ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

CLAUDE MAYER

Processus de Markov non stationnaires et espace-temps

Annales de l'I. H. P., section B, tome 4, nº 3 (1968), p. 165-177

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1968__4_3_165_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. IV, n° 3, 1968, p. 165-177.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Processus de Markov non stationnaires et espace-temps

par

Claude MAYER

Institut Henri Poincaré,
Source de probabilités.
11, rue Pierre-et-Marie-Curie, Paris, 5^e.

RÉSUMÉ. — Au § I, on donne une définition d'un processus de Markov non stationnaire, généralisant directement les processus stationnaires. Cette définition diffère par certains détails de celle de Dynkin [*1*].

Dans le § II, on associe à tout processus non stationnaire X sur l'espace des états E un processus « espace-temps » *stationnaire* $\tilde{X}$ sur $E \times R_+$; puis on montre que la correspondance $X \leftrightarrow \tilde{X}$ conserve les principales propriétés de régularité des processus : propriété de Markov forte, propriété de Blumenthal, continuité des trajectoires, etc.

Enfin, dans le § III, on déduit de la représentation ci-dessus les conditions pour qu'une fonction de transition $\{ P_t^s \}$ engendre un processus suffisamment régulier.

SUMMARY. — In parag. I, we give a definition of a non-stationnary Markov process, as a direct generalisation of stationnary processes. This definition is slightly different from Dynkin's [*1*].

In parag. II, to each non-stationnary Markov process X, with state space E, is associated a *stationnary* « space-time » process $\tilde{X}$, with state space $E \times R_+$; we show that the main regularity properties of the processes such as strong Markov property, Blumenthal property, right continuity of paths, etc., remain invariant through the correspondance $X \leftrightarrow \tilde{X}$.

In parag. III, we use the above representation to give conditions such that a transition function $\{ P_t^s \}$ generates a sufficiently regular process.

NOTATIONS. — Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable; nous désignerons par : $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des fonctions numériques $\mathcal{E}$-mesurables *bornées* sur E; $\mathcal{M}(E)[\mathcal{M}_+(E), \mathcal{M}_+^1(E)]$ l'ensemble des mesures sur $(E, \mathcal{E})$ [des mesures $\geqslant 0$, des mesures $\geqslant 0$ de masse totale 1].

Soit $\mu \in \mathcal{M}(E)$; lorsqu'une suite d'égalités sera suivie du signe $[\mu]$, cela signifiera que chacune de ces égalités est vraie μ-presque sûrement.

§ I. GÉNÉRALITÉS

1. DÉFINITION. — *Soit* $(E, \mathcal{E})$ *un ensemble mesurable.*

Nous appellerons Processus de Markov *à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$ *un système :*

$$X = \left(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \bar{R}_+}, \{X_t\}_{t \geqslant 0}, \{\theta_t\}_{t \geqslant 0}, \{P_\mu^s\}_{s \geqslant 0, \mu \in \mathcal{M}_1^+(E)}\right),$$

où : $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ *est un ensemble mesurable ;*

$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ *est une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}_\infty$ *;*

$\{X_t\}$ *est une famille de variables aléatoires de* Ω *dans* E, *adaptée à* $\{\mathcal{F}_t\}$ *(chaque* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable) ;*

θ_t *est une fonction de* Ω *dans* Ω *;*

P_μ^s *est une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ *;*

ces éléments doivent satisfaire aux axiomes suivants :

$\boxed{\text{A 1}}$ $\theta_0 =$ identité ; $\forall s, t \geqslant 0, \quad X_s \circ \theta_t = X_{s+t}$.

$\boxed{\text{A 2}}$ *La fonction* $(x, s) \rightsquigarrow P_x^s \{X_t \in A\}$ *est* $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}_{R_+}$*-mesurable, pour tous* $t \geqslant 0$, $A \in \mathcal{E}$ *(*P_x^s *est une abréviation de* $P_{\varepsilon_x}^s$, *et* $\mathcal{B}_{R_+}$ *est la tribu des boréliens de* R_+).

$\boxed{\text{A 3}}$ $\forall s \geqslant 0, \quad \mu \in \mathcal{M}_+^1(E), \quad A \in \mathcal{E},$

on a :

$$P_\mu^s \{X_0 \in A\} = \mu(A)$$

$\boxed{\text{A 4}}$ *(propriété de Markov) :* $\forall t, u \geqslant 0$, $A \in \mathcal{E}$, *on a :*

$$P_\mu^s \{X_{t+u} \in A \mid \mathcal{F}_u\} = P_{X_u}^{s+u} \{X_t \in A\} \quad [P_\mu^s]$$

Le processus X *est dit* stationnaire *(ou homogène) si les probabilités* P_μ^s *sont indépendantes de s ; on omet alors l'indice supérieur s dans les notations ci-dessus.*

