

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. FORTET

M. KAMBOUZIA

Les répartitions ponctuelles markoviennes ; estimations et tests concernant leurs lois de probabilité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, n° 3 (1969), p. 195-212

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_3_195_0

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Les répartitions ponctuelles Markoviennes ; estimations et tests concernant leurs lois de probabilité

par

R. FORTET et M. KAMBOUZIA ⁽¹⁾
(Paris).

RÉSUMÉ. — Soit \mathcal{L} la loi de probabilité d'une répartition ponctuelle aléatoire $R = \{0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_\alpha \leq T_{\alpha+1} \leq \dots\}$ sur $[0, +\infty)$, pour laquelle on pose, pour tout $t \in [0, +\infty)$,

$$N(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq T_1 ; \\ n & \text{si } T_n < t \leq T_{n+1} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

L'article détermine la structure de \mathcal{L} nécessaire et suffisante :

1° Pour que R soit *Markovienne*, c'est-à-dire pour que la fonction aléatoire $N(t)$ soit Markovienne sur $[0, +\infty)$.

2° Pour que R soit *cumulative*, c'est-à-dire pour que, pour tout $T > 0$ fixé et pour tout entier $n > 0$, la loi de probabilité de $\{T_1, \dots, T_n\}$ conditionnelle quand $N(T) = n$, soit la loi uniforme sur le domaine :

$$0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n < T.$$

Il est montré que, si R est cumulative, et sauf si R est un processus de Poisson, l'observation même indéfiniment prolongée d'une seule réalisation de R ne permet pas d'inférence convergente sur sa loi \mathcal{L} .

⁽¹⁾ Équipe de Recherche « Processus stochastiques et applications » associée au C. N. R. S. (Section n° 2, « Théories Physiques et Probabilités »). Le texte a fait l'objet d'une communication orale au « Colloque sur le Traitement du Signal » (Nice, mai 1969).

SUMMARY. — Let \mathcal{L} be the probability law of a random points distribution $R = \{0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_\alpha \leq T_{\alpha+1} \leq \dots\}$ over $[0, +\infty)$; for every $t \in [0, +\infty)$, it is put :

$$N(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq T_1; \\ n & \text{if } T_n < t \leq T_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

The paper determines the necessary and sufficient structure of \mathcal{L} :

1° For R to be *Markovian*, that is to say for the random function $N(t)$ to be Markovian over $[0, +\infty)$.

2° For R to be *cumulative*; R is said to be cumulative, if for every fixed $T > 0$ and every positiv integer n , the probability law of $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ conditionnal when $N(T) = n$, is the uniform law over the domain :

$$0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n < T.$$

It is shown that: if R is cumulative, and if R is not a Poisson process, the observation of a *unique* realization of R over $[0, T[$, even if T is *arbitrary large*, does not permit any convergent inference on \mathcal{L} .

1. DÉFINITION DES RÉPARTITIONS PONCTUELLES MARKOVIENNES

Soit $\{U_1, U_2, \dots, U_\alpha, \dots\}$ une suite dénombrable ordonnée de variables aléatoires U_α ($\alpha = 1, 2, 3, \dots$) *non négatives*. Posons :

$$\left. \begin{aligned} G_1(u) &= \Pr(U_1 < u), \\ G_{\alpha+1}(u_1, u_2, \dots, u_\alpha; u) &= \Pr(U_{\alpha+1} < u / U_1 = u_1, U_2 = u_2, \dots, U_\alpha = u_\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (1,1)$$

$(\alpha = 1, 2, 3, \dots);$

et faisons la restriction que :

$$G_{\alpha+1}(u_1, u_2, \dots, u_\alpha; +0) = 0 \quad \forall \alpha \geq 1, u_1, u_2, \dots, u_\alpha \geq 0. \quad (1,2)$$

Posons :

$$T_1 = U_1, \quad T_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\alpha} U_\beta \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots); \quad (1,3)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1(u) &= G_1(u), \\ F_{\alpha+1}(\tau_\alpha; u) &= \Pr(U_{\alpha+1} < u / T_\alpha = \tau_\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (1,4)$$

$(\alpha = 1, 2, 3, \dots);$

$$N(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } T_1 \geq t, \\ n & \text{si } T_n < t \leq T_{n+1} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (t \geq 0) \quad (1,5)$$

A la restriction (1,2) près, le système $R = \{T_\alpha; \alpha = 1, 2, 3, \dots\}$ des T_α constitue la répartition ponctuelle aléatoire sur le demi-axe des temps $t \in [0, +\infty)$, la plus générale.

