Annales de l'I. H. P., section B

Roger Cuppens

Décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles de plusieurs variables à spectre de Poisson continu

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, nº 2 (1969), p. 123-133

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_2_123_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. V, n° 2, 1969, p. 123-133. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles de plusieurs variables à spectre de Poisson continu

par

Roger CUPPENS

RÉSUMÉ. — Soit f une fonction caractéristique indéfiniment divisible définie sur R^n, sans facteur normal et telle que la mesure apparaissant dans sa représentation de Lévy-Khintchine admette une dérivée ϕ continue presque partout. Alors f n'a pas de facteur indécomposable si et seulement si il existe un ouvert convexe A vérifiant $A \cap (2)A = \phi$ et tel que $\phi(x) = 0$ pour presque tout x n'appartenant pas à A.

SUMMARY. — Let f be an infinitely divisible characteristic function defined on R^n, without normal factor and such that the measure appearing in its Lévy-Khintchine representation has an almost everywhere continuous derivative ϕ. Then f has no indecomposable factor if and only if there exists an open convex set A satisfying $A \cap (2)A = \phi$ and such that $\phi(x) = 0$ for almost every x which does not belong to A.

I. — INTRODUCTION

Soit f la fonction définie sur R^n par

$$(1.1)\quad \log f(t) = \int_{R^n - \{0\}} [\exp(i(t, x)) - 1 - i(t, x)(1 + |x|^2)^{-1}]\phi(x)dx$$

où $(t, x) = t_1x_1 + \ldots + t_nx_n$ désigne le produit scalaire des vecteurs $t = (t_1, \ldots, t_n)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $|x|^2 = (x, x)$ et où ϕ est une fonction définie sur $\mathrm{R}^n - \{0\}$, positive ou nulle et continue presque partout et vérifiant :

$$\int_{\mathrm{R}^n - \{0\}} |x|^2(1 + |x|^2)^{-1}\phi(x)dx < +\infty.$$

Si on définit la mesure μ par

$$\mu(\mathrm{B}) = \int_{\mathrm{B} - \{0\}} \phi(x)dx$$

pour tous les ensembles boréliens B de R^n, on voit que les conditions du théorème de représentation de Lévy-Khintchine ([*5*], p. 214-221) sont vérifiées et f est donc une fonction caractéristique indéfiniment divisible. Dans le cas $n = 1$, nous avons dans [*3*] donné une condition nécessaire et suffisante pour que f appartienne à la classe I_0 des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles sans facteurs indécomposables. Nous nous proposons d'étendre ce résultat au cas $n > 1$.

Pour énoncer notre résultat, nous définissons $(m)\mathrm{A}$ et $(\infty)\mathrm{A}$ par $(1)\mathrm{A} = \mathrm{A}$; $(m)\mathrm{A} = (m-1)\mathrm{A}(+)\mathrm{A}$; $(\infty)\mathrm{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty}(m)\mathrm{A}$, où $(+)$ désigne la somme vectorielle de deux ensembles. Nous avons alors le

THÉORÈME 1. — La fonction caractéristique f définie par (1.1) appartient à I_0 si et seulement si

$$\phi(x) = 0 \qquad \text{p. p.}$$

en dehors d'un ensemble convexe A vérifiant

$$\mathrm{A} \cap (2)\mathrm{A} = \phi.$$

II. — SUFFISANCE DE LA CONDITION

La suffisance de la condition du théorème 1 se déduit immédiatement du théorème suivant qui est une extension d'un résultat de I. V. Ostrovskiy ([*6*], Théorème 1).

THÉORÈME 2. — Soit f la fonction caractéristique indéfiniment divisible définie par

$$\log f(t) = \int_{\mathrm{R}^n} [\exp(i(t, x)) - 1]d\mu(x).$$

Si la mesure μ est concentrée (¹) dans un ensemble ouvert convexe A vérifiant

$$A \cap (2)A = \phi,$$

alors f appartient à I_0.

Nous déduirons ce résultat du théorème suivant qui généralise un résultat obtenu indépendamment par I. V. Ostrovskiy ([*6*], Théorème 3) et l'auteur ([*1*], Théorème 8.1) et étendu récemment par E. Lukacs et l'auteur [*4*].