Le processus X *est dit* canonique *si l'on a :*

$$\Omega \subset E^{R_+} \quad ; \quad X_t(\omega) = \omega(t) \quad \textit{pour tout} \quad \omega \in \Omega;$$

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s;\, s \leqslant t\} \quad ; \quad \text{et} \quad \theta_t\omega = \omega(\bullet + t).$$

Les notations introduites ici diffèrent de celles de Dynkin [*1*]; la différence principale est la suivante : presque sûrement pour la mesure P_x^s, les trajectoires partent de x à l'instant 0 (et non à l'instant s); cette particularité permet d'introduire les opérateurs de translation, et d'utiliser la définition classique des temps d'arrêt, car elle évite d'avoir à considérer des tribus $\mathcal{F}_t^s$ à deux indices. L'inconvénient de cette simplification, cependant, est de cacher la différence fondamentale entre les tribus $\mathcal{F}_{s+t}^s$, lorsque s varie.

Nous désignerons dans la suite par $\mathcal{G}$ la tribu $\sigma\{X_t;\, t \geqslant 0\}$.

2. LEMME. — *Soit* Z *une fonction numérique* $\mathcal{G}$*-mesurable bornée sur* Ω*; alors* $Z \circ \theta_t$ *est aussi* $\mathcal{G}$*-mesurable; et l'on a :*

$$\text{(I,2,1)} \qquad E_\mu^s\{Z \circ \theta_t \mid \mathcal{F}_t\} = E_{X_t}^{s+t}(Z) \quad [P_\mu^s]$$

En particulier,

$$E_\mu^s(Z) = \int_E E_x^s(Z)\mu(dx).$$

Démonstration. — Ce lemme étant bien connu dans le cas stationnaire, nous en rappellerons seulement les grandes lignes. On vérifie par récurrence que (I,2,1) est vraie pour $Z = f_1 \circ X_{t_1} \dots f_n \circ X_{t_n}$, où les f_i sont $\mathcal{E}$-mesurables bornées; pour cela, on utilise la propriété de Markov $\left(\boxed{\text{A 4}}\right)$.

Le lemme s'en déduit par les méthodes classiques de prolongement par mesurabilité. $\circ\circ$

3. Propriété de Markov forte.

DÉFINITION. — *Nous dirons que le processus* X *est* fortement Markovien *si l'on a, pour tout temps d'arrêt* T *de la famille* $\{\mathcal{F}_t\}$*, et pour tous* $s \geqslant 0$, $A \in \mathcal{E}$ *:*

La démonstration du lemme suivant est analogue à celle du lemme I.2 :

LEMME. — *Soit* X *un processus fortement Markovien; Z une fonction* $\mathcal{G}$*-mesurable bornée sur* Ω.

On a alors pour tout temps d'arrêt T :

$$E^s_\mu\{ Z \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T \} = E^{s+T}_{X_T}(Z) \quad [P^s_\mu].$$

4. Remarque.

Si X est un processus « de Markov » sans axiome $\boxed{A\,4}$, tel qu'on ait pour toute variable aléatoire Z, $\mathcal{G}$-mesurable et bornée :

$$E^s_\mu(Z) = \int_E E^s_x(Z)\mu(dx),$$

X est alors Markovien (resp. fortement Markovien), dès qu'il l'est pour les mesures initiales P^s_x; ce résultat, souvent utilisé dans le cas homogène, est facile à démontrer.

5. Fonction de transition.

Soit X un processus de Markov; il est facile de voir que les opérateurs P^s_t de $\mathcal{B}(E)$ dans $\mathcal{B}(E)$, définis par :

(I,5,1) $$P^s_t f(x) = E^s_x\{ f \circ X_{t-s} \} \qquad (0 \leqslant s \leqslant t),$$

satisfont aux relations :

$\boxed{F\,T\,1}$ $\quad \forall s \geqslant 0, \qquad P^s_s = \text{Identité}.$

$\boxed{F\,T\,2}$ $\quad \forall s,\ t (0 \leqslant s \leqslant t) \qquad P^s_t 1 = 1$ [1]

$\boxed{F\,T\,3}$ $\quad \forall s, t, u (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u), \qquad P^s_t P^t_u = P^s_u.$

---

[1] On peut toujours se ramener à ce cas si l'on a seulement $P^s_t\, 1 \leqslant 1$: il suffit d'adjoindre à E un point « absorbant » $\delta \notin E$, et de poser :

$$P'^s_t = (x, A) = P^s_t(x, A \setminus \{ \delta \}) + \big(1 - P^s_t 1\big) . 1_A(\delta) \qquad \text{pour} \qquad x \in E,$$

$$P'^s_t(\delta, \{ \delta \}) = 1 \qquad \big(\text{où } P^s_t(x, A) = P^s_t 1_A(x)\big),$$

Nous appellerons *semi-groupe généralisé* (s. g. g.) sur $\mathcal{B}(E)$ une famille d'opérateurs positifs P_t^s satisfaisant à $\boxed{\text{FT 1}}$ – $\boxed{\text{FT 3}}$; un processus de Markov satisfaisant à (I,5,1) s'appelle une *réalisation* de $\{P_t^s\}$.