La signification, par rapport à cette répartition ponctuelle aléatoire, de la fonction aléatoire $N(t)$ est évidente; nous dirons que la répartition ponctuelle aléatoire est Markovienne, si $N(t)$ est Markovienne; c'est-à-dire si quels que soient :

- l'entier $n \geq 1$,
- $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < t < t' < +\infty$,
- l'entier $n' \geq n$,

$$\Pr[N(t') = n' / N(t) = n; T_1 = \tau_1, T_2 = \tau_2, \dots, T_n = \tau_n] = \Pr[N(t') = n' / N(t) = n]. \quad (1,6)$$

Pour que $N(t)$ soit Markovienne, il faut que :

1° Pour tout $\alpha \geq 1$,

$$G_{\alpha+1}(u_1, \dots, u_\alpha; u) = F_{\alpha+1}(\tau_\alpha; u); \quad (1,7)$$

2° Pour tout $\alpha \geq 1$, $F_{\alpha+1}(\tau_\alpha; u)$ est de la forme :

$$F_{\alpha+1}(\tau_\alpha; u) = 1 - \frac{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha + u)}{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha)}, \quad (1,8)$$

où $H_{\alpha+1}(x)$ est une fonction monotone non-croissante sur $x \in [0, +\infty)$, avec: $H_{\alpha+1}(+\infty) = 0$, et $H_{\alpha+1}(+0) < +\infty$. Bien entendu, $H_{\alpha+1}(x)$ n'intervient dans (1,8) qu'à un coefficient de proportionnalité près.

1° et 2° sont intuitifs et faciles à établir rigoureusement; bornons-nous à indiquer sommairement comment on peut, une fois admis 1°, établir 2°;

Soit $L_\alpha(\tau) = \Pr(T_\alpha < \tau)$ la fonction de répartition de T_α ($\alpha = 1, 2, 3, \dots$); pour $0 \leq \tau \leq t < t'$, et $d\tau > 0$, on a :

$$\Pr[\tau \leq T_n < \tau + d\tau, N(t) = n, N(t') = n] = dL_n(\tau)[1 - F_{n+1}(\tau; t' - \tau)]; \quad (1,9)$$

mais on a aussi :

$$\begin{aligned} \Pr[\tau \leq \tau_n < \tau + d\tau, N(t) = n, N(t') = n] &= \Pr[\tau \leq \tau_n < \tau + d\tau, N(t) = n] \\ &\quad \Pr[N(t') = n / \tau_n = \tau, N(t) = n], \\ &= dL_n(\tau)[1 - F_{n+1}(\tau; t - \tau)] \Pr[N(t') = n / \tau_n = \tau, N(t) = n]; \end{aligned} \quad (1,10)$$

en égalant (1,9) à (1,10), on obtient :

$$\Pr[\mathbf{N}(t') = n/\tau_n = \tau, \mathbf{N}(t) = n] = \frac{1 - F_{n+1}(\tau; t' - \tau)}{1 - F_{n+1}(\tau; t - \tau)}. \quad (1,11)$$

Pour que la fonction aléatoire $\mathbf{N}(t)$ soit Markovienne, il est nécessaire que le rapport (1,11) soit indépendant de τ ($0 \leq \tau \leq t$), pour tous t, t' fixés ($t < t'$); pour $\tau = t$, le rapport (1,11) vaut d'après (1,2) :

$$\frac{1 - F_{n+1}(t; t' - t)}{1 - F_{n+1}(t; +0)} = 1 - F_{n+1}(t; t' - t); \quad (1,12)$$

pour $\tau = +0$, le rapport (1,11) vaut :

$$\frac{1 - F_{n+1}(0; t')}{1 - F_{n+1}(0; t)}; \quad (1,13)$$

posons :

$$H_{n+1}(x) = 1 - F_{n+1}(0; x) \quad (x \geq 0);$$

en égalant (1,12) à (1,13), il vient :

$$F_{n+1}(t; t' - t) = 1 - \frac{H_{n+1}(t')}{H_{n+1}(t)};$$

soit (1,8), en changeant :

- la notation n , en α ;
- la notation t , en τ_α ,
- la notation $(t' - t)$ en u ;

de sorte que : $t' = (t' - t) + t = \tau_\alpha + u$.

Il est d'autre part facile de vérifier que les conditions (1,7), (1,8) sont suffisantes pour que $\mathbf{N}(t)$ soit Markovienne; nous avons donc le :

THÉORÈME (1,1). — Pour que la fonction aléatoire $\mathbf{N}(t)$ définie par (1,5) soit Markovienne, il faut et il suffit que pour tout entier $\alpha \geq 1$ (et avec les notations ci-dessus) :

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & G_{\alpha+1}(u_1, \dots, u_\alpha; u) = F_{\alpha+1}(\tau_\alpha; u); \\ 2^\circ \quad & F_{\alpha+1}(\tau_\alpha; u) = 1 - \frac{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha + u)}{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha)}, \end{aligned} \quad (1,14)$$

où $H_{\alpha+1}(x)$ est une fonction monotone non-croissante de $x \in [0, +\infty)$, avec : $H_{\alpha+1}(+\infty) = 0$ et $H_{\alpha+1}(+0) < +\infty$, qui n'est définie qu'à la proportionnalité près.

Remarque (1,1). — Si les conditions indiquées au Théorème (1,1) sont satisfaites, $N(t)$ est Markovienne quelle que soit $F_1(u)$; il nous sera commode pour la suite de poser :

$$F_1(u) = 1 - H_1(u).$$

Remarque (1,2). — Les répartitions ponctuelles aléatoires Markoviennes sont souvent appelées « processus de naissances » (sans décès, ni émigrations, ni immigrations).

