pas des symboles. Cela tient au fait que E_1 est associé à une distribution et que la fonction χ associée à E_2 est discontinue. On peut remédier à cet inconvénient de la manière suivante : tout d'abord on définit une région annulaire C_1 par $n_1 < 1/2(x^2 + p^2) < n_2$ ou bien, dans le cas où $n_1 = n_2$, on prend un anneau centré sur le cercle $1/2(x^2 + p^2) = n$.

Au lieu de s'intéresser aux fonctions caractéristiques χ_1 et χ_2 des domaines C_1 et C_2, on introduit des fonctions de Schwartz $\mathrm{Q}_1(x, p)$ et $\mathrm{Q}_2(x, p)$ de supports essentiels C_1 et C_2. Par exemple Q_1 est une fonction indéfiniment différentiable égale à 1 dans C_1, sauf au bord immédiat de C_1 et à zéro hors de C_1. On peut démontrer que de telles fonctions engendrent bien des projecteurs par le calcul de Weyl, à la condition que $[\mathrm{C}_1] \gg 1$, $[\mathrm{C}_2] \gg 1$, $[\mathrm{C}_1]$ désignant par exemple l'intégrale de $(2\pi)^{-1}dxdp$ sur le domaine C_1. L'erreur commise, c'est-à-dire la mesure en trace de $\mathrm{E}_1^2 - \mathrm{E}_1$ est de l'ordre de $[\mathrm{C}_1]^{-1/2}$ (soit $(\hbar/[\mathrm{C}_1])^{1/2}$ en unités où $\hbar$ n'est pas prise égale à 1).

La représentation de la logique introduite précédemment sera cohérente si la condition de compatibilité suivante est satisfaite :

$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{Tr}\,(\mathrm{E}_1 \rho \mathrm{E}_1^* \mathrm{E}_2)) = 0\,. \tag{3}$$

Prenons le cas le plus simple, celui où $\rho = \mathrm{E}_2/(\mathrm{Tr}\ \mathrm{E}_2)$. Ceci revient à considérer comme une donnée que l'amplitude est dans C_2 au temps zéro et à poser deux prédicats élémentaires : que N est entre n_1 et n_2 à un instant t_1, que l'amplitude est encore dans C_2 à un instant t_2, avec $0 < t_1 < t_2$. C'est l'impossibilité d'une telle « histoire » qu'il s'agit d'établir.

En tenant compte de $\mathrm{E}_1\mathrm{E}_1^* = 0$, ceci revient à étudier la valeur de

$$\mathrm{Re}\ \mathrm{Tr}\,([\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2]\mathrm{E}_1^*\mathrm{E}_2) = 0?$$

soit encore, puisque $\mathrm{Tr}\,([\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2]\mathrm{E}_2) = 0$ et $\mathrm{E}_1^* = 1 - \mathrm{E}_1$:

$$\mathrm{Re}\ \mathrm{Tr}\,([\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2]\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2) = 0? \tag{4}$$

Nous nous intéresserons spécifiquement au cas où C_1 et C_2 ont une intersection non vide (sinon il serait vain de discuter une « histoire » dont la mesure est pratiquement nulle). La théorie générale des opérateurs pseudo-différentiels montre qu'alors le terme dominant dans la trace (4) est donné par

$$- i\hbar \int \{ \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2 \}\, \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 dxdp(2\pi)^{-1}$$

où $\{ Q_1, Q_2 \}$ est une parenthèse de Poisson. Il est nul, comme on peut le voir en intégrant par parties. Le terme suivant est

$$1/2\hbar^2 \int [\{ Q_1, Q_2 \} \{ Q_1, Q_2 \} + \{ \{ Q_1, Q_2 \}, Q_1 \} Q_2 + \\ + \{ \{ Q_1, Q_2 \} Q_1, Q_2 \} \frac{dxdp}{2\pi}.$$

Le dernier terme s'annule comme intégrale d'une parenthèse de Poisson. Par intégration par parties, on constate que le second terme est identique au premier, ce qui nous conduit à la condition

$$\mathrm{Re} \int \{ Q_1, Q_2 \}^2 dxdp/(2\pi) = 0 .$$

Cette propriété n'est réalisée que dans le cas où l'anneau C_1 contient la cellule C_2, ce qui est une banalité.

En conclusion, on constate que la version logique du principe de Complémentarité s'applique effectivement dans le cas qui, historiquement, lui a donné naissance.

RÉFÉRENCES

R. OMNES, *Logical reformulation of quantum mechanics.*
1. Foundations.
2. Interferences and the EPR experiment.
3. Classical limit and irreversibility.
LPTHE preprints, 1988, submitted to the Journal of Statistical Physics.

(Manuscrit reçu le 10 juillet 1988)