Le théorème suivant se démontre par les procédés classiques de construction d'un processus canonique (cf. Meyer [*1*], p. 8).

THÉORÈME. — Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace polonais muni de sa tribu borélienne; tout s. g. g. sur $\mathcal{B}(E)$, tel que la fonction $(x, s) \rightsquigarrow P_t^s 1_A(x)$ soit mesurable, pour tout $t \geqslant 0$, $A \in \mathcal{E}$, admet une réalisation canonique.

§ II. PROCESSUS ESPACE-TEMPS

1. Soit X un processus de Markov dans l'espace des états $(E, \mathcal{E})$. Nous allons construire un nouveau processus dans l'espace $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$, où

$$\tilde{E} = E \times R_+ \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}_{R_+}.$$

Posons :

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times R_+ ;$$

Pour tout $t \geqslant 0$:

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{R_+} ;$$

Pour tout $(\omega, s) \in \tilde{\Omega}$:

$$\tilde{X}_t(\omega, s) = (X_t(\omega), s + t);$$

$$\tilde{\theta}_t(\omega, s) = (\theta_t\omega, s + t) ;$$

Pour tout $(x, s) \in \tilde{E}$:

$$\tilde{P}_{(x,s)} = P_x^s \otimes \varepsilon_s \quad (\text{sur } \tilde{\mathcal{F}}_\infty);$$

enfin, pour tous $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_+^1(E)$, $\Gamma \in \tilde{\mathcal{F}}_\infty$:

$$\tilde{P}_{\tilde{\mu}}(\Gamma) = \int_{\tilde{E}} \tilde{P}_{(x,s)}(\Gamma) d\tilde{\mu}(x,s).$$

THÉORÈME. — *Le système* $\tilde{X} = (\tilde{\Omega}, \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}, \{\tilde{X}_t\}, \{\tilde{\theta}_t\}, \{\tilde{P}_{\tilde{\mu}}\})$ *est un processus de Markov stationnaire sur* $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$, *que nous appellerons* processus espace-temps *associé à* X.

La fonction de transition (homogène) $\{ Q_t \}$ [2] *de* $\tilde{X}$ *est donnée par*

$$(\mathrm{II},1,1) \qquad Q_t f(x, s) = P^s_{s+t} f_{s+t}(x)\ ;$$

où $f \in \mathcal{B}(\tilde{E})$, et $f_s = f(\bullet, s) \in \mathcal{B}(E)$.

Démonstration. — Il est immédiat que $\{ \tilde{\mathcal{F}}_t \}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$, et que $\{ \tilde{X}_t \}$ est une fonction aléatoire à valeurs dans $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$ *adaptée* à $\{ \tilde{\mathcal{F}}_t \}$.

$\tilde{P}_{\tilde{\mu}}$ est une famille de probabilités sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_\infty)$; vérifions les axiomes $\boxed{\text{A 1}}$ – $\boxed{\text{A 4}}$ (les indices supérieurs étant omis) :

$\boxed{\text{A 1}}$ est immédiat.

$\boxed{\text{A 2}}$ et $\boxed{\text{A 3}}$ se déduisent de la formule :

$$(\mathrm{II},1,2) \qquad \tilde{P}_{(x,s)}\{\tilde{X}_t \in A \times I\} = P^s_x\{ X_t \in A \}.1_I(s+t),$$

pour tous $A \in \mathcal{E}$, $I \in \mathcal{B}_{R_+}$.

$\boxed{\text{A 4}}$: vérifions d'abord que $\tilde{X}$ est Markovien pour les probabilités $\tilde{P}_{(x,s)}$; il suffit pour cela de considérer des éléments de $\tilde{\mathcal{E}}$ de la forme $A \times I$ ($A \in \mathcal{E}$, $I \in \mathcal{B}_{R_+}$).