Remarque (1,3). — Pour les répartitions ponctuelles aléatoires que nous considérons, l'instant 0 de début de la répartition, est un instant privilégié.

2. OPÉRATEUR INFINITÉSIMAL ASSOCIÉ

Désignons par \mathcal{E} l'ensemble des entiers finis et ≥ 0 ; posons :

$$P_k^j(t, \tau) = \Pr[N(\tau) = k/N(t) = j] [t < \tau; t, \tau \in [0, +\infty); j, k \in \mathcal{E}];$$

$$P(t, \tau) = \text{matrice d'éléments } P_k^j(t, \tau) (j, k \in \mathcal{E}).$$

$$\delta_k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ 1 & \text{si } j = k, \end{cases} \quad (j, k \in \mathcal{E})$$

I = matrice identique, d'éléments δ_k^j ;

Θ = matrice nulle, d'éléments tous nuls;

$P_k(t) = \Pr[N(t) = k], k \in \mathcal{E}, t \in [0, +\infty),$

$P(t) = \text{matrice d'éléments } P_k(t), k \in \mathcal{E}, t \in [0, +\infty);$

sous certaines conditions d'ailleurs très peu restrictives (pour lesquelles nous renvoyons par exemple à M. Fréchet [1]), le caractère Markovien de $N(t)$ entraîne que :

$$\lim_{t \rightarrow \tau-0} P(t, \tau) = I \quad (0 < t < \tau), \tag{2,1}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow t+0} P(t, \tau) = I \quad (0 \leq t < \tau); \tag{2,2}$$

et que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{P(t, t + \Delta t) - I}{\Delta t} = Q(t) \quad (0 \leq t) \tag{2,3}$$

existe; nous désignerons par $q_k^j(t)$ ($j, k \in \mathcal{E}$) les éléments de la matrice $Q(t)$,

dont on sait qu'elle représente l'opérateur infinitésimal associé; on a d'ailleurs :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \tau) + Q(t)P(t, \tau) = \Theta, \quad (2,4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(t, \tau) = P(t, \tau)Q(\tau). \quad (2,5)$$

On a d'ailleurs :

$$P_k(+0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

On sait que dans ces conditions, la donnée de $Q(t)$ détermine $P(t, \tau)$:

— soit par l'équation différentielle (2,4) complétée par la condition initiale (2,1);

— soit par l'équation différentielle (2,5) complétée par la condition initiale (2,2).

On peut donc dire que la loi de probabilité \mathcal{L} de R [ou de la fonction aléatoire $N(t)$] est déterminée :

— par $\{Q(t), t \in [0, +\infty)\}$;

— ou encore par le système des fonctions $H_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots$. La relation entre ces deux modes de description de \mathcal{L} se déduit de (2,3), d'après laquelle, en supposant les $H_\alpha(x)$ dérivables :

$$q_k^j(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{H_{j+1}(t)} \frac{d}{dt} H_{j+1}(t) & \text{si } k = j \\ -\frac{1}{H_{j+1}(t)} \frac{d}{dt} H_{j+1}(t) & \text{si } k = j + 1 \\ 0 & \text{dans tout autre cas} \end{array} \right\} \quad (2,6)$$

3. TESTS ET ESTIMATIONS SUR LA LOI DE PROBABILITÉ \mathcal{L} DE $N(t)$

Supposons que l'on observe *une* réalisation de R sur $[0, T[$, où $T > 0$ a une valeur fixée; cela revient à dire que l'on observe une réalisation $n(t)$ de $N(t)$ sur $[0, T]$; quelle information cette observation S apporte-t-elle sur la loi de probabilité \mathcal{L} de $N(t)$?

La question analogue pour un processus de Markov *homogène* quelconque, est résolue par diverses publications (parmi lesquelles on peut citer R. Fortet [1] et Bui-Trong-Lieu [1]); on peut en résumer les résultats

en disant que : sous des conditions très larges, les processus de Markov homogènes possèdent des propriétés ergodiques, qui assurent l'existence de tests, ou d'estimateurs, convergents lorsque $T \rightarrow +\infty$.

Mais ici nous avons à faire à une fonction aléatoire $N(t)$ qui est Markovienne, mais qui, sauf dans des cas de dégénérescence sans intérêt, n'est pas homogène; la question posée est donc à étudier; nous allons maintenant aborder cette étude.

Considérons une répartition ponctuelle aléatoire R , non-nécessairement Markovienne; posons :

$$\tau_1 = u_1, \tau_2 = u_1 + u_2, \dots, \tau_\alpha = u_1 + u_2 + \dots + u_\alpha, \dots ;$$

$$\bar{H}_1(u) = H_1(u), \bar{H}_{\alpha+1}(\tau_1, \dots, \tau_\alpha; u) = 1 - G_{\alpha+1}(u_1, \dots, u_\alpha; u);$$

pour alléger l'exposé, nous supposons que les fonctions $\bar{H}_\alpha(\tau_1, \dots, \tau_\alpha; x)$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) sont dérivables en x sur $[0, +\infty)$, mais le lecteur vérifiera sans peine que nos conclusions restent valables sans cette hypothèse.