THÉORÈME 3. — Soient f, f_1, f_2 des fonctions caractéristiques définies sur R^n telles que

$$f(t) = f_1(t) f_2(t) \qquad (t \in R^n).$$

Si

$$\log f(t) = \int_D [\exp(i(t, x)) - 1] d\mu(x) \tag{2.1}$$

où $D = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 \geqslant 0,\ x \neq (0, \ldots, 0)\}$ et μ est une mesure à variation bornée sur D, alors

$$\log f_j(t) = i P_j(t) + \int_D [\exp(i(t, x)) - 1] d\mu_j(x) \qquad (j = 1,2) \tag{2.2}$$

où P_j est une forme linéaire réelle et μ_j une mesure à variation bornée sur D.

Si, de plus, μ est concentré dans un ensemble A, μ_j est concentré dans $T \cap (\infty)A$ où T est la fermeture convexe de A.

Démonstration du théorème 3. — On déduit de (2.1) que

$$f(t) = C\left\{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_D \exp(i(t, x)) d\mu^{*m}(x)\right\}$$

où $C = \exp\left\{-\int_D d\mu(x)\right\}$ et où μ^{*m} désigne la m-ième convolution de μ avec lui-même. La probabilité p associée à f est donc

$$p = C\left\{\varepsilon + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \mu^{*m}\right\}$$

(¹) Une mesure μ est concentrée dans un ensemble A si $\mu(B) = \mu(A \cap B)$ pour tout ensemble borélien B de R^n.

où ε est la probabilité dégénérée à l'origine. p est donc concentré dans l'ensemble $\{0\} \cup (\infty)A$ qui est contenu dans D et

$$p(\{0\}) > 0.$$

Soient p_1 et p_2 les probabilités associées à f_1 et f_2. On peut trouver des vecteurs $\alpha_j = (\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,n})$ $(j = 1, 2)$ tels que

$$p_j(\{x : x_1 \geqslant \alpha_{j,1}\}) = 1 \qquad (j = 1, 2),$$
$$p_j(\{\alpha_j\}) > 0 \qquad (j = 1, 2),$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

et tels que pour tous les ensembles boréliens B de R^n

$$p_j(B) = C_j\varepsilon(B - \alpha_j) + q_j(B - \alpha_j) \qquad (j = 1, 2)$$

où q_j est une mesure concentrée dans $(\infty)A$. On peut supposer que $\alpha_j = 0$, ce qui revient à multiplier $f_j(t)$ par $\exp[i(\alpha_j, t)]$.

On déduit des théorèmes 3.1 et 3.3 de [*1*] que f_j appartient à M_Γ (¹) où $\Gamma = \{t = (t_1, \ldots, t_n) : t_1 \geqslant 0, t_2 = \ldots = t_n = 0\}$ et donc que

$$f_j(t) = C_j + \int_D \exp(i(t, x))dq_j(x) \ (\operatorname{Im} t_1 \geqslant 0 ; t_2, \ldots, t_n \in R)$$

$(j = 1, 2)$. De plus, on peut trouver $k_j > 0$ tel que

$$(2.3) \qquad \int_D \exp(-k_j x_1)dq_j(x) < C_j \qquad (j = 1, 2).$$

En introduisant la mesure r_j définie pour tous les ensembles boréliens B de R^n par

$$r_j(B) = \int_B \exp(-k_j x_1)dq_j(x),$$

nous voyons que r_j est concentré dans $(\infty)A$ et que

$$f_j(t + ik_j\theta_1) = C_j + \int_D \exp(i(t, x))dr_j(x) \ (\operatorname{Im} t_1 \geqslant -k_j ; t_2, \ldots, t_n \in R)$$

(¹) On dit que la fonction caractéristique f de la probabilité p appartient à M_Γ si

$$\int_{R^n} \exp(-(y, x))dp(x)$$

converge pour $y \in \Gamma$.