Les égalités suivantes s'obtiennent par application répétée de la formule (II,1,2) :

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{(x,s)}\{ \tilde{X}_{t+u} \in A \times I \mid \tilde{\mathcal{F}}_u \} &= \tilde{P}_{(x,s)}\{ (\omega, s) : X_{t+u}(\omega) \in A, s+t+u \in I \mid \mathcal{F}_u \otimes \mathcal{B}_{R_+} \} \\ &= 1_I(s+t+u).P^s_x\{ X_{t+u} \in A \mid \mathcal{F}_u \} = 1_I(s+t+u).P^{s+u}_{X_u}\{ X_t \in A \} \\ &= \tilde{P}^{s+u}_{\tilde{X}_u}\{ \tilde{X}_t \in A \times I \} \quad [\tilde{P}_{(x,s)}].\end{aligned}$$

Le fait que $\tilde{X}$ est Markovien résulte alors de la remarque I.4.

La formule (II,1,1) est immédiate; $\tilde{X}$ est donc bien un processus stationnaire admettant $\{ Q_t \}$ pour fonction de transition. ⸬

Dans la suite, pour toute tribu $\mathcal{F}$ sur Ω, nous noterons $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{R_+}$.

2. Proposition. — Si X est canonique, $\tilde{X}$ l'est aussi.

Démonstration. — La définition d'un processus canonique exige seulement que $\Omega \subset E^{R_+}$; la formule définissant $\tilde{X}_t$ plonge $\tilde{\Omega}$ dans $\tilde{E}^{R_+}$; toutes les vérifications sont faciles. ⸬

---

(2) On écrit Q_t au lieu de P^s_{s+t}, pour tout s.

3. Temps d'arrêt.

PROPOSITION. — Soit $\tilde{T}(\omega, s)$ un temps d'arrêt pour la famille $\{ \tilde{\mathcal{F}}_t \}$; désignons par T_s la variable aléatoire $T_s(\omega) = \tilde{T}(\omega, s)$; T_s est alors un temps d'arrêt de $\{ \mathcal{F}_t \}$; et si $\tilde{T}$ ne dépend pas de s, on a :

$$: \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}} = \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_{R_+} \ (^3).$$

Démonstration. — *a*) Si $\tilde{T}$ est un temps d'arrêt,

$$\{ T_s \leqslant t \} = \{ \omega : \tilde{T}(\omega, s) \leqslant t \};$$

cet ensemble appartient à $\mathcal{F}_t$ comme section d'indice s de l'ensemble

$$\{ \tilde{T} \leqslant t \} \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{R_+}.$$

b) : résulte des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(A \in \mathcal{F}_T) &\Leftrightarrow (\forall t \geqslant 0,\ A \cap \{ T \leqslant t \} \in \mathcal{F}_t) \\ &\Leftrightarrow (\forall I \in \mathcal{B}_{R_+},\ \forall t \geqslant 0,\ (A \times I) \cap \{ \tilde{T} \leqslant t \} \in \tilde{\mathcal{F}}_t) \\ &\Leftrightarrow (\forall I \in \mathcal{B}_{R_+},\ A \times I \in \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}}) \quad ⸬\end{aligned}$$

4. Propriété de Markov forte.

THÉORÈME. — X *est fortement Markovien, si et seulement si* $\tilde{X}$ *est fortement Markovien.*

Démonstration. — Soit $\tilde{\Omega}_s \subset \tilde{\Omega}$ l'ensemble des (ω, s), où ω parcourt Ω; pour les mesures $\tilde{P}_{\mu\otimes\varepsilon_s}$, l'ensemble $\complement\tilde{\Omega}_s$ est négligeable; et pour tout $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty$, on a :

$$\tilde{P}^s_\mu(\Gamma) = \tilde{P}_{\mu\otimes\varepsilon_s}(\Gamma \times \{ s \}) = \tilde{P}_{\mu\otimes\varepsilon_s}(\Gamma \times R_+) ;$$

dans les égalités qui vont suivre, nous nous restreindrons à $\tilde{\Omega}_s$, et utiliserons l'isomorphisme ci-dessus entre les espaces

$$(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P^s_\mu) \qquad \text{et} \qquad (\tilde{\Omega}_s, \mathcal{F}_\infty \otimes \{ s \}, \tilde{P}_{\mu\otimes\varepsilon_s}).$$

---

(3) Cette propriété ne s'étend pas si T dépend de s; on a seulement

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}} \supset \mathcal{F}_{T_s} \otimes \{ s \} = \{ \Gamma \times \{ s \} : \Gamma \in \mathcal{F}_{T_s} \}, \quad \text{pour tout} \quad s \geqslant 0.$$

a) Supposons $\tilde{X}$ fortement Markovien; soit T un temps d'arrêt de $\{ \mathcal{F}_t \}$. On a :

$$\begin{aligned} P^s_\mu \{ X_{T+u} \in A \mid \mathcal{F}_T \}(\omega, s) &= \tilde{P}_{\mu \otimes \varepsilon_s} \{ \tilde{X}_{\tilde{T}+u} \in A \times R_+ \mid \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_{R_+} \}(\omega, s) \\ &= \tilde{P}_{\tilde{X}_{\tilde{T}(\omega,s)}} \{ \tilde{X}_u \in A \times R_+ \} = \tilde{P}_{(X_T, s+T)(\omega,s)} \{ X_u \in A \times R_+ \} \\ &= P^{s+T(\omega)}_{X_{T(\omega)}} \{ X_u \in A \} \quad [P^s_\mu] \text{ ou } [P_{\mu \otimes \varepsilon_s}] \quad \text{sur} \quad \Omega \sim \tilde{\Omega}_s. \end{aligned}$$