Remarquons que l'observation S est constituée par : la valeur prise par $N(T)$; et par les valeurs prises par $T_1, T_2, \dots, T_{N(T)}$. Pour des valeurs données de n et de $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, considérons la probabilité \mathcal{P} que :

$$\begin{cases} N(T) = n, \\ \tau_\alpha \leq T_\alpha < \tau_\alpha + d\tau_\alpha \quad (d\tau_\alpha > 0; \alpha = 1, 2, \dots, n); \end{cases}$$

pour $d\tau_\alpha \rightarrow +0$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$), \mathcal{P} est équivalente à :

$$p_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1, d\tau_2, \dots, d\tau_n$$

où :

$$p_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \bar{H}_{n+1}(\tau_1, \dots, \tau_n; T - \tau_n)$$

$$\prod_{\alpha=1}^n \left[-\frac{d}{d\tau_\alpha} \bar{H}_\alpha(\tau_1, \dots, \tau_{\alpha-1}; \tau_\alpha - \tau_{\alpha-1}) \right]. \quad (3,1)$$

Remarque (3,1). — Si R est Markovienne, et d'après le Théorème (1,1), (3,1) se réduit à :

$$p_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = H_{n+1}(T) \prod_{\alpha=1}^n \left[-\frac{d}{d\tau_\alpha} \frac{H_\alpha(\tau_\alpha)}{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha)} \right]; \quad (3,2)$$

(3,2) peut aussi s'obtenir en suivant la méthode de R. Fortet [1], ou de Bui-Trong-Lieu [1] : cette méthode donne l'expression de $p_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ à partir de $Q(t)$, expression dont on peut déduire (3,2) à l'aide de (2,6).

Répartitions ponctuelles cumulatives

De (3,1), on peut tirer quelques applications évidentes; par exemple, supposons que la loi \mathcal{L} dépende d'un paramètre θ ; pour fixer les idées, supposons plus précisément que θ est un paramètre numérique unidimensionnel; (3,1) permet immédiatement de former l'« équation de vraisemblance » relative à θ .

Mais la question la plus intéressante à se poser semble être la suivante, naturellement suggérée par la forme du second membre de (3,1) et surtout de (3,2).

Disons que la répartition ponctuelle R est *cumulative* si :

- quel que soit $T > 0$,
- quel que soit l'entier $n > 0$,

la loi de probabilité de $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, conditionnelle quand $N(T) = n$, est la loi uniforme sur le domaine: $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n < T$; ce qui revient à dire que $p_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ne dépend pas de τ_1, \dots, τ_n , mais seulement de n et de T .

Nous appellerons (C) la classe des lois \mathcal{L} pour lesquelles R est cumulative.

Cherchons des conditions nécessaires pour que la répartition ponctuelle R , *a priori* non-nécessairement Markovienne, soit cumulative. Considérons $p_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, d'abord dans le cas $n = 1$:

$$p_1(\tau_1) = \bar{H}_2(\tau_1; T - \tau_1) \times -\frac{d}{d\tau_1} H_1(\tau_1); \quad (3,3)$$

si $p_1(\tau_1)$ ne dépend pas de τ_1 , $\bar{H}_2(\tau_1; T - \tau_1)$ est le quotient d'une fonction $A(T)$ de T seul, par une fonction $B(\tau_1)$ de τ_1 seul :

$$\bar{H}_2(\tau_1; T - \tau_1) = \frac{A(T)}{B(\tau_1)},$$

soit en posant : $T - \tau_1 = u$,

$$\bar{H}_2(\tau_1; u) = \frac{A(\tau_1 + u)}{B(\tau_1)};$$

mais $\bar{H}_2(\tau_1; +0) = 1$, donc : $B(\tau_1) \equiv A(\tau_1)$; de sorte que en posant :

$$A(x) = H_2(x),$$

$\bar{H}_2(\tau_1; u)$ est de la forme:

$$\bar{H}_2(\tau_1; u) = \frac{H_2(\tau_1 + u)}{H_2(\tau_1)};$$

$p_1(\tau_1)$ a donc pour expression :

$$p_1(\tau_1) = H_2(T) \times \left[-\frac{\frac{d}{d\tau_1} H_1(\tau_1)}{H_2(\tau_1)} \right];$$

il est donc nécessaire que :

$$H_2(\tau_1) = -\frac{d}{d\tau_1} H_1(\tau_1) \times \rho_2,$$

où ρ_2 est une constante ; mais puisque $H_2(x)$ n'intervient qu'à la proportionnalité près, on peut prendre $\rho_2 = 1$.

