

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

TON-THAT-LONG

Représentations canoniques des processus gaussiens

Annales de l'I. H. P., section B, tome 4, n° 3 (1968), p. 179-191

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1968__4_3_179_0

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Représentations canoniques des processus gaussiens

par

TON-THAT-LONG

Calcul des probabilités,
Institut Henri Poincaré, Paris.

SUMMARY. — In this paper we will discuss the canonical representation of the gaussian process $(x_t)_{t \in T}$. In the first part, we generalize the main results of Lévy and Hida, we suppose here that T is a measure space and we introduce the new notion of « support of a representation ».

In the second part, we consider a problem of Lévy in which T is the unit interval $]0,1[$ and the kernel of the representation has a particular form and this lead us to a new problem on an ordered group G . We obtain the solution of this problem by an analysis of the Hardy space $H^2(G')$, G' is the dual group of G .

L'étude des représentations canoniques des processus gaussiens $(X_t)_{t \in T}$ a été faite par P. Lévy et par Hida. Dans cette note, on généralise les résultats de Lévy et Hida au cas où le paramètre t décrit un espace mesuré quelconque T et cela grâce à l'introduction de la notion de support d'une représentation. On étudie ensuite, un autre problème particulier où T est un semi-groupe maximal d'un groupe localement compact G . La solution de ce dernier problème est obtenue par l'analyse de l'espace Hardy $H^2(G')$, G' étant le dual de G .

Ces résultats, qui ont été obtenus au 1^{er} semestre de l'année scolaire 1966-1967, font partie d'une thèse de 3^e cycle à la Faculté des Sciences de Paris.

I. PROBLÈMES DES REPRÉSENTATIONS CANONIQUES

I.1. Soit G un groupe localement compact, m la mesure de Haar normalisée sur G , \mathcal{F}_G la σ -algèbre borélienne sur G . Pour $E \in \mathcal{F}_G$ on note \mathcal{F}_E la σ -algèbre formée des éléments de \mathcal{F}_G contenus dans E et on note encore m , la restriction de m à \mathcal{F}_E .

I.1.1. DÉFINITION. — On appelle support sur E , toute famille $\mathcal{F}(E)$ totalement ordonnée par inclusion d'éléments de \mathcal{F}_E telle que $E \in \mathcal{F}(E)$. Le support $\mathcal{F}(E)$ est dense si $\mathcal{F}(E)$ engendre la σ -algèbre \mathcal{F}_E .

Dans le cas où G est un groupe ordonné, la famille $(A_t)_{t \in E}$ telle que $A_t = \{x/x \in E, x \leq t\}$ constitue un support sur E dit support de P. Lévy.

I.1.2. DÉFINITION. — On appelle mesure brownienne sur E , toute isométrie \mathcal{B} de $L^2(E, \mathcal{F}_E, m)$ dans un espace gaussien centré H d'un certain espace $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour l'existence d'une telle mesure il suffit de prendre une base orthonormale $(h_i)_{i \in I}$ de $L^2(E, \mathcal{F}_E, m)$ et une famille orthonormale $(k_i)_{i \in I}$ dans H et alors on définit \mathcal{B} par :

$$\mathcal{B}(X) = \sum_{i \in I} a_i k_i \quad \text{pour tout} \quad X = \sum_{i \in I} a_i h_i \in L^2(E, \mathcal{F}_E, m); \quad \sum_{i \in I} |a_i|^2 < \infty$$

Dans la suite on utilise les diverses notations suivantes pour désigner la valeur $\mathcal{B}(X)$: $\mathcal{B}(X)$ ou $\int X d\mathcal{B}$ ou $\int X(u) d\mathcal{B}(u)$.

I.1.3. DÉFINITION. — On appelle noyau sur E , toute fonction F définie sur $E \times E$ telle que $F_t \in L^2(E, \mathcal{F}_E, m)$ pour $\forall t \in E$, F_t étant définie par

$$F_t(u) = F(t, u).$$

I.1.4. DÉFINITION. — Un processus gaussien centré $(X_t)_{t \in E}$ est dit représentable relativement au support $\mathcal{F}(E)$ s'il existe une mesure brownienne \mathcal{B} , un noyau F sur E tels que :

$$X_t = \mathcal{B}(F_t) = \int F_t d\mathcal{B} = \int F(t, u) d\mathcal{B}(u)$$

et tels que $F_t \in L^2(A, \mathcal{F}_A, m)$ chaque fois que $t \in A \in \mathcal{F}(E)$.