X est donc fortement Markovien.

b) Supposons X fortement Markovien; soit $\tilde{T}$ un temps d'arrêt de $\{ \tilde{\mathcal{F}}_t \}$.

Restreignons-nous de nouveau à $\tilde{\Omega}_s$; nous avons :

$$\begin{aligned} &\tilde{P}_{(x,s)} \{ \tilde{X}_{\tilde{T}+u} \in A \times I \mid \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}} \}(\omega, s) \\ &\qquad = P^s_x \{ X_{T_s+u} \in A, T_s + u + s \in I \mid \mathcal{F}_{T_s} \}(\omega) \quad [\tilde{P}_{(x,s)}] \end{aligned}$$

En effet, $\forall \Gamma \in \mathcal{F}_{T_s}$, $\Gamma \times \{ s \} \in \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}}$; on voit, en revenant à la définition des espérances conditionnelles, que les deux membres de l'équation ci-dessus coïncident $\tilde{P}_{(x,s)}$-presque sûrement sur $\tilde{\Omega}_s$.

D'où :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{(x,s)} \{ \tilde{X}_{\tilde{T}+u} \in A \times I \mid \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{T}} \}(\omega, s) &= P^{s+T_s}_{X_{T_s}} \{ X_u \in A, T_s + u + s \in I \}(\omega) \\ &= \tilde{P}_{(X_{T_s}, s+T_s)(\omega,s)} \{ \tilde{X}_u \in A \times I \} = \tilde{P}_{\tilde{X}_{\tilde{T}(\omega,s)}} \{ \tilde{X}_u \in A \times I \}, \end{aligned}$$

$\tilde{P}_{(x,s)}$- ou P^s_x-presque sûrement sur $\tilde{\Omega}_s \sim \Omega$.

Le théorème en résulte, d'après I.4. ⁂

5. **Propriété de Blumenthal.**

Nous dirons qu'un processus X a la propriété de Blumenthal si, pour toute mesure initiale μ, pour tout $s \geqslant 0$, et pour toute suite (T_n) de temps d'arrêt tendant *en croissant* vers un temps d'arrêt T, on a :

$$X_{T_n}(\omega) \to X_T(\omega), \; P^s_\mu - \text{p. s. sur l'ensemble } \{ T < \infty \}.$$

THÉORÈME. — $\tilde{X}$ *a la propriété de Blumenthal, si et seulement si* X *a la propriété de Blumenthal.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer la propriété pour les mesures initiales ponctuelles. Supposons que X ait la propriété de Blumenthal; soit $(\tilde{T}^n)$ une suite de temps d'arrêt de $\{ \tilde{\mathcal{F}}_t \}$, telle que $\tilde{T}^n \nearrow \tilde{T}$.

On a, $\tilde{\mathrm{P}}_{(x,s)}$-p. s. sur $\tilde{\Omega}_s \cap \{ \tilde{\mathrm{T}} < \infty \}$:

$$\lim_n (\tilde{\mathrm{X}}_{\tilde{\mathrm{T}}^n}(\omega, s)) = \lim_n \left(\mathrm{X}_{\mathrm{T}_s^n}(\omega), s + \mathrm{T}_s^n(\omega)\right)$$
$$= (\mathrm{X}_{\mathrm{T}_s}(\omega), s + \mathrm{T}_s(\omega)) = \tilde{\mathrm{X}}_{\tilde{\mathrm{T}}}(\omega, s).$$

$\tilde{\mathrm{X}}$ possède donc la propriété de Blumenthal; la réciproque étant évidente, le théorème est démontré. ⸬

§ III. FONCTIONS DE TRANSITION

1. Supposons que E soit un espace localement compact.

Nous considérons sur E un s. g. g. $\{ \mathrm{P}_t^s \}$ satisfaisant aux axiomes $\boxed{\mathrm{F\,T\,1}}$ – $\boxed{\mathrm{F\,T\,3}}$; le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que le semi-groupe $\{ \mathrm{Q}_t \}$, défini au n° II.1, formule (II,1,1), soit Fellérien.