Raisonnons maintenant par récurrence ; supposons prouvé qu'il existe $(n - 1)$ fonctions $H_2(x), \dots, H_n(x)$ telles que :

$$\bar{H}_{\alpha+1}(\tau_1, \dots, \tau_\alpha; u) = \frac{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha + u)}{H_{\alpha+1}(\tau_\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n - 1),$$

et que :

$$H_{\alpha+1}(x) = (-1) \frac{d}{dx} H_\alpha(x);$$

alors :

$$p_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \bar{H}_{n+1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n; T - \tau_n) \times -\frac{d}{d\tau_n} H_n(\tau_n);$$

pour que $p_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ soit, pour tout T , indépendant de $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, il faudra visiblement que $\bar{H}_{n+1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n; u)$ soit de la forme :

$$\bar{H}_{n+1}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n; u) = \frac{H_{n+1}(\tau_n + u)}{H_{n+1}(\tau_n)}, \quad (3,4)$$

avec la fonction $H_{n+1}(x)$ définie par :

$$H_{n+1}(x) = (-1) \frac{d}{dx} H_n(x).$$

Maintenant, observons que $H_1(x)$ est ≥ 0 et monotone non-croissante ; raisonnons encore par récurrence, supposons prouvé que

$$H_1(x), H_2(x), \dots, H_n(x)$$

sont ≥ 0 et monotones non-croissantes ; alors :

$$-\frac{d}{dx} H_n(x)$$

est ≥ 0 , donc selon (3,4) $H_{n+1}(x)$ est ≥ 0 ; mais alors selon (3,4), $H_{n+1}(x)$ est monotone non-croissante, puisque, en u , $\bar{H}_{n+1}(\tau_1, \dots, \tau_n; u)$ est monotone non-croissante.

On tire alors de (3,5) que pour tout $\alpha > 0$:

$$(-1)^\alpha \frac{d}{dx^\alpha} H_1(x) = H_{\alpha+1}(x) \geq 0;$$

d'ailleurs $H_1(x)$ est ≥ 0 ; donc $H_1(x)$ doit être une fonction *complètement monotone* (cf. par exemple R. Fortet [2]) sur $]0, +\infty[$; compte tenu des propriétés des fonctions complètement monotones, compte tenu de ce que $H_1(+0) = 1$, $H_1(+\infty) = 0$, on obtient le :

THÉORÈME (3,1). — Pour qu'une répartition ponctuelle aléatoire soit cumulative, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit Markovienne, et qu'il existe une fonction de répartition $K(y)$ sur $y \in [0, +\infty[$ telle que :

$$K(+0) = 0, \quad K(+\infty) = 1,$$

et que pour tout $\alpha = 0, 1, 2, \dots$,

$$H_{\alpha+1}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} y^\alpha dK(y), \quad (3,6)$$

où les $H_{\alpha+1}(x)$ sont les fonctions introduites au Théorème (1,1).

4. LOI DE PROBABILITÉ DE $N(T)$ DANS LE CAS D'UNE RÉPARTITION PONCTUELLE CUMULATIVE

Pour une répartition ponctuelle cumulative, $p_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ se réduit à :

$$p_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = H_{n+1}(T); \quad (4,1)$$

on en déduit pour la probabilité $P_n(0, T) = \Pr[N(T) = n]$, que :

$$P_n(0, T) = \frac{T^n}{n} H_{n+1}(T),$$

soit d'après (3,5) :

$$P_n(0, T) = \int_0^{+\infty} e^{-Ty} \frac{(Ty)^n}{n} dK(y); \quad (4,2)$$

la fonction caractéristique $\varphi(0, T | \omega) = E[e^{i\omega N(T)}]$ de $N(T)$ est donc égale à :

$$\varphi(0; T | \omega) = \int_0^{+\infty} e^{(e^{i\omega} - 1)Ty} dK(y). \tag{4,3}$$

Posons :

$$\mu = \int_0^{+\infty} y dK(y), \quad \mu^2 + \sigma^2 = \int_0^{+\infty} y^2 dK(y), \tag{4,4}$$

en supposant que les intégrales (4,4) sont convergentes. On déduit de (4,3) :

$$E[N(T)] = \mu T, \tag{4,5}$$

et, pour la variance $\mathcal{V}[N(T)]$ de $N(T)$:

$$\mathcal{V}[N(T)] = \mu T + \sigma^2 T^2. \tag{4,6}$$

Cas où $\sigma = 0$. — $\sigma = 0$ si et seulement si la répartition de masse décrite par la fonction de répartition $K(y)$, se réduit à une masse 1 placée à l'abscisse $y = \mu$; alors (3,5) et (1,14) montrent que la répartition ponctuelle aléatoire est un *processus de Poisson homogène*, de densité moyenne μ . Alors, $N(T)$ obéit à la loi de Poisson de paramètre μT ; si l'on pose :

$$N(T) = \mu T + \sqrt{\mu T} L, \tag{4,7}$$

asymptotiquement lorsque $T \rightarrow +\infty$. L obéit à la loi de Laplace d'espérance mathématique nulle et d'écart type égal à 1.