($j = 1, 2$) où θ_1 est le vecteur unitaire de l'axe des t_1 et par conséquent

$$\log f_j(t + ik_j\theta_1) = \log C_j + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{mC_j^m} \left[\int_D \exp(i(t, x)) dr_j(x) \right]^m$$

où (2.3) assure la convergence de la série. En posant

$$v_j = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{mC_j^m} r_j^{*m},$$

on obtient une mesure v_j concentrée dans (∞)A et telle que

$$\log f_j(t + ik_j\theta_1) = \log C_j + \int_D \exp(i(t, x)) dv_j(x)$$

$$(\operatorname{Im} t_1 \geqslant -k_j ; t_2, \ldots, t_n \in \mathrm{R}).$$

Si nous posons

$$\mu_j(\mathrm{B}) = \int_\mathrm{B} \exp(k_j x_1) dv_j(x)$$

pour tous les ensembles boréliens B de R^n, nous voyons que

$$\log f_j(t) = \log C_j + \int_D \exp(i(t, x)) d\mu_j(x) \qquad (t \in \mathrm{R}^n)$$

où μ_j est une mesure concentrée dans (∞)A. Ceci est la représentation (2.2) où C_j est déterminé par la condition $\log f_j(0) = 0$.

Si maintenant la fermeture convexe T de A n'est pas tout le demi-espace $\{ x ; x_1 \geqslant 0 \}$, nous utilisons le lemme suivant :

LEMME. — Soient f, f_1, f_2 des fonctions caractéristiques telles que

$$f(t) = \exp[g(t)] = f_1(t) f_2(t) \qquad (t \in \mathrm{R}^n)$$

et Γ un cône convexe issu de l'origine. Si f est une fonction caractéristique appartenant à M_Γ et sans zéros dans $\mathrm{R}^n + i\Gamma$ et si

$$\limsup_{r \to +\infty} r^{-1} \log [\,|g(ir\theta)|\,] \leqslant h(\theta)$$

où h est une fonction positivement homogène de $\theta \in \Gamma$, alors f_j a la forme

$$f_j(t) = \exp[g_j(t)] \qquad (t \in \mathrm{R}^n + i\Gamma)$$

et

$$\limsup_{r \to +\infty} r^{-1} \log [\,|g_j(ir\theta)|\,] \leqslant h(\theta).$$

La démonstration est semblable à celle du théorème 2.5 de [*1*] et sera donc omise. La deuxième assertion du théorème se déduit alors d'une extension du théorème classique de Plancherel et Pólya (voir Ramachandran [7], théorème A II *a*).

Démonstration du théorème 2. — Si pour un ensemble convexe A, $A \cap (2)A = \phi$, il est évident que l'origine n'appartient pas à A. On peut donc trouver un système d'axes tel que A soit tout entier dans le demi-espace $D = \{x : x_1 \geqslant 0\}$. On obtient alors du théorème précédent la représentation (2.2) pour tout facteur f_j de f où μ_j est une mesure concentrée dans $T \cap (\infty)A = A$. Donc la probabilité p_j de f_j est donnée pour tous les ensembles boréliens B de R^n par

$$p_j(B) = C_j \varepsilon(B - \alpha_j) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \mu_j^{*m}(B - \alpha_j)$$

où $\alpha_j \in R^n$. Mais des hypothèses du théorème, on déduit que pour $B \subset A$

$$\mu_j(B) = p_j(B + \alpha_j) \geqslant 0,$$

ce qui entraîne que f_j est indéfiniment divisible puisque μ_j est concentré dans A et démontre le théorème.

III. — NÉCESSITÉ DE LA CONDITION

La nécessité de la condition du théorème 1 se déduit immédiatement des théorèmes suivants qui sont des extensions respectives des théorèmes 1 de [2] et [3], les idées de démonstration étant les mêmes.

THÉORÈME 4. — Soit f la fonction caractéristique définie par

$$\log f(t) = \int_{R^n} [\exp(i(t, x)) - 1]\alpha(x)dx$$

où

$$\alpha(x) = \begin{cases} \rho & \text{si } x \in D_j = \{|x - a_j| < r\} \qquad (j = 1, \ldots, m), \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

ρ et r étant des nombres positifs et a_j des vecteurs non nuls de R^n tels que

$$(3.1) \qquad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j = 0$$

(λ_j entiers positifs). Alors f n'appartient pas à I_0.

THÉORÈME 5. — Soit f la fonction caractéristique définie par

$$\log f(t) = \int_{\mathbf{R}^n} [\exp(i(t, x)) - 1]\alpha(x)dx$$

où

$$\alpha(x) = \begin{cases} \rho & \text{si} \quad x \in \mathrm{D}_j = \{ |x - a_j| < r \} \qquad (j = 1, \ldots, m), \\ \rho & \text{si} \quad x \in \mathrm{E}_j = \{ |x - b_j| < r \} \qquad (j = 1, 2), \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

ρ et r étant des nombres positifs et a_j et b_j des vecteurs de R^n tels que

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j = (b_1 + b_2) \sum_{j=1}^{m} \lambda_j$$

(λ_j entiers positifs). Alors f n'appartient pas à I_0.