THÉORÈME. — *Pour que* $\{ \mathrm{Q}_t \}$ *soit un semi-groupe de Feller sur* $\mathcal{C}_0(\tilde{\mathrm{E}})$, *il faut et il suffit que pour toute* $f \in \mathcal{C}_0^+(\mathrm{E})$, *les conditions suivantes soient réalisées :*

$\boxed{\mathrm{F\,1}}$ $$\forall (s, x) : \lim_{t \downarrow 0} \mathrm{P}_{s+t}^s f(x) = f(x).$$

$\boxed{\mathrm{F\,2}}$ *Pour tout* $t \geqslant 0$, *la fonction* $(x, s) \rightsquigarrow \mathrm{P}_{s+t}^s f(x)$ *est continue.*

$\boxed{\mathrm{F\,3}}$ *Pour tout* $t \geqslant 0$, *la fonction* $\mathrm{P}_{s+t}^s f$ *tend vers* 0 *à l'infini, uniformément en* s *sur tout compact de* R_+.

(La condition $\boxed{\mathrm{F\,3}}$ *est superflue si* E *est compact).*

Démonstration. — Il est assez facile de vérifier que les conditions sont nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. Soit $f \in \mathcal{C}_0^+(\tilde{\mathrm{E}})$. Nous utiliserons le fait que f est uniformément continue, ce qui entraîne que $\lim_{\to 0} f_{s+t} = f_s$ *uniformément* en x. Il suffit de vérifier que pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{Q}_t f \in \mathcal{C}_0(\tilde{\mathrm{E}})$, et pour tout $(x, s) \in \tilde{\mathrm{E}}$, $\lim_{t \downarrow 0} \mathrm{Q}_t f(x, s) = f(x, s)$; ces conditions sont en effet suffisantes pour que le semi-groupe $\{ \mathrm{Q}_t \}$ soit Fellérien (cf. Meyer [*1*], p. 25).

a) Montrons que $\mathrm{Q}_t f$ est une fonction continue :

$$\mathrm{Q}_t f(y, s) - \mathrm{Q}_t f(x, u) = \mathrm{P}_{s+t}^s f_{s+t}(y) - \mathrm{P}_{u+t}^u f_{u+t}(x)$$
$$= \mathrm{P}_{s+t}^s (f_{s+t} - f_{u+t})(y) + \left(\mathrm{P}_{s+t}^s f_{u+t}(y) - \mathrm{P}_{u+t}^u f_{u+t}(x)\right)$$

Cette expression tend vers 0 lorsque $(y, s) \to (x, u)$: cela vient pour le premier terme, de la convergence uniforme de f_{s+t} vers f_{u+t}; et pour le deuxième terme de la condition $\boxed{\mathrm{F}\ 2}$.

b) Montrons maintenant que $\mathrm{Q}_t f \in \mathcal{C}_0^+(\tilde{\mathrm{E}})$.

Soit $\varepsilon > 0$; il faut trouver un compact $\tilde{\mathrm{K}}$ de $\tilde{\mathrm{E}}$, par exemple de la forme $\tilde{\mathrm{K}} = \mathrm{K} \times [0, \mathrm{M}]$ (K compact de E), tel que :

$$(x, s) \in \complement \tilde{\mathrm{K}} \Rightarrow \mathrm{Q}_t f(x, s) \leqslant \varepsilon.$$

Comme $f \in \mathcal{C}_0^+(\tilde{\mathrm{E}})$, il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que

(III, 1, 1) $$s \geqslant \mathrm{M} \Rightarrow \sup_x f(x, s) \leqslant \varepsilon \text{ (i. e. } \| f_s \| \leqslant \varepsilon).$$

Considérons la fonction $f'(x) = \sup\limits_{s \leqslant \mathrm{M}} f(x, s)$. La continuité de f' résulte du lemme suivant :

Lemme. — *Soit f une fonction $\geqslant 0$, continue sur* $\mathrm{E} \times [0, \mathrm{M}]$*; la fonction* $f'(x) = \sup\limits_{s \leqslant \mathrm{M}} f(x, s)$ *est continue ; et f' tend vers* 0 *à l'infini s'il en est de même des f_s* $(s \leqslant \mathrm{M})$.

Démonstration. — Lorsque f est de la forme particulière

$$f(x, s) = a(x) . b(s),$$

où a et b sont des fonctions $\geqslant 0$ continues, le lemme est immédiat, car

$$f'(x) = a(x) . \sup_s b(s).$$

Dans le cas général, on conclut par approximation uniforme de combinaisons linéaires des $a(x) . b(s)$.

