

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

TON THAT LONG

Sur le calcul fonctionnel d'une contraction complètement non unitaire

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, n° 2 (1969), p. 113-121

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_2_113_0

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur le calcul fonctionnel d'une contraction complètement non unitaire

par

TON THAT LONG (*)

RÉSUMÉ. — Dans cette note on donne de nouvelles démonstrations du calcul fonctionnel d'une contraction T dans un espace de Hilbert fait par Sz. Nagy et C. Foias et où on a utilisé essentiellement la théorie spectrale de la dilatation unitaire, minimum de T . Ici, pour obtenir le résultat, on n'utilise pas cette théorie spectrale.

SUMMARY. — This note consist to give a new method for the work of Sz. Nagy and C. Foias on the functional calculus of a contraction T in a Hilbert space where, essentially, the spectral measure of the minimum unitary dilation of T was used. In this note, demonstrations of this work are given without the use of this spectral measure.

L'étude du calcul fonctionnel d'une contraction T (dans un espace de Hilbert H) a été étudiée par Sz. Nagy et C. Foias où l'outil essentiel utilisé est la mesure spectrale de la dilatation minimum \mathcal{U} (sur l'espace élargi \mathcal{H}) de T .

Le but de ce travail est l'étude des propriétés de ce calcul qui peuvent être obtenues sans utilisation de cette mesure spectrale. En particulier, notre méthode est non seulement applicable au cas d'un espace complexe (comme dans Sz. Nagy et C. Foias) mais aussi au cas d'un espace réel sauf

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications », dépendant de la Section n° 2 « Théories Physiques et Probabilités », associée au C. N. R. S.

peut être la proposition 2 sur l'inégalité de Von Neumann où la démonstration est obtenue par la méthode des fonctions analytiques à variables complexes. Or par la méthode de complexification des espaces réels, cette inégalité est encore valable dans le cas des espaces réels, notre méthode voulue est donc valable « directement » au cas des espaces réels ou complexes.

Nous omettrons ici les propriétés déjà obtenues par Sz. Nagy et C. Foias par la méthode voulue et nous démontrons les autres propriétés dans la mesure où cette nouvelle méthode est possible. Nous supposons enfin que T est une contraction complètement non unitaire.

Rappelons d'abord les propriétés essentielles de T et la définition du calcul fonctionnel.

Nous savons que les sous-espaces \mathcal{L} et \mathcal{L}^* définis par :

$$\mathcal{L} = \overline{(\mathcal{U} - T)\mathbf{H}} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^* = \overline{(\mathcal{U}^* - T^*)\mathbf{H}}$$

sont ambulants pour \mathcal{U} c'est-à-dire que :

$$\mathcal{U}^n \mathcal{L} \perp \mathcal{U}^m \mathcal{L} \quad \text{et} \quad \mathcal{U}^n \mathcal{L}^* \perp \mathcal{U}^m \mathcal{L}^* \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n$$

et on a

$$\mathcal{H} = \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L} \right) \vee \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^m \mathcal{L}^* \right) = \overline{\mathcal{M}}$$

où $\mathcal{M}(\mathcal{L}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}$, $\mathcal{M}(\mathcal{L}^*) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}^*$ et \mathcal{M}

est le sous-espace engendré par $\mathcal{M}(\mathcal{L}) \cup \mathcal{M}(\mathcal{L}^*)$. \mathcal{M} est donc un sous-espace dense de \mathcal{H} .

Si f est une fonction analytique dans le disque $\mathbf{D} = \{z/|z| < 1\}$ du plan complexe et telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

(si \mathbf{H} est un espace réel, on suppose en plus que $a_n \in \mathbb{R}$), on dit que f est de la classe A et on définit $f(\mathbf{T})$ par

$$f(\mathbf{T}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{T}^n$$

où la dernière série est convergente en norme des opérateurs dans \mathbf{H} .