Démonstration du théorème 4. — On peut, sans restreindre la généralité, supposer que $a_1, \ldots, a_{m-1}$ ne vérifient pas une relation de la forme (3.1), que $m > 2$ et que

$$r < \frac{2}{3} \inf_{1 \leqslant j \leqslant m} |a_j|. \tag{3.2}$$

Soient maintenant α_k et β_k les fonctions définies par

$$\alpha_k = \alpha^{*k}; \qquad \beta_k = \beta^{*k}$$

où

$$\beta(x) = \begin{cases} -\varepsilon\rho & \text{si} \quad x \in \mathrm{C} = \{ |x| < r/2 \}, \\ \alpha(x) & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Si nous montrons que pour une valeur positive de ε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \beta_k(x) \geqslant 0 \tag{3.3}$$

quel que soit $x \in \mathrm{R}^n$, alors la fonction g définie par

$$\log g(t) = \int_{\mathbf{R}^n} [\exp(i(t, x)) - 1]\beta(x)dx$$

est une fonction caractéristique qui n'est pas indéfiniment divisible et divise f, ce qui démontrerait le théorème.

Soit M_k l'ensemble défini par

$$\mathrm{M}_k = \cup [(s)\mathrm{C}(+)(q_1)\mathrm{D}_1(+) \ldots (+)(q_m)\mathrm{D}_m]$$

où l'union est prise pour tous les entiers positifs s et tous les entiers non négatifs q_j tels que

$$s + \sum_{j=1}^{m} q_j = k.$$

Alors, de la définition de β_k on voit que

$$\beta_k(x) \geqslant 0 \qquad (x \notin \mathrm{M}_k). \tag{3.4}$$

Si nous notons A le plus petit ouvert convexe contenant tous les D_j et d le supremum de la distance de l'origine à la frontière de A, de

$$\begin{aligned}\alpha_k(x) - \beta_k(x) = &\int_{\mathrm{R}^n} \alpha_{k-1}(x-y)[\alpha_1(y) - \beta_1(y)]dy \\ &+ \int_{\mathrm{R}^n} [\beta_{k-1}(x-y) - \alpha_{k-1}(x-y)]\beta_1(y)dy,\end{aligned}$$

on montre facilement par récurrence que pour $x \in \mathrm{M}_k$,

$$|\alpha_k(x) - \beta_k(x)| \leqslant \varepsilon(2\rho)^k d^{k-1},$$

ce qui entraîne que pour un k donné

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathrm{M}_k} |\alpha_k(x) - \beta_k(x)| = 0. \tag{3.5}$$

Soit N_k l'ensemble défini par

$$\mathrm{N}_k = \cup [(q_1)\mathrm{D}_1(+) \ldots (+)(q_m)\mathrm{D}_m]$$

où l'union est prise pour tous les entiers non négatifs q_j tels que

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = k.$$

Alors il existe un K tel que

$$\mathrm{M}_\mathrm{K} \subset \mathrm{N}_\mathrm{K}. \tag{3.6}$$

En effet, si A* est le plus petit convexe contenant les a_j, il existe dans A* un ensemble de points p_k ($k = 1, \ldots, s$) de la forme

$$p_k = \sum_{j=1}^{m} \mu_j a_j \Big[\sum_{j=1}^{m} \mu_j\Big]^{-1}$$

(μ_j entiers non négatifs) et tels que

$$\sup_k [\inf_{k' \neq k} | p_k - p_{k'} |] < \frac{r}{2}$$

Si K est le p. p. c. m. de tous les $\Sigma\mu_j$, on voit que N_K contient la réunion de toutes les boules de centre Kp_k et de rayon Kr qui recouvrent (K)A*. (3.6) se déduit alors de (3.2). On déduit alors de (3.6)

(3.7) $$M_k \subset N_k \qquad (k \geqslant K)$$

et, puisque $M_k \supset M_{k-1} \supset \ldots \supset M_1$,

(3.8) $$Q_K = \bigcup_{k=1}^{K-1} M_k \subset N_K$$

Par conséquent

$$\inf_{x \in M_k} \alpha_k(x) > 0 \qquad (k \geqslant K)$$

et

$$\inf_{x \in M_k} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!} \alpha_k(x) > 0$$