Dans la suite, on utilise la notation $((X_t)_{t \in E}, \mathcal{B}, F, \mathcal{F}(E))$ pour désigner la représentation considérée.

I.1.5. DÉFINITION. — La covariance K d'un processus centré $(X_t)_{t \in E}$ est la fonction définie sur $T \times T$ par :

$$K(s, t) = E(X_s \bar{X}_t) = \int X_s \bar{X}_t dP$$

Si ce processus est représentable relativement au support $\mathcal{F}(E)$, cette covariance est donnée par :

$$K(s, t) = E(X_s \bar{X}_t) = \int F_s \bar{F}_t dm = \int F(s, u) \cdot \overline{F(t, u)} dm(u)$$

et cela résulte de la définition de la mesure \mathcal{B} .

I.1.6. DÉFINITION. — Soit $(X_t)_{t \in E}$ un processus gaussien centré. Pour tout $A \in \mathcal{F}_E$ on pose :

\mathcal{M}_A = sous espace de H engendré par $X_t, t \in A$.

$$\mathcal{M}_A(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(L^2(A, \mathcal{F}_A, m))$$

I.2.1. THÉORÈME. — Pour toute représentation $((X_t)_{t \in E}, \mathcal{B}, F, \mathcal{F}(E))$ on a :

$$\mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}_A(\mathcal{B}) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{F}(E)$$

Cela est en effet une conséquence de I.1.4. et de I.1.6.

I.2.2. DÉFINITION. — Une représentation $((X_t)_{t \in E}, \mathcal{B}, F, \mathcal{F}(E))$ (donc aussi son noyau) est dite canonique si on a :

$$\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_A(\mathcal{B}) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{F}(E)$$

I.2.3. DÉFINITION. — Deux représentations $((X_t)_{t \in E}, \mathcal{B}_i, F_i, \mathcal{F}(E))$ $i = 1, 2$ (donc aussi leurs noyaux) sont dites équivalentes si on a :

$$\int_A |F_1(t, u)|^2 dm(u) = \int_A |F_2(t, u)|^2 dm(u) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{F}(E)$$

On peut alors préciser la notion d'équivalence par le théorème :

I.2.4. THÉORÈME. — Deux noyaux $F_i, i = 1, 2$ (donc aussi les représentations correspondantes) sont équivalentes si et seulement si :

$$E(|F_{1t}|^2 / \mathcal{A}(\mathcal{F}(E))) = E(|F_{2t}|^2 / \mathcal{A}(\mathcal{F}(E))) \quad \text{pour } \forall t \in E$$

$E(./\mathcal{A}(\mathcal{F}(E)))$ étant l'opérateur de l'espérance conditionnelle par rapport à la σ -algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{F}(E))$ engendrée par $\mathcal{F}(E)$.

En particulier si $\mathcal{F}(E)$ est dense, cela veut dire que :

$$F_1(t, u) = \varepsilon(t, u)F_2(t, u)$$

où ε est une fonction partiellement mesurable par rapport à la variable u et telle que $|\varepsilon| = 1$.

En effet, si on pose que :

$$\mathcal{C}(E) = \left\{ A \in \mathcal{F}_E : \int_A |F_1(t, u)|^2 dm(u) = \int_A |F_2(t, u)|^2 dm(u) \right\}$$

alors $\mathcal{C}(E)$ contient l'ensemble vide, fermé pour la réunion finie des éléments deux à deux disjoints. Il contient aussi $\mathcal{F}(E)$ par l'hypothèse et par suite contient E et des éléments A tels que $E - A \in \mathcal{F}(E)$, car on a :

$$\begin{aligned} \int_A |F_1(t, u)|^2 dm(u) &= \int_E |F_1(t, u)|^2 dm(u) - \int_{E-A} |F_1(t, u)|^2 dm(u) \\ &= \int_E |F_2(t, u)|^2 dm(u) - \int_{E-A} |F_2(t, u)|^2 dm(u) \\ &= \int_A |F_2(t, u)|^2 dm(u) \end{aligned}$$