Cas général $\sigma \neq 0$. — Dans le cas général où $\sigma^2 > 0$ (avec : $\sigma^2 < +\infty$), posons :

$$N(T) = \mu T + \sqrt{\mu T + \sigma^2 T^2} \cdot V; \tag{4,8}$$

d'après (4,3), la fonction caractéristique de V tend lorsque $T \rightarrow +\infty$, vers :

$$e^{-i\frac{\mu}{\sigma}\omega} \int_0^{+\infty} e^{i\frac{\omega}{\sigma}y} dK(y), \tag{4,9}$$

et cette convergence est uniforme en ω sur tout intervalle fini ; or (4,9) est la fonction caractéristique de la fonction de répartition (en v) $K(\mu + \sigma v)$; on a donc asymptotiquement lorsque $T \rightarrow +\infty$:

$$\Pr(V < v) \sim K(\mu + \sigma v). \blacksquare \tag{4,10}$$

Que les intégrales (4,4) convergent ou non, on déduit de (4,3) que :

THÉORÈME (4,1). — La loi de probabilité de $\frac{N(T)}{T}$ tend, lorsque $T \rightarrow +\infty$, vers la loi de probabilité sur $[0, +\infty)$ définie par la fonction de répartition $K(y)$.

Loi de probabilité de $N(t_0 + T) - N(t_0)$

Considérons une répartition ponctuelle Markovienne R .

Soient $t_0 \geq 0$ un instant fixé, et $T > 0$ une durée fixée; supposons que l'on observe R sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T[$; l'observation $S_{t_0}(T)$ correspondante est constituée par :

- la valeur n prise par $N(t_0 + T) - N(t_0)$;
- les emplacements $\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n$ des n points de la répartition ponctuelle appartenant à $[t_0, t_0 + T[$; nous supposons $\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n$ numérotés par valeurs croissantes.

Si m est la valeur prise par $N(t_0)$, $\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n$ ne sont autres que les valeurs prises par $T_{m+1}, T_{m+2}, \dots, T_{m+n}$ respectivement; mais notons bien que la valeur m prise par $N(t_0)$ n'est pas observée.

De (4,1), on déduit aisément que :

THÉORÈME (4,2). — Dans le cas d'une répartition ponctuelle cumulative, $N(t_0 + T) - N(T)$ est un résumé exhaustif de l'observation $S_{t_0}(T)$; et $N(t_0 + T) - N(T)$ obéit à la même loi de probabilité, définie par (4,2) et (4,3), que $N(T)$.

Tests et estimations pour une répartition ponctuelle cumulative

Limitons-nous dorénavant aux répartitions ponctuelles cumulatives.

Une conséquence particulière du Théorème (4,2) est que: si t_0 est inconnu, l'observation $S_{t_0}(T)$ n'apporte aucune information sur la valeur de t_0 , dont l'estimation est donc impossible.

Dans le même ordre d'idées, supposons connu que $t_0 = 0$, de sorte que l'observation $S_{t_0}(T)$ n'est autre que l'observation désignée plus haut par S .

L'intérêt de distinguer la catégorie particulière des répartitions ponctuelles cumulatives, réside en ce que pour tout $T > 0$, $N(T) -$ ou, c'est équivalent, $N(T)/T -$ est un résumé de S , *exhaustif pour la classe (C) de lois \mathcal{L}* .

Cette exhaustivité est à première vue une agréable simplification; mais

la valeur Y de $N(T)/T$ est une information très limitée ; nous allons faire la constatation suivante :

Sachant que $\mathcal{L} \in (C)$ et que R n'est pas un processus de Poisson homogène, mais \mathcal{L} étant par ailleurs partiellement ou totalement inconnue, toute inférence sur \mathcal{L} fondée sur l'observation sur $[0, T]$ d'une seule réalisation de R , comporte une probabilité d'erreur qui ne tend pas vers 0 lorsque $T \rightarrow +\infty$.

Par exemple, supposons que $K(y) = K(\theta | y)$ dépende d'un paramètre θ ; posons-nous d'abord le

PROBLÈME P_1 . — Soient θ_1 et θ_2 deux valeurs données distinctes de θ ; posons pour $\alpha = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= \int_0^{+\infty} y d_y K(\theta_\alpha | y), \\ \mu_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 &= \int_0^{+\infty} y^2 d_y K(\theta_\alpha | y), \end{aligned}$$

et supposons que $\sigma_\alpha \neq 0$ pour $\alpha = 1$ et 2 .

Soit \mathcal{H}_1 l'hypothèse que $\theta = \theta_1$ et \mathcal{H}_2 l'hypothèse que $\theta = \theta_2$; et soit à discriminer entre les hypothèses \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , supposées équiprobables *a priori*.

Il résulte du Théorème (4,1) que ce Problème 1 est, asymptotiquement pour $T \rightarrow +\infty$, équivalent au problème P_1^∞ suivant : une variable aléatoire Y de $[Y \in [0, +\infty[)$ a pour fonction de répartition, soit $K(\theta_1 | y)$ [hypothèse \mathcal{H}_1^∞], soit $K(\theta_2 | y)$ [hypothèse \mathcal{H}_2^∞] ; connaissant une — et une seule — réalisation y de Y , discriminer entre les hypothèses \mathcal{H}_1^∞ et \mathcal{H}_2^∞ .

Naturellement, la meilleure solution de P_1^∞ est exprimée par la règle suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } \frac{d_y K(\theta_1 | y)}{d_y K(\theta_2 | y)} > 1, & \quad \text{adopter l'hypothèse } \mathcal{H}_1^\infty ; \\ \text{si } \frac{d_y K(\theta_1 | y)}{d_y K(\theta_2 | y)} < 1, & \quad \text{adopter l'hypothèse } \mathcal{H}_2^\infty. \end{aligned}$$

Il est donc clair que la meilleure solution de P_1 comporte une probabilité d'erreur qui ne tend pas vers 0 lorsque $T \rightarrow +\infty$, et dont on peut d'ailleurs facilement évaluer la limite lorsque $T \rightarrow +\infty$. Posons-nous maintenant le

PROBLÈME P_2 . — Soit à estimer la valeur de θ supposée inconnue.

Il résulte du Théorème (4,1) que P_2 est, asymptotiquement lorsque $T \rightarrow +\infty$, équivalent au problème P_2^∞ suivant : une variable aléatoire

$Y[Y \in [0, +\infty]]$ a pour fonction de répartition $K(\theta | y)$, où θ a une valeur fixée mais inconnue θ_0 ; on suppose, en posant :

$$\mu = \int_0^{+\infty} y d_y K(\theta_0 | y), \quad \mu^2 + \sigma^2 = \int_0^{+\infty} y^2 d_y K(\theta_0 | y),$$

que : $\sigma^2 > 0$. Connaissant une — et une seule — réalisation y de Y , estimer la valeur de θ_0 .

Il est clair d'après P_2^∞ , qu'il ne peut exister pour P_2 , un estimateur convergent stochastiquement vers θ_0 lorsque $T \rightarrow +\infty$. Le seul type de test admettant une solution convergente semble être le suivant :

PROBLÈME P_3 . — Soient μ un nombre positif donné ; $K(y)$ une fonction de répartition donnée sur $[0, +\infty)$, telle que :

$$\mu = \int_0^{+\infty} y d_y K(y),$$

et que si l'on pose :

$$\mu^2 + \sigma^2 = \int_0^{+\infty} y^2 d_y K(y),$$

on ait : $\sigma^2 > 0$.

Soit \mathcal{H}_0 l'hypothèse que $N(t)$ est un processus de Poisson homogène de densité moyenne μ ; et \mathcal{H} l'hypothèse que $N(t)$ est une répartition ponctuelle cumulative, de loi déterminée par (3,4).

Soit à discriminer entre les hypothèses \mathcal{H}_0 et \mathcal{H} .

Asymptotiquement lorsque $T \rightarrow +\infty$, P_3 est équivalent au problème P_3^∞ suivant : soit Y une variable aléatoire qui dans l'hypothèse \mathcal{H}_0^∞ est presque sûrement égale à μ , et dans l'hypothèse \mathcal{H}^∞ a pour fonction de répartition $K(y)$; connaissant une — et une seule — réalisation y de Y , discriminer entre les hypothèses \mathcal{H}_0^∞ et \mathcal{H}^∞ .

En supposant que μ est un point de continuité pour $K(y)$, il est clair que la discrimination objet de P_3^∞ , peut être effectuée avec une probabilité d'erreur nulle; par conséquent, la discrimination objet de P_3 peut être effectuée (et il est facile de préciser comment) de telle sorte que la probabilité d'erreur soit infiniment petite si $T \rightarrow +\infty$.

5. EXEMPLE DES PROCESSUS DE POLYA

Les processus de Polya sont un des rares exemples de répartition ponctuelle aléatoire non stationnaire explicitement considérés dans la littéra-

ture ; ils ont en outre reçu quelques applications ; on les a par exemple proposés pour modèles dans des problèmes de surveillance.

Les processus de Polya sont habituellement définis de la façon suivante (cf. A. T. Bharucha-Reid [1]) :

Soient μ et σ deux constantes positives quelconques ; nous poserons :

$$a = \frac{\sigma^2}{\mu^2} ;$$

on appelle processus de Polya $P(\mu, a)$, la répartition ponctuelle aléatoire *Markovienne* dont l'opérateur infinitésimal est défini par :

$$q_k^j(t) = \left\{ \begin{array}{ll} -\mu \frac{\mu^2 + \sigma^2 j}{\mu^2 + \sigma^2 \mu t} = -\mu \frac{1 + aj}{1 + a\mu t} & \text{si } k = j, \\ +\mu \frac{\mu^2 + \sigma^2 j}{\mu^2 + \sigma^2 \mu t} = +\mu \frac{1 + aj}{1 + a\mu t} & \text{si } k = j + 1, \\ 0 & \text{dans tout autre cas.} \end{array} \right\} \quad (5,1)$$

L'intégration par exemple de (2,5) avec (2,2), avec les $q_k^j(t)$ définis par (5,1), donne sans difficulté :

$$P_k^j(t, \tau) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + j\right)} \frac{[a\mu(\tau - t)]^{k-j} (1 + a\mu t)^{\frac{1}{a}+j}}{(k-j)! (1 + a\mu\tau)^{\frac{1}{a}+k}} \quad (0 \leq t < \tau ; k \geq j). \quad (5,2)$$

D'après (2,6), les fonctions $H_{\alpha+1}(x)$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$) sont données, à un coefficient de proportionnalité près, par :

$$H_{\alpha+1}(x) = (1 + a\mu x)^{-\frac{1}{a}-\alpha} \quad (5,3)$$

Avec (1,14), on en déduit facilement la densité de probabilité $l_\alpha(t)$ ($t \geq 0 ; \alpha = 1, 2, \dots$) de T_α :

$$l_\alpha(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a} + \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)} \frac{a^\alpha \mu^\alpha}{(\alpha - 1)!} \frac{t^{\alpha-1}}{(1 + a\mu t)^{\frac{1}{a}+\alpha}}. \quad (5,4)$$

On remarque que si $a \geq 1$:

$$E(T_1) = + \infty,$$

et par suite :

$$E(T_x) = + \infty \quad \text{pour tout} \quad \alpha \geq 1.$$

Par contre, si $a < 1$, $E(T_x)$ est finie et a pour valeur :

$$E(T_x) = \frac{\alpha}{\mu(1-a)}; \quad (5,5)$$

d'une façon analogue, T_x n'admet une variance $\mathcal{V}(T_x)$ finie que si $a < \frac{1}{2}$, et alors :

$$\mathcal{V}(T_x) = \frac{\alpha[1 + a(\alpha - 1)]}{\mu^2(1-a)^2(1-2a)}. \quad (5,6)$$

Remarque (5,1). — En faisant $\sigma = 0$, c'est-à-dire $a = 0$, dans (5,1), on retrouve les formules qui définissent l'opérateur infinitésimal d'un processus de Poisson homogène de densité moyenne μ ; celui-ci peut donc être considéré comme un processus de Polya dégénéré, soit le processus $P(\mu, +0)$.

Estimation des paramètres μ et a pour un processus $P(\mu, a)$

Soit à estimer, à partir de l'observation S , les paramètres μ et a , supposés tous deux inconnus (mais dans l'hypothèse $a > 0$) de $P(\mu, a)$. Il est facile de constater directement les faits suivants :

1° $N(T)$ est un résumé exhaustif de S .

2° Compte tenu de cette exhaustivité, et en désignant par n la valeur observée de $N(T)$, la méthode du « maximum de vraisemblance » fournit les équations de vraisemblance suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} P_n^0(0, T) = 0, \quad (5,7)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} P_n^0(0, T) = 0. \quad (5,8)$$

Après réduction, (5,7) s'écrit :

$$n = \mu T; \quad (5,9)$$

par conséquent l'estimateur $\hat{\mu}$ de μ fourni par le maximum de vraisemblance est :

$$\hat{\mu} = \frac{N(T)}{T}; \quad (5,10)$$

l'espérance mathématique $E(\hat{\mu})$ et la variance $\mathcal{V}(\hat{\mu})$ de $\hat{\mu}$ ont pour valeurs :

$$E(\hat{\mu}) = \mu, \quad \mathcal{V}(\hat{\mu}) = \mu \left(a\mu + \frac{1}{T} \right); \tag{5,11}$$

par conséquent, $\hat{\mu}$ est un estimateur *sans biais*, mais qui ne converge pas stochastiquement vers μ lorsque $T \rightarrow +\infty$.

Pourtant, $\hat{\mu}$ est un estimateur de μ , optimal en ce qu'il est à *variance minimum* (parmi tous les estimateurs sans biais) : cela est lié classiquement (cf. C. Fourgeaud et A. Fuchs [1]) au fait que $\hat{\mu}$ est l'estimateur du « maximum de vraisemblance », et se vérifie directement sans difficulté par le procédé habituel (fondé sur l'inégalité de Schwarz).

L'équation (5,8) équivaut à :

$$\log(1 + a\mu T) - \frac{1 + na}{1 + \mu T a} aT + a \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\alpha a}{1 + \alpha a} = 0; \tag{5,12}$$

si dans (5,12) on remplace μ par la valeur $\frac{n}{T}$ fournie par (5,9), il vient :

$$\log(1 + an) - \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{a}{1 + \alpha a} = 0; \tag{5,13}$$

à l'aide de la formule de Taylor, le premier membre de (5,13) s'écrit :

$$- \frac{a}{2} \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{1}{[1 + (\alpha + \eta_\alpha)a]^2}, \tag{5,14}$$

ou les η_α ($\alpha = 0, 1, \dots, n-1$) sont des nombres compris entre 0 et 1 ; (5,14) est toujours négatif pour $a > 0$, et prend la valeur 0 seulement pour la valeur limite $a = 0$ [cas d'un processus de Poisson $P(\mu, +0)$] ; aussi, quelle que soit la vraie valeur supposée > 0 de a , quels que soient n et T , la méthode du maximum de vraisemblance conduirait à estimer que $a = 0$, ce qui n'est évidemment pas admissible.

Ces résultats s'expliquent aisément : d'après (5,3),

$$H_1(x) = (1 + a\mu x)^{-\frac{1}{a}},$$

et, à un coefficient de proportionnalité près, on a pour tout α :

$$H_{\alpha+1}(x) = (-1)^\alpha \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} H_1(x);$$