Si $f \in H^\infty$ alors la fonction f_r définie par $f_r(z) = f(rz)$ avec $0 < r < 1$

est une fonction de classe A (si H est un espace réel on note que f_r admet un développement de la forme

$$f_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$$

et on suppose en plus que $b_n \in \mathbb{R}$) et on peut par suite définir $f_r(T)$. On dit alors que $f \in H_T^\infty$ si la limite de $f_r(T)$ existe fortement lorsque r tend vers 1 – et on pose :

$$f(T) = \lim_{r \uparrow 1^-} f_r(T)$$

Si $f \in H^\infty$, on utilise la notation $\|f\|_p$ pour désigner la norme de f dans H^p , $1 \leq p \leq \infty$.

1. PROPOSITION. — Pour tout $a \in \mathcal{M}(\mathcal{L}) \cup \mathcal{M}(\mathcal{L}^*)$, $f \in H_{\mathcal{U}}^\infty$ et $p \geq 2$ on a les inégalités suivantes :

$$\|f(\mathcal{U})a\| = \|f\|_2 \cdot \|a\| \leq \|f\|_p \cdot \|a\| \leq \|f\|_\infty \cdot \|a\|$$

Démonstration. — En effet si $f \in A$ c'est-à-dire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

et $a \in \mathcal{L}$, on a :

$$\begin{aligned} \|f(\mathcal{U})a\|^2 &= \langle f(\mathcal{U})a, f(\mathcal{U})a \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{U}^n a, \sum_{m=0}^{\infty} a_m \mathcal{U}^m a \right\rangle \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} a_n \bar{a}_m \langle \mathcal{U}^n a, \mathcal{U}^m a \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \langle \mathcal{U}^n a, \mathcal{U}^n a \rangle + \sum_{n \neq m} a_n \bar{a}_m \langle \mathcal{U}^n a, \mathcal{U}^m a \rangle \end{aligned}$$

Tous les termes dans la dernière somme sont égaux à zéro car \mathcal{L} est ambulant pour \mathcal{U} . On a donc :

$$\begin{aligned} \|f(\mathcal{U})a\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \langle \mathcal{U}^n a, \mathcal{U}^n a \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \langle a, a \rangle \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right) \cdot \|a\|^2 \\ \|f(\mathcal{U})a\|^2 &= \|f\|_2^2 \cdot \|a\|^2 \end{aligned}$$

Si $a \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ alors $a = \mathcal{U}^n a_0$ avec $a_0 \in \mathcal{L}$ et par suite :

$$\|f(\mathcal{U})a\|^2 = \|f(\mathcal{U}) \cdot \mathcal{U}^n a_0\|^2 = \|\mathcal{U}^n f(\mathcal{U})a_0\|^2 = \|f(\mathcal{U})a_0\|.$$

et d'après la partie précédente on a :

$$\|f(\mathcal{U})a\|^2 = \|f(\mathcal{U})a_0\|^2 = \|f\|_2^2 \cdot \|a_0\|^2 = \|f\|_2^2 \cdot \|a\|^2$$

Si $a \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$ et $f \in H_{\mathcal{U}}^\infty$ alors $f_r \in A$ et par suite :

$$\|f_r(\mathcal{U})a\|^2 = \|f_r\|_2^2 \cdot \|a\|^2$$

Faisons tendre r vers $1-$, nous savons que $f_r(\mathcal{U})a$ converge vers $f(\mathcal{U})a$, f_r converge dans H^2 vers f et alors la relation précédente nous donne :

$$\|f(\mathcal{U})a\|^2 = \|f\|_2^2 \cdot \|a\|^2$$

et les autres inégalités cherchées sont des conséquences de ce que $\|f\|_p$ est une fonction croissante de p .

On démontre de la même façon les résultats analogues si $a \in \mathcal{M}(\mathcal{L}^*)$.

2. PROPOSITION (Inégalité de Von Neumann généralisée).

Si $f \in H_T^\infty$ alors on a l'inégalité $\|f(T)\| \leq \|f\|_\infty$.

Démonstration. — En effet, si $f \in A$ cela résulte de l'inégalité de Von Neumann dont la démonstration a été faite indépendamment de la théorie spectrale de la dilatation \mathcal{U} (voir F. Riesz et Sz. Nagy).

Si $f \in H_T^\infty$ alors $f_r \in A$, $0 < r < 1$ et par suite

$$\|f_r(T)\| \leq \|f_r\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

et on obtient la proposition par un passage à la limite.