D'autre part si $A_1, A_2 \in \mathcal{F}(E)$ et $A_2 \subset A_1$ alors $A_1 \cap (E - A_2) \in \mathcal{C}(E)$ car on a :

$$\begin{aligned} \int_{A_1 \cap (E - A_2)} |F_1(t, u)|^2 dm(u) &= \int_{A_1} |F_1(t, u)|^2 dm(u) - \int_{A_2} |F_1(t, u)|^2 dm(u) \\ &= \int_{A_1} |F_2(t, u)|^2 dm(u) - \int_{A_2} |F_2(t, u)|^2 dm(u) = \int_{A_1 \cap (E - A_2)} |F_2(t, u)|^2 dm(u) \end{aligned}$$

et puisque $\mathcal{F}(E)$ est totalement ordonné on voit ainsi que $\mathcal{C}(E)$ contient des intersections finies des éléments A tels que A ou $E - A \in \mathcal{F}(E)$.

Tout cela montre que, d'après le théorème de prolongement des mesures, $\mathcal{C}(E)$ contient la σ -algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{F}(E))$ et le reste du théorème est une conséquence du théorème de Radon-Nikodym.

Pour l'unicité des représentations, nous avons besoin du lemme suivant :

I.2.5. LEMME. — Si H_1 est un sous-espace fermé d'un espace gaussien H alors la restriction à H de l'espérance conditionnelle par rapport à la σ -algèbre $\mathcal{A}(H_1)$ engendrée par les éléments de H_1 coïncide avec la projection orthogonale de H sur H_1 .

En effet H_1 et $H_2 = H \ominus H_1$ sont orthogonaux et par conséquent $\mathcal{A}(H_1)$ et $\mathcal{A}(H_2)$ sont indépendantes. Soit alors $X_2 \in H_2$; l'indépendance des $\mathcal{A}(H_i)$ nous donne, pour tout $A \in \mathcal{A}(H_1)$

$$\int_A X_2 dP = \int 1_A \cdot X_2 dP = \int 1_A dP \cdot \int X_2 dP = P(A) \cdot \int X_2 dP = 0$$

car X_2 est une variable centrée. Ainsi on a $E(X_2/\mathcal{A}(H_1)) = 0$ et alors pour un élément $X = X_1 + X_2 \in H$, $X_i \in H_i$, on a :

$$E(X/\mathcal{A}(H_1)) = E(X_1/\mathcal{A}(H_1)) + E(X_2/\mathcal{A}(H_1)) = E(X_1/\mathcal{A}(H_1)) = X_1$$

et cela achève la démonstration du lemme.

I.2.6. THÉORÈME. — Si la représentation $((X_t)_{t \in E}, \mathcal{B}, F, \mathcal{F}(E))$ est canonique, pour tout élément A du support, on a :

$$E(X_t/\mathcal{A}(\mathcal{M}_A)) = \int 1_A(u)F(t, u)d\mathcal{B}(u) = \mathcal{B}(1_A F_t)$$

En effet d'après le lemme précédent on a :

$$E(X_t/\mathcal{A}(\mathcal{M}_A)) = \text{projection de } X_t \text{ sur } \mathcal{M}_A$$

et alors la canonicité nous donne :

$$E(X_t/\mathcal{A}(\mathcal{M}_A)) = \text{projection de } X_t \text{ sur } \mathcal{M}_A(\mathcal{B})$$

Or \mathcal{B} étant une isométrie et $\mathcal{M}_A(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(L^2(A, \mathcal{F}_A, m))$, on a donc :

$$\begin{aligned} E(X_t/\mathcal{A}(\mathcal{M}_A)) &= \mathcal{B}(\text{projection de } \mathcal{B}^{-1}(X_t) \text{ sur } L^2(A, \mathcal{F}_A, m)) \\ &= \mathcal{B}(\text{projection de } F_t \text{ sur } L^2(A, \mathcal{F}_A, m)) = \mathcal{B}(1_A F_t) \end{aligned}$$

I.2.7. THÉORÈME. — Si la représentation $((X_t)_{t \in E}, \mathcal{B}, F, \mathcal{F}(E))$ (donc aussi son noyau) est canonique, elle est définie à une équivalence près.