Donc si $\varepsilon > 0$ est assez petit

(3.9) $$\inf_{x \in M_k} \beta_k(x) \geqslant 0 \qquad k = K, \ldots, 2K - 1$$

et

(3.10) $$\inf_{x \in Q_K} \sum_{j=1}^{K} \frac{1}{k!} \beta_k(x) \geqslant 0$$

Mais de (3.4), (3.9) et de

$$\beta_l(x) = \int_{R^n} \beta_{l-k}(x - y)\beta_k(y)dy$$

si $l > k$, on obtient

(3.11) $$\beta_k(x) \geqslant 0 \qquad k \geqslant K$$

quel que soit x et de (3.10) et (3.4) on obtient

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!} \beta_k(x) \geqslant 0$$

quel que soit x, ce qui entraîne (3.3) et démontre le théorème.

Démonstration du théorème 5. — Nous pouvons de nouveau supposer, sans restreindre la généralité que $m \geqslant 2$, que les a_j sont tous différents et que

$$r < \frac{2}{3} \inf (|a_j - b_1 - b_2|, |b_1|, |b_2|).$$

Si nous définissons maintenant α_k et β_k par

$$\alpha_k = \alpha^{*k}; \qquad \beta_k = \beta^{*k}$$

où

$$\beta(x) = \begin{cases} -\varepsilon\rho & \text{si} \quad x \in C = \left\{ |x - b_1 - b_2| < \dfrac{r}{2} \right\}, \text{ ailleurs.} \\ \alpha(x) & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

nous devons de nouveau démontrer (3.3). Si nous définissons M_k par

$$M_k = \cup [(s)C(+)(q_1)D_1(+) \ldots (+) (q_m)D_m(+)(r_1)E_1(+)(r_2)E_2]$$

où l'union est prise pour tous les entiers positifs s et tous les entiers non négatifs q_j et r_j tels que

$$s + r_1 + r_2 + \sum_{j=1}^{m} q_j = k,$$

nous obtenons, avec la même méthode que celle du théorème 4, (3.4) et (3.5).

Si maintenant nous définissons N_k par

$$N_k = \cup [(q_1)D_1(+) \ldots (+)(q_m)D_m(+)(r_1)E_1(+)(r_2)E_2]$$

où l'union est prise pour tous les q_j et r_j non négatifs tels que

$$\sum_{j=1}^{m} q_j + r_1 + r_2 = k,$$

il existe de nouveau un K tel que (3.6) soit vérifié. On en déduit de nouveau (3.7) et de là (3.11) si $\varepsilon > 0$ est assez petit. Soit maintenant M_k pour $k < K$. Il est évident de la définition de C que

$$Q_K = \bigcup_{j=1}^{K-1} M_k \subset \bigcup_{j=1}^{2K-2} N_k$$

ce qui implique que

$$\inf_{x \in Q_K} \sum_{k=1}^{2K-2} \frac{1}{k!} \alpha_k(x) > 0$$

et

$$\inf_{x \in Q_K} \sum_{k=1}^{2K-2} \frac{1}{k!} \beta_k(x) \geqslant 0$$

si $\varepsilon > 0$ est assez petit, ce qui avec (3.4) et (3.11) implique (3.3) et démontre le théorème.

RÉFÉRENCES

[1] R. Cuppens, Décomposition des fonctions caractéristiques des vecteurs aléatoires. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, **16**, 1967, 61-153.

[2] R. Cuppens, On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions with continuous Poisson spectrum. I. *A paraître* dans *Proc. Amer. Math. Soc.*

[3] R. Cuppens, On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions with continuous Poisson spectrum. II. *A paraître.*

[4] R. Cuppens et E. Lukacs, Factorization of generalized Poisson distributions. *A paraître* dans *Studia Sci. Math. Hungar.*

[5] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* 2e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1954.

[6] I. V. Ostrovskiy, Décomposition des lois indéfiniment divisibles à plusieurs dimensions sans composantes gaussiennes (en russe). *Vestnik Har'kov Gos. Univ.*, **32**, 1966, n° 14, 51-72.

[7] B. Ramachandran, *Advanced theory of characteristic functions.* Statistical Publ. Soc. Calcutta, 1967.

Reçu le 8 novembre 1968.