Pour la deuxième phrase du lemme, on considère le compactifié d'Alexandroff $\mathrm{E} \cup \{ \delta \}$ de E, et on pose $f_s(\delta) = 0$, $\forall s \leqslant \mathrm{M}$. ⁘

D'après ce lemme, on a $f' \in \mathcal{C}_0^+(\mathrm{E})$; la condition $\boxed{\mathrm{F}\ 3}$ entraîne alors l'existence d'un compact K, tel que :

$$x \in \complement \mathrm{K} \Rightarrow \mathrm{P}_{s+t}^s f'(x) \leq \varepsilon \qquad \forall s \leqslant \mathrm{M} - t.$$

Soit $\tilde{\mathrm{K}} = \mathrm{K} \times [0, \mathrm{M} - t]$; si $(x, s) \in \complement \tilde{\mathrm{K}}$, alors :

— ou bien $s \geqslant \mathrm{M} - t$, d'où

$$\mathrm{Q}_t f(x, s) = \mathrm{P}_{s+t}^s f_{s+t}(x) \leqslant \| f_{s+t} \| \leqslant \varepsilon \text{ d'après (III, 1, 1),}$$

— ou bien $s \leqslant M - t$ et $x \in \complement K$, d'où

$$Q_t f(x, s) = P^s_{s+t} f_{s+t}(x) \leqslant P^s_{s+t} f'(x) \leqslant \varepsilon.$$

En conclusion, $f \in \mathcal{C}_0(\tilde{E}) \Rightarrow Q_t f \in \mathcal{C}_0(\tilde{E})$.

c) Fixons $(x, s) \in \tilde{E}$:

$$\begin{aligned} Q_t f(x, s) - f(x, s) &= P^s_{s+t} f_{s+t}(x) - f_s(x) \\ &= P^s_{s+t}(f_{s+t} - f_s)(x) + \left(P^s_{s+t} f(x) - f(x)\right) ; \end{aligned}$$

cette expression tend vers 0 lorsque t tend vers 0 : pour le premier terme, ceci résulte de la convergence uniforme de f_{s+t} vers f_s; pour le deuxième terme, c'est la condition $\boxed{\text{F 1}}$. ⁘

2. Théorème. — *Soient* E *un espace L. C. D.* [4], $\{ P^s_t \}$ *un s.g.g. satisfaisant aux conditions* $\boxed{\text{F 1}}$, $\boxed{\text{F 2}}$, $\boxed{\text{F 3}}$ *du théorème précédent* ($\boxed{\text{F 1}}$ *et* $\boxed{\text{F 2}}$ *si* E *est compact*).

Il existe alors un processus de Markov X *sur* E, *admettant* $\{ P^s_t \}$ *comme fonction de transition, ayant les propriétés suivantes :*

— X *est fortement Markovien*;

— *la famille des tribus* $\{ \mathcal{F}_t \}$ *est continue à droite ;*

— *les trajectoires de* X *sont continues à droite et pourvues de limites à gauche ;*

— X *a la propriété de Blumenthal.*

Démonstration. — Le semi-groupe $\{ Q_t \}$ est alors Fellérien sur $\tilde{E}$; nous allons utiliser les résultats classiques de la théorie des processus stationnaires (cf. Dynkin [*2*], chap. III, Meyer [*1*] et la note de la p. 177).

Soit $X' = \left(\Omega', \{ X'_t \}, \{ \mathcal{F}'_t \}, \{ \theta'_t \}, \{ P'_{\tilde{\mu}} \}\right)$ une réalisation canonique de Q_t, telle que $\Omega' = \tilde{E}^{R_+}$. Nous allons progressivement transformer le processus X′, pour en faire un processus $\tilde{X}$, équivalent à X′, tel que $\tilde{X}$ ait toutes les propriétés exigées, et soit le processus espace-temps associé à un certain processus non stationnaire, X, sur E.

D'après les résultats du § II, ceci entraînera que X est une réalisation de $\{ P^s_t \}$ ayant les bonnes propriétés, et achèvera la démonstration.

a) Restriction de X′ à l'espace Ω″ des fonctions de $\tilde{E}$ dans R_+, continues

---

[4] Localement compact à base dénombrable.

à droite et pourvues de limites à gauche en tout point; on sait que Ω'' a une probabilité extérieure 1 pour tous les $P'_{\tilde{\mu}}$ $\left(\tilde{\mu} \in \mathcal{M}^1_+(\tilde{E})\right)$.

b) Restriction du nouveau processus à l'espace $\tilde{\Omega}$, défini par :

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \tilde{\omega} \in \Omega'' : \forall t \geqslant 0,\ pr_{R_+}(X'_t(\tilde{\omega})) = pr_{R_+}(X'_0(\tilde{\omega})) + t \right\} ;$$

nous allons montrer que $\tilde{\Omega}$ est de probabilité intérieure 1 pour tous les $P'_{(x,s)}$; ceci entraînera que $\tilde{\Omega}$ est de probabilité extérieure 1 pour tous les $P'_{\tilde{\mu}}$.