En effet, si les représentations $((X_t)_{t \in E}, \mathcal{B}_i, F_i, \mathcal{F}(E))$ $i = 1, 2$ sont canoniques, le théorème précédent nous donne :

$$\|E(X_t/\mathcal{A}(\mathcal{M}_A))\| = \|\mathcal{B}(1_A F_{it})\| = \|1_A F_{it}\| \quad \text{pour } A \in \mathcal{F}(E)$$

Cette relation est vraie pour $i = 1$ et $i = 2$, on a donc :

$$\int_A |F_1(t, u)|^2 dm(u) = \|1_A F_{1t}\|^2 = \|1_A F_{2t}\|^2 = \int_A |F_2(t, u)|^2 dm(u)$$

et cela démontre bien l'unicité de la représentation.

Le théorème suivant nous donne des conditions de canonicité :

I.2.8. THÉOREME. — La représentation $((X_t)_{t \in E}, \mathcal{B}, F, \mathcal{F}(E))$ (donc aussi son noyau) est canonique si et seulement si, pour tout élément A du support $\mathcal{F}(E)$, la famille $(F_t)_{t \in A}$ engendre l'espace $L^2(A, \mathcal{F}_A, m)$. Cette condition est aussi équivalente à la suivante : « Pour tout $A \in \mathcal{F}(E)$, la relation :

$$\int_A F(t, u)h(u)dm(u) = 0 \quad \text{pour tout } t \in A$$

entraîne la relation $1_A h = 0$ ».

La première partie résulte de ce que \mathcal{B} est une isométrie, $(X_t)_{t \in A}$ engendre \mathcal{M}_A , $F_t = \mathcal{B}^{-1}(X_t)$ et que la représentation est canonique si et seulement si $\mathcal{M}_A = \mathcal{B}(L^2(A, \mathcal{F}_A, m))$ pour $A \in \mathcal{F}(E)$.

La deuxième partie résulte de ce que la relation :

$$\int_A F(t, u)h(u)dm(u) = 0 \quad \text{pour tout } t \in A$$

veut dire que $1_A h$ est orthogonal à la famille $(F_t)_{t \in A}$ donc aussi à l'espace engendré par cette famille et alors la condition $1_A h = 0$ s'exprime en disant que $(F_t)_{t \in A}$ engendre $L^2(A, \mathcal{F}_A, m)$.

I.3. Notons que dans la partie précédente on n'utilise pas encore la structure algébrique du groupe G . Cette partie est donc encore vraie si on remplace (E, \mathcal{F}_E, m) par un espace de mesure quelconque. Notons aussi que dans le problème initial de P. Lévy, l'intégrale brownienne est définie à partir d'un mouvement brownien et cela est lié à la propriété d'ordre de \mathbb{R} . De même pour la condition de canonicité. Dans cette note on remplace ces propriétés d'ordre par l'introduction de la notion de support.

II. UN PROBLÈME SUR LES GROUPES ORDONNÉS

II.1. Le problème sur les groupes ordonnés qu'on va étudier a pour origine le problème suivant posé par P. Lévy :

II.1.1. Soit \mathcal{B} une mesure brownienne sur $E = (0,1)$ considéré comme un sous-ensemble de groupes additif \mathbb{R} des réels. Soit $\mathcal{F}(E)$ le support de P. Lévy correspondant et soit F un noyau de la forme :

$$F(t, u) = f\left(\frac{u}{t}\right) \quad \text{si } u < t, f \in L^2(E, \mathcal{F}_E, du) \\ = 0 \quad \text{si } u \geq t$$

et considérons le processus $(X_t)_{t \in E}$ défini par :

$$X_t = \int F(t, u) d\mathcal{B}(u) = \int_0^t f\left(\frac{u}{t}\right) d\mathcal{B}(u) = \int 1_{(0,t)}(u) f\left(\frac{u}{t}\right) d\mathcal{B}(u)$$

La covariance de ce processus est donnée par :

$$K(s, t) = \int 1_{(0,s)}(u) \cdot f\left(\frac{u}{s}\right) \cdot \overline{1_{(0,t)}(u) \cdot f\left(\frac{u}{t}\right)} du = \int_0^{\min(s,t)} f\left(\frac{u}{t}\right) \overline{f\left(\frac{u}{s}\right)} du$$

et on se demande ici, dans la canonicité, de déterminer le noyau F , donc f , à partir de la covariance de K .