3. PROPOSITION. — On a les relations $H_{\mathcal{U}}^\infty = H_T^\infty = H^\infty$.

Démonstration. — Si $f \in H^\infty$, $0 < r, s < 1$ alors, d'après la proposition 1, on a :

$$\|(f_r - f_s)(\mathcal{U})a\| \leq \|f_r - f_s\|_p \cdot \|a\|$$

pour $a \in \mathcal{M}(\mathcal{L}) \cup \mathcal{M}(\mathcal{L}^*)$ et $2 \leq p < \infty$.

Lorsque r et s converge vers $1-$, $f_r - f_s$ converge dans H^p vers 0,

$$\|f_r - f_s\|_p \cdot \|a\|$$

converge donc vers 0 et la relation précédente montre que $f_r(\mathcal{U})a$, $0 < r < 1$ est une famille de Cauchy dans \mathcal{H} , $f_r(\mathcal{U})a$ converge donc dans \mathcal{H} lorsque r tend vers $1-$.

Par combinaison linéaire, on voit que $f_r(\mathcal{U})a$ converge pour tout a dans l'espace \mathcal{M} lorsque r tend vers $1-$.

Dans le cas général, remarquons que l'inégalité de Von Neumann nous donne $\|f_r(\mathcal{U})a'\| \leq \|f_r\|_\infty \cdot \|a'\| \leq \|f\|_\infty \cdot \|a'\|$ et par suite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \|a'\| < \alpha \Rightarrow \|f_r(\mathcal{U})a'\| < \frac{\varepsilon}{3} \forall 0 < r < 1$$

D'autre part, \mathcal{M} étant dense dans \mathcal{H} , on a :

$$\forall a \in \mathcal{H}, \exists a_0 \in \mathcal{M} : \|a - a_0\| < \alpha$$

et alors on a :

$$\begin{aligned} \|(f_r - f_s)(\mathcal{U})a\| &\leq \|f_r(\mathcal{U})(a - a_0)\| + \|(f_r - f_s)(\mathcal{U})a_0\| + \|f_s(\mathcal{U})(a - a_0)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \|(f_r - f_s)(\mathcal{U})a_0\| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

si r et s sont assez près de 1 — car $f_r(\mathcal{U})a_0$ converge dans \mathcal{H} .

Ainsi $f_r(\mathcal{U})a$, $0 < r < 1$ est une famille de Cauchy et converge par conséquent dans \mathcal{H} et cela montre que $f_r(\mathcal{U})$ converge fortement c'est-à-dire $f \in H_{\mathcal{U}}^\infty$ et $H_{\mathcal{U}}^\infty = H^\infty$.

Si $a \in H \subset \mathcal{H}$ et $f \in H^\infty$ alors :

$$\|(f_r - f_s)(T)a\| = \|P_H(f_r - f_s)(\mathcal{U})a\| \leq \|(f_r - f_s)(\mathcal{U})a\|$$

et le dernier membre converge vers 0 d'après l'égalité $H^\infty = H_{\mathcal{U}}^\infty$ et par suite $f_r(T)a$, $0 < r < 1$ est une famille de Cauchy dans H , elle converge donc dans H et cela veut dire que $f_r(T)$ converge fortement ou que $f \in H_T^\infty$ ou $H_T^\infty = H^\infty$.

4. PROPOSITION. — Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément dans le disque D vers f , $f_n \in H^\infty$ alors $(f_n(\mathcal{U}))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $f(\mathcal{U})$ et $f(T)$ en norme des opérateurs.

Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans la norme de H^∞ et converge presque partout sur la circonférence $C = \{z \mid |z| = 1\}$ vers $f \in H^\infty$ alors les suites $(f_n(\mathcal{U}))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $f(\mathcal{U})$ et $f(T)$ fortement.

Démonstration. — La première partie est une conséquence immédiate de l'inégalité de Von Neumann.

D'après l'inégalité

$$\|(f_n(T) - f(T))a\| = \|P_H(f_n(\mathcal{U}) - f(\mathcal{U}))a\| \leq \|f_n(\mathcal{U}) - f(\mathcal{U})\| \|a\|$$

qui est valable pour tout $a \in H$, pour montrer la deuxième partie de la proposition, il suffit de montrer que $(f_n(\mathcal{U}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement. Or d'après la proposition 1, on a :

$$\|(f_n - f)(\mathcal{U})a\| \leq \|f_n - f\|_p \cdot \|a\| \forall a \in \mathcal{M}(\mathcal{L}) \cup \mathcal{M}(\mathcal{L}^*) \text{ et } 2 \leq p < \infty.$$

Lorsque n tend vers ∞ , f_n converge dans H^p vers f d'après le théorème de la convergence bornée de Lebesgue, $\|f_n - f\|_p$ converge donc vers 0 et l'inégalité précédente montre que $f_n(\mathcal{U})a$ converge vers $f(\mathcal{U})a$. Par des combinaisons linéaires, $f_n(\mathcal{U})a$ converge donc dans \mathcal{H} vers $f(\mathcal{U})a$ pour tout a du sous-espace \mathcal{M} engendré par $\mathcal{M}(\mathcal{L}) \cup \mathcal{M}(\mathcal{L}^*)$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée dans H^∞ , on achève alors la démonstration par une méthode analogue à celle utilisée dans la démonstration de la proposition 3.

5. PROPOSITION. — Pour tout $f \in H^\infty (= H_T^\infty = H_{\mathcal{U}}^\infty)$, $a \in \mathcal{U}^m \mathcal{L}$ et $b \in \mathcal{U}^n \mathcal{L}$ (ou $a \in \mathcal{U}^m \mathcal{L}^*$ et $b \in \mathcal{U}^n \mathcal{L}^*$) on a la relation :

$$\langle f(\mathcal{U})a, b \rangle = 0 \quad \text{si} \quad n - m < 0$$

$$= \frac{\langle a, \mathcal{U}^{m-n}b \rangle}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{i(m-n)t} dt \quad \text{si} \quad n - m \geq 0.$$

Démonstration. — En effet si $f \in A$ et $f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ avec $\sum_{p=0}^{\infty} |a_p| < \infty$

et si $a = \mathcal{U}^m a'$ et $b = \mathcal{U}^n b'$ avec $a', b' \in \mathcal{L}$ on a :

$$\langle f(\mathcal{U})a, b \rangle = \left\langle \sum_{p=0}^{\infty} a_p \mathcal{U}^p a, b \right\rangle = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \langle \mathcal{U}^p a, b \rangle$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} a_p \langle \mathcal{U}^{p+m} a', \mathcal{U}^n b' \rangle = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \langle \mathcal{U}^{p+m-n} a', b' \rangle$$

\mathcal{L} étant ambulant pour \mathcal{U} , tous les termes de la dernière somme sont nuls sauf peut être le terme qui correspond à l'indice p tel que $p \geq 0$ et $p + m - n = 0$. On a donc :

$$\langle f(\mathcal{U})a, b \rangle = 0 \quad \text{si} \quad n - m < 0$$

$$= a_{n-m} \langle a', b' \rangle \quad \text{si} \quad n - m \geq 0.$$

Dans le dernier cas on a :

$$\langle f(\mathcal{U})a, b \rangle = \langle a', b' \rangle a_{n-m} = \langle \mathcal{U}^{-m} a, \mathcal{U}^{-n} b \rangle a_{n-m}$$

$$= \langle a, \mathcal{U}^{m-n} b \rangle a_{n-m} = \frac{\langle a, \mathcal{U}^{m-n} b \rangle}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{i(m-n)t} dt$$

Dans le cas général, si $f \in H$ alors $f_r \in A$, $0 < r < 1$ et on a :

$$\langle f_r(\mathcal{U})a, b \rangle = 0 \quad \text{si} \quad n - m < 0$$

$$= \frac{\langle a, \mathcal{U}^{m-n} b \rangle}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(e^{it})e^{i(m-n)t} dt \quad \text{si} \quad n - m \geq 0.$$

Lorsque r tend vers $1-$, $\langle f_r(\mathcal{U})a, b \rangle$ converge vers $\langle f(\mathcal{U})a, b \rangle$ car, d'après la proposition 3, $f_r(\mathcal{U})$ converge vers $f(\mathcal{U})$ fortement et par suite faiblement. D'autre part, la fonction $f_r^{m,n}$ définie par $f_r^{m,n}(e^{it}) = f_r(e^{it})e^{i(m-n)t}$ converge dans L^1 vers la fonction $f^{m,n}$ définie par $f^{m,n}(e^{it}) = f(e^{it})e^{i(m-n)t}$. On a donc, à la limite :

$$\begin{aligned} \langle f(\mathcal{U})a, b \rangle &= 0 \quad \text{si} \quad n - m < 0 \\ &= \frac{\langle a, \mathcal{U}^{m-n}b \rangle}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{i(m-n)t} dt \quad \text{si} \quad n - m \geq 0. \end{aligned}$$

On obtient, avec la même méthode, le résultat analogue si $a \in \mathcal{U}^m \mathcal{L}^*$ et $b \in \mathcal{U}^n \mathcal{L}^*$.

6. PROPOSITION. — Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans H^∞ et converge dans le disque ouvert $D = \{z/|z| < 1\}$ vers $f \in H^\infty$ alors les suites $(f_n(\mathcal{U}))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_n(\mathbb{T}))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent faiblement respectivement vers $f(\mathcal{U})$ et $f(\mathbb{T})$.

Démonstration. — Pour $a \in \mathcal{U}^m \mathcal{L}$ et $b \in \mathcal{U}^n \mathcal{L}$, on a, d'après la proposition précédente :

$$\begin{aligned} \langle (f_p - f)(\mathcal{U})a, b \rangle &= 0 \quad \text{si} \quad n - m < 0 \\ &= \frac{\langle a, \mathcal{U}^{m-n}b \rangle}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_p(e^{it}) - f(e^{it})]e^{i(m-n)t} dt \\ & \hspace{15em} \text{si} \quad n - m \geq 0. \end{aligned}$$

La fonction $(f_p - f)z^{m-n}$ étant holomorphe dans le domaine défini par $0 < |z| < 1$, on a alors : si $n - m \geq 0$:

$$\begin{aligned} \langle (f_p - f)(\mathcal{U})a, b \rangle &= \frac{\langle a, \mathcal{U}^{m-n}b \rangle}{2\pi} \lim_{r \uparrow 1-} \int_0^{2\pi} [f_p(re^{it}) - f(re^{it})]r^{m-n}e^{i(m-n)t} dt \\ &= \frac{\langle a, \mathcal{U}^{m-n}b \rangle}{2\pi i} \lim_{r \uparrow 1-} \int_{|z|=r} [f_p(z) - f(z)]z^{m-n-1} dz \\ &= \frac{\langle a, \mathcal{U}^{m-n}b \rangle}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{2}} [f_p(z) - f(z)]z^{m-n-1} dz. \end{aligned}$$

Or la dernière intégrale converge vers 0 lorsque p tend vers ∞ car $f_p - f$ converge (sur le cercle $\left\{z/|z| = \frac{1}{2}\right\}$) tout en restant bornée par une constante et cela montre que $\langle f_p(\mathcal{U})a, b \rangle$ converge, lorsque p tend vers ∞ , vers $\langle f(\mathcal{U})a, b \rangle$ et par des combinaisons linéaires, on a le même résultat si a et b appartiennent à l'espace \mathcal{M}_1 (non fermé) engendré par $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}$.

\mathcal{M}_1 étant dense dans $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}$ et la suite $f_n(\mathcal{U})$ étant bornée (si M est une borne de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans H^∞ , on a alors $\|f_n(\mathcal{U})\| \leq M$ d'après l'inégalité de Von Neumann) le résultat précédent montre alors que $\langle f_p(\mathcal{U})a, b \rangle$ converge vers $\langle f(\mathcal{U})a, b \rangle$ pour tout $a, b \in \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}$.

On démontre de la même façon que $\langle f_p(\mathcal{U})a, b \rangle$ converge vers $\langle f(\mathcal{U})a, b \rangle$ pour tout $a, b \in \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}^*$.

Si $a \in \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}$ et $b \in \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}^*$, on remarque que :

$$(f_p - f)(\mathcal{U})a \in \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}$$

car $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}$ réduit l'opérateur unitaire \mathcal{U} et on a :

$$\langle (f_p - f)(\mathcal{U})a, b \rangle = \langle (f_p - f)a, Pb \rangle$$

où P est la projection orthogonale sur $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}$. Le dernier terme converge vers 0 d'après la partie précédente car a et Pb sont deux éléments de $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}$ et par suite $\langle f_p(\mathcal{U})a, b \rangle$ converge vers $\langle f(\mathcal{U})a, b \rangle$. On démontre le même résultat si $a \in \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}^*$ et $b \in \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}$ et par combinaisons linéaires, ce résultat est aussi vrai si a et b sont de la forme :

$$a = a_0 + a_0^*, b = b_0 + b_0^* \quad \text{avec} \quad a_0, b_0 \in \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}; \quad a_0^*, b_0^* \in \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}^*.$$

Puisque $\mathcal{H} = \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L} \right) \vee \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^m \mathcal{L}^* \right)$, tous les résultats précédents montrent que $f_p(\mathcal{U})$ converge faiblement vers $f(\mathcal{U})$.

Si $a, b \in H$ on a :

$$\langle f_p(\mathcal{T})a, b \rangle = \langle P_H f_p(\mathcal{U})a, b \rangle$$

où P_H est la projection orthogonale sur H et le dernier terme est aussi égal à $\langle f_p(\mathcal{U})a, b \rangle$ car $b \in H$. Or $f_p(\mathcal{U})$ converge faiblement vers $f(\mathcal{U})$, $\langle f_p(\mathcal{U})a, b \rangle$ converge donc vers

$$\langle f(\mathcal{U})a, b \rangle = \langle P_H f(\mathcal{U})a, b \rangle = \langle f(\mathcal{T})a, b \rangle$$

et $f_p(\mathcal{T})$ converge faiblement vers $f(\mathcal{T})$ et la proposition est démontrée.

7. PROPOSITION. — Si T est une contraction complètement non unitaire alors $(\mathcal{U}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent faiblement vers 0.

Démonstration. — Cela est en effet une conséquence de la proposition précédente appliquée à la suite $f_n(z) = z^n$ qui tend vers 0 dans $D = \{z/|z| < 1\}$ et qui est bornée par 1.

8. GÉNÉRALISATION. — Le calcul fonctionnel d'un opérateur T de classe C_ρ a été mentionné par A. Racz où on remplace l'espace H par l'espace $H_0^\infty = \{f \in H^\infty / f(0) = 0\}$.

D'autre part, E. Durszt a montré que si \mathcal{U} est la ρ -dilatation minimum de T et si T est complètement non unitaire alors il existe, dans l'espace \mathcal{H} sur lequel \mathcal{U} est défini, des sous-espaces $\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j^*$ $i, j = 1, 2$ ambulants pour \mathcal{U} tels que :

$$\mathcal{H} = \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^n \mathcal{L}_1 \right) \vee \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^m \mathcal{L}_2 \right) \vee \left(\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^p \mathcal{L}_1^* \right) \vee \left(\bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^q \mathcal{L}_2^* \right)$$

ce qui donne des propriétés analogues au cas d'une contraction complètement non unitaire.

Dans ces conditions, avec une méthode analogue à celle utilisée de la proposition 1 à la proposition 7, on peut obtenir des résultats analogues sans utilisation de la mesure spectrale de la ρ -dilatation \mathcal{U} de T.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. RIESZ et Sz. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Paris, Budapest, 3^e édition.
 [2] Sz. NAGY et C. FOIAS, *Analyse harmonique des opérateurs dans l'espace de Hilbert*. Budapest, 1967.
 [3] DUNFORD et J. SCHWARTZ, *Linear operators*, Part I, New York, 1958.
 [4] A. ZYGMUND, On the boundary values of functions of several complex variables. *Fund. Math.*, **36**, 1949, 207-305.
 [5] K. HOFFMAN, *Banach spaces of analytic functions*. Prentice Hall, 1962.
 [6] E. DURSZT, On the spectrum of unitary ρ -dilations. *Acta Sci. Math. Szeged*, **28**, 1967, 289-298.
 [7] A. RACZ, Sur les transformations de classe \mathcal{C}_ρ dans l'espace de Hilbert. *Acta Sci. Math. Szeged*, **28**, 1967, 305-309.

Recu le 29 octobre 1968.