

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. DUFLO

D. REVUZ

Propriétés asymptotiques des probabilités de transition des processus de Markov récurrents

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, n° 3 (1969), p. 233-244

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_3_233_0

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Propriétés asymptotiques des probabilités de transition des processus de Markov récurrents

par

M. DUFLO (*) et D. REVUZ (*)
(Paris).

SOMMAIRE. — Le but de cet article est de montrer que pour