II.1.2. Pour résoudre le problème posé, on peut supposer que $E =]0,1)$ est semi-ouvert à gauche, semi-fermé à droite (et cela ne change pas le problème car tout point de \mathbb{R} est de mesure nulle) et alors on peut considérer $E =]0,1)$ comme un semi-groupe maximal du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+ \setminus \{0, \infty\}$. D'autre part on peut prolonger f en une fonction définie sur \mathbb{R}^+ en posant $f(u) = 0$ si $u > 1$ et alors on a :

$$\begin{aligned} K(s, t) &= \int_0^{\min(s,t)} f\left(\frac{u}{s}\right) \overline{f\left(\frac{u}{t}\right)} du = \int_{\mathbb{R}^+} f\left(\frac{u}{s}\right) \overline{f\left(\frac{u}{t}\right)} du \\ &= (st)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^+} [f(us^{-1}) \cdot (us^{-1})^{1/2}] \overline{[f(ut^{-1}) \cdot (ut^{-1})^{1/2}]} \frac{du}{u} \end{aligned}$$

et par conséquent si on pose :

$$K'(s, t) = (st)^{-1/2} K(s, t) \quad \text{et} \quad f'(u) = f(u)u^{1/2},$$

on a :

$$K'(s, t) = \int_{\mathbb{R}^+} f'(us^{-1}) \overline{f'(ut^{-1})} dm(u)$$

où $dm(u)$ est la mesure de Haar sur le groupe multiplicatif \mathbb{R}^+ .

II.1.3. THÉORÈME. — K' peut être considéré comme covariance d'une certaine représentation canonique $((X'_t)_{t \in E}, \mathcal{B}', F', \mathcal{F}(E))$ où $E =]0,1)$, est considéré comme un sous-ensemble du groupe multiplicatif \mathbb{R}^+ . De plus cette représentation est stationnaire et cela veut dire que le noyau est une fonction d'une seule variable $h = ut^{-1}$ et alors la covariance est une fonction de la seule variable $h = st^{-1}$.

En effet, d'après la relation précédente, il suffit de prendre une mesure

brownienne \mathcal{B}' quelconque sur le semi-groupe multiplicatif E , de prendre :

$$F'(t, u) = f'(ut^{-1}) \quad \text{et} \quad X'_t = \int F'(t, u) d\mathcal{B}'(u) = \int f'(ut^{-1}) d\mathcal{B}'(u)$$

La représentation considérée est canonique d'après la relation :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{A}} F'(t, u) h(u) dm(u) &= \int_{\mathbf{A}} f'(ut^{-1}) h(u) \frac{du}{u} = t^{-1/2} \int_{\mathbf{A}} f'(ut^{-1}) h(u) u^{-1/2} du \\ &= t^{-1/2} \int_{\mathbf{A}} F(t, u) h'(u) du \quad \text{où} \quad h'(u) = u^{-1/2} h(u) \end{aligned}$$

La dernière partie résulte de ce que $F'(t, u) = f'(ut^{-1})$ et si $s \leq t$:

$$\begin{aligned} K'(s, t) &= \int f'(us^{-1}) \overline{f'(us^{-1} \cdot st^{-1})} dm(u) \\ &= \int f'(u) \overline{f'(u \cdot h)} dm(u) \end{aligned}$$

II.1.4. La forme finale du problème posé est donc la suivante : comment on peut déterminer le noyau stationnaire f' sur le semi-groupe multiplicatif $(0,1)$ à partir de la covariance stationnaire Γ donnée par :

$$\Gamma(h) = \int f'(u) \overline{f'(u \cdot h)} dm(u)$$

II.2. La solution du problème précédent par utilisation de l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{R})$ nous suggère de poser le problème sur les groupes ordonnés.