Soit I un borélien de R_+ ; nous avons :

$$\begin{aligned} P'_{(x,s)}\left\{ pr_{R_+}(X'_t) \in I \right\} &= P'_{(x,s)}\left\{ X'_t \in E \times I \right\} = Q_t(1_{E \times I})(x, s) \\ &= 1_I(s + t) . P^s_{s+t}(x, E) = 1_I(s + t). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \geqslant 0$, $P'_{(x,s)}\ \left\{ pr_{R_+}(X'_t) = s + t \right\} = 1$; d'où

$$P'_{(x,s)}\left\{ \forall t \text{ rationnel} \geqslant 0 : pr_{R+}(X'_t) = s + t \right\} = 1 ;$$

et par continuité à droite des trajectoires :

$$P'_{(x,s)}\left\{ \forall t \geqslant 0 : pr_{R_+}(X'_t) = s + t \right\} = 1$$

D'où enfin :

$$[P'_{(x,s)}]_*(\tilde{\Omega}) = P'_{(x,s)}\left\{ pr_{R_+}(X'_0) = s \quad \text{et} \quad pr_{R_+}(X'_t) = s + t \text{ pour tout } t \right\} = 1.$$

c'est le résultat cherché.

c) $\tilde{\Omega}$ est alors de la forme $\Omega \times R_+$, où $\Omega \subset E^{R_+}$ est l'image de $\tilde{\Omega}$ par l'application qui à tout $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, fait correspondre $\omega \in E^{R_+}$, tel que :

$$\omega(t) = Pr_E(X'_t(\tilde{\omega})) :$$

on a

$$\tilde{\omega} = [\omega, pr_{R_+}(X'_0(\tilde{\omega}))].$$

$\mathcal{F}'_t$ vaut alors $\mathcal{F}^0_t \otimes \mathcal{B}_{R_+}$, où $\left\{ \mathcal{F}^0_t \right\}$ est la famille des tribus canoniques sur Ω.

Le processus définitif $\tilde{X}$ se déduit du précédent en remplaçant les tribus $\mathcal{F}'_t$ par les tribus $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}'_{t^+}$.

$\tilde{X}$ possède alors toutes les propriétés exigées (5); de plus, $\tilde{X}$ est le processus espace-temps associé à un processus X sur E, dont l'espace des trajectoires est Ω, et dont les tribus $\mathcal{F}_t$ sont les $\mathcal{F}^0_{t+}$ (donc continues à droite) : les vérifications sont automatiques, et le théorème est démontré. ⸬

3. REMARQUE

Dynkin [*1*] établit le résultat suivant : soit E un espace L. C. D., X un processus de Markov non stationnaire sur E, *continu à droite*; si la fonction de transition $\{ P^s_t \}$ de X est telle que :

(D) pour tous $x \in E$, $0 \leqslant u < t$, $f \in \mathcal{C}(E)$:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ s \downarrow u}} P^s_t f(y) = P^u_t f(x) \,;$$

alors X est fortement Markovien.

Soit (D_0) la condition (D), restreinte aux $f \in \mathcal{C}_0(E)$; il est facile de voir qu'un s. g. g. satisfaisant à $\boxed{F\,1}$, $\boxed{F\,2}$, $\boxed{F\,3}$, vérifie (D_0) : on considère le semi-groupe $\{ Q_t \}$, qui est de Feller, et on prend une fonction de la forme :

$$\tilde{f}(x, s) = f(x) . a(s),$$

où a est un élément de $\varphi_0(R_+)$, tel que $a(t) = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] E. B. DYNKIN, *Théorie des processus de Markov*. Dunod, 1963.
[*2*] E. B. DYNKIN, *Markov processes*. Springer-Verlag, 1965.
[*3*] P.-A. MEYER, *Processus de Markov*. Lecture notes *in Mathematics*, Springer-Verlag, 1967.

Reçu le 27 février 1968.

---

(5) D'après le résultat suivant, qu'on peut extraire de Meyer ([*1*]) en adaptant certaines démonstrations :

THÉORÈME — Soit $\{ P_t \}$ un semi-groupe de Feller sur $\mathcal{C}_0(E)$; considérons une réalisation canonique Y′ de $\{ P_t \}$, dont l'espace des trajectoires est E^{R_+}.

Soit Y le processus déduit de Y′ en restreignant l'ensemble des trajectoires aux fonctions continues à droite et pourvues de limites à gauche, et en remplaçant les tribus $\mathcal{F}_t$ par les $\mathcal{F}_{t+}$; alors, Y est encore une réalisation de $\{ P_t \}$, Y est fortement Markovien et possède la propriété de Blumenthal.