II.2.1. Soit G un groupe localement compact ordonné, soit G^+ le semi-groupe des éléments positifs ou nuls de G . Pour commodité notons additivement la loi de G . Soit $\mathcal{F}(G^+)$ un support sur G^+ (non nécessairement égal au support de Lévy correspondant), le problème est posé de la façon suivante : dans la condition de canonicité :

« Pour tout $A \in \mathcal{F}(G^+)$, la famille $(f_h)_{h \in A}$ engendre $L^2(A, \mathcal{F}_A, m)$, f_h étant définie par $f_h(u) = f(u - h)$ »,

comment on peut déterminer le noyau f , défini sur G^+ , à partir de la covariance Γ donnée par :

$$\Gamma(h) = \int_{G^+} f(u) \overline{f(u + h)} dm(u) = \int f(u) \overline{f(u + h)} dm(u).$$

Pour une solution grossière de ce problème, on peut utiliser les théorèmes I.2.4. et I.2.7. d'après lesquels la solution du problème est définie à une équivalence près et la précision de cette solution n'est grande que si la finesse du support $\mathcal{F}(G^+)$ est bonne. En particulier, la meilleure solution est obtenue lorsque $\mathcal{F}(G^+)$ est dense dans \mathcal{F}_{G^+} . La solution cherchée dépend donc de la finesse du support. Le but du reste de la note est d'obtenir une solution plus précise du problème posé et cela est indépendant de la finesse du support $\mathcal{F}(G^+)$.

Donnons d'abord quelques propriétés des noyaux et covariances stationnaires sur un groupe quelconque.

II.2.2. THÉORÈME. — Pour qu'une fonction Γ définie sur G soit une covariance stationnaire d'un processus gaussien centré, il faut et il suffit qu'il existe p , appelée une densité sur G' , $p \in L^1(G')$, $p \geq 0$ telle que :

$$\Gamma(h) = \int f(u)\overline{f(u+h)}dm(u) = \int e^{ix(h)}p(x)dm'(x)$$

En effet, cela résulte immédiatement de la formule de Parseval que nous utilisons sous l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{aligned} \int e^{ix(h)}p(x)dm'(x) &= \int e^{ix(h)}p^{1/2}(x) \cdot p^{1/2}(x)dm'(x) \\ &= \int \widehat{p^{1/2}}(u)\overline{\widehat{p^{1/2}}(u+h)}dm(u) \quad (\text{car } p^{1/2} \geq 0) \end{aligned}$$

$$\int f(u)\overline{f(u+h)}dm(u) = \int e^{ix(h)}|\widehat{f}(-x)|^2dm'(x)$$

où \widehat{g} représente la transformation de Fourier de g .

II.2.3. D'après le théorème précédent on voit qu'à chaque covariance stationnaire, on peut associer des fonctions $f \in L^2(G)$ et $p \in L^1(G')$, $p \geq 0$ telles que :

$$\Gamma(h) = \int f(u)\overline{f(u+h)}dm(u) = \int e^{ix(h)}p(x)dm'(x)$$

En fait, dans ces relations, la fonction f n'est pas uniquement déterminée à partir de Γ (voir II.2.4.) et par contre, cela est vrai pour la densité p d'après l'unicité sur l'inversion des transformations de Fourier. L'utilisation de la densité p pour caractériser les covariances est donc plus commode et c'est ce que nous allons utiliser dans la suite.

II.2.4. La deuxième forme de la formule de Parseval que nous utilisons dans II.2.2. nous permet d'obtenir tous les noyaux stationnaires g associés à une covariance donnée. On a en effet :

$$p(x) = |\widehat{g}(-x)|^2 \text{ p. s.} \quad \text{ou} \quad \widehat{g}(x) = \varepsilon(-x) \cdot p^{1/2}(-x)$$

où ε est une fonction mesurable telle que $|\varepsilon| = 1$ et alors, en utilisant la transformation inverse :

$$g = \widehat{\varepsilon \cdot p^{1/2}}$$

En général le calcul de la densité à partir de la covariance n'est pas simple. Cependant si l'un des noyaux g_0 associé à Γ appartient à

$$L^{12}(G) = L^1(G) \cap L^2(G)$$

alors $\Gamma \in L^1(G)$ et en prenant sa transformée de Fourier on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}(-x) &= \int e^{ix(h)} \Gamma(h) dm(h) = \int e^{ix(h)} g_0(u) \overline{g_0(u+h)} dm(u) dm(h) \\ &= \dots = |\widehat{g}_0(x)|^2 \end{aligned}$$

et par suite :

$$p(x) = |g_0(-x)|^2 = \widehat{\Gamma}(x) \quad \text{ou} \quad p = \widehat{\Gamma}$$

et dans ce cas tous les autres noyaux g sont donnés par :

$$g = \widehat{\varepsilon \cdot p^{1/2}} = \widehat{\varepsilon \cdot \widehat{\Gamma}^{1/2}}$$

Dans le cas où G est un groupe compact, $L^2(G) \subset L^1(G)$ et alors tous ces résultats sont valables.

II.3. Dans cette partie, la solution du problème sur les groupes ordonnés est faite.

II.3.1. DÉFINITION. — L'espace de Hardy $H^2(G')$ sur le dual G' de G est défini par :

$$H^2(G') = \{f \in L^2(G') : \widehat{f}(h) = 0 \text{ pour } h < 0 \text{ et } h \in G\}$$

II.3.2. DÉFINITION. — Un sous-espace \mathcal{M} de $H^2(G')$ est dit invariant si on a, pour tout $h \in G^+ : \varepsilon_h \cdot \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$

$$\varepsilon_h \text{ est définie par } \varepsilon_h(x) = e^{ix(h)}.$$

Le sous-espace invariant engendré par l'élément $f \in H^2(G')$ est noté par \mathcal{M}_f et lorsque $\mathcal{M}_f = H^2(G')$, f est dite une fonction extérieure.

Il est à noter que ces définitions coïncident avec celles classiques où $G' = \mathbb{R}$ et où G' est le cercle unité d'après les résultats connus de l'analyse harmonique.

II.3.3. THÉORÈME. — Si le noyau stationnaire f , nul sur $\mathbb{C}G^+$, est canonique alors f est transformée de Fourier d'une fonction extérieure de $H^2(G')$. De plus, la densité p de la covariance associée est le carré du module de cette fonction extérieure.

La première partie résulte de ce que $f = \widehat{f}$ où $\tilde{f}(x) = \widehat{f}(-x)$ et de ce que la transformation de Fourier est une isométrie de $H^2(G')$ sur $L^2(G^+)$ et par suite de la famille $(\tilde{f}_h)_{h \in G^+}$ engendre $H^2(G')$ d'après la condition de canonicité. Or on a :

$$\tilde{f}_h(x) = \widehat{f}_h(-x) = \int e^{ix(h)} f(u-h) dm(u) = \dots = e^{ix(h)} \tilde{f}(x)$$

et par suite

$$\tilde{f}_h \in \mathcal{M}_{\tilde{f}} \quad \text{si} \quad h \in G^+ \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\tilde{f}} = H^2(G')$$

Le reste du théorème est une conséquence de $p = |\tilde{f}|^2$.

II.3.4. D'après ce théorème et le théorème II.2.2. notre problème est donc posé sous la forme suivante :

« Peut-on déterminer une fonction extérieure par son module. »

Pour résoudre ce problème, on utilise le théorème suivant qui permet de réduire ce problème en deux cas simples où $G = \mathbb{R}$ et où G est discret.

II.3.5. THÉORÈME. — Si un groupe localement compact ordonné G n'est pas discret, il est la somme directe de la droite réelle \mathbb{R} considérée comme un groupe additif ordonné et d'un groupe ordonné discret D :

$$G = \mathbb{R} \oplus D.$$

Pour les groupes ordonnés discrets, le problème considéré a une réponse affirmative. De façon plus claire on a :

II.3.6. THÉORÈME. — Un groupe localement compact discret G est ordonnable si et seulement s'il ne contient pas des éléments non nuls d'ordre fini ou, de façon équivalente, si et seulement si son dual G' est compact et

connexe. Alors, chaque sous-espace invariant non nul est de la forme $\mathcal{M}_{f_0} = f_0 \cdot H^2(G')$ où f_0 est une fonction intérieure de $H^2(G')$ c'est-à-dire une fonction telle que $|f_0| = 1$.

Dans la décomposition précédente de \mathcal{M}_{f_0} , f_0 est unique à un facteur constant de module 1 près et cela montre qu'une fonction extérieure est définie, à un facteur constant de module 1 près, par son module. De plus, pour que $\tilde{f} \in H^2(G')$ soit extérieure il faut et il suffit que :

$$\left| \int \tilde{f} dm' \right| = \inf_{Q \in \Omega} \left(\int (I + Q) |\tilde{f}|^2 dm' \right)^{1/2} = \exp \left(\int \log |\tilde{f}| dm' \right) > 0$$

Ω étant l'ensemble des polynômes trigonométriques de la forme :

$$Q(x) = \sum_{h>0} \tilde{h}(h) e^{ix(h)}$$

Dans le cas particulier où $G = \mathbb{Z}$, $H^2(G')$ peut être identifié alors à un espace de fonctions analytiques dans le disque unité et alors une fonction extérieure est donnée par son module sur le cercle unité par la relation :

$$\tilde{f}(z) = \lambda \cdot \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |\tilde{f}(e^{i\theta})| d\theta \right], \quad |\lambda| = 1$$

Notons que dans le cas discret la démonstration du fait qu'une fonction extérieure est définie par son module (à un facteur constant près) est très simple. En effet si $\tilde{f}_1 = f_0 \cdot \tilde{f}_2$, \tilde{f}_i extérieurs, $|f_0| = 1$ alors on a :

$$H^2(G') = \mathcal{M}_{\tilde{f}_1} = f_0 \cdot \mathcal{M}_{\tilde{f}_2} = f_0 \cdot H^2(G')$$

On note que $H^2(G')$ contient $1_{G'}$ et par suite, d'après la relation précédente, contient $f_0 = f_0 \cdot 1_{G'}$.

On a de même $\tilde{f}_2 = f_0^{-1} \cdot \tilde{f}_1 = \bar{f}_0 \cdot \tilde{f}_1$ et par la même raison on a : $\bar{f}_0 \in H^2(G')$. Ainsi f_0 et son conjugué appartiennent à $H^2(G')$, f_0 est donc constante.

Dans le cas où $G = G' = \mathbb{R}$ (ou ce qui revient au même, dans le cas où $G = G' = \mathbb{R}^+$) la réponse du problème considéré est encore affirmative. On a notamment les propriétés suivantes :

II.3.7. THÉORÈME. — L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{R})$ peut être identifié à l'espace des fonctions analytiques dans le demi-plan supérieur telle que :

$$\sup_{\gamma>0} \left[\int |f(x + iy)|^2 dm(x) \right] < \infty$$

pour la correspondance qui à chaque $f \in H^2(\mathbb{R})$ associe la fonction f définie par :

$$f(z) = \int_0^\infty e^{izt} \widehat{f}(t) dm(t) = \int e^{izt} \widehat{f}(t) dm(t)$$

De plus chaque sous-espace invariant non nul de $H^2(\mathbb{R})$ est de la forme $\mathcal{M}_{f_0} = f_0 \cdot H^2(\mathbb{R})$ ou f_0 est analytique dans le demi-plan supérieur dont le module est inférieur ou égal à 1 et égal à 1 sur l'axe réel. f_0 est déterminé à un facteur constant de module 1 près et cela montre bien qu'une fonction extérieure de $H^2(\mathbb{R})$ est définie par son module, à un facteur constant près.

Notons pour terminer qu'on peut calculer effectivement une fonction extérieure \tilde{f} de $H^2(\mathbb{R})$ par son module sur \mathbb{R} par la formule classique :

$$\tilde{f}(z) = \lambda \exp \left(\frac{1}{\pi} \int \frac{tz + t}{i(z - t)} \log |\tilde{f}(t)| \frac{dt}{1 + t^2} \right), \quad |\lambda| = 1$$

Voir (2), (3) et (6) pour la démonstration de ces résultats classiques des espaces $H^2(G')$.

RÉFÉRENCES

- [1] Takeyuki HIDA, Canonical representations of gaussian process and their applications. Memoirs of the College of Sciences of Sciences University of Kyoto, s. A, t. XXIII math., p. 109-155, 1960.
- [2] K. HOFFMAN, *Banach spaces of analytic functions*. Prentic Hall, 1962.
- [3] P. D. LAX, Translation invariant spaces. *Acta Math.*, t. 101, 1959, p. 163-178.
- [4] P. LÉVY, *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier-Villars, 1965.
- [5] J. NEVEU, Processus aléatoires gaussiens. Cours multigraphié, Paris, 1^{er} semestre 1966-1967.
- [6] W. RUDIN, *Fourier analysis on groups*. Interscience publishers, 1962.

Manuscrit reçu le 2 avril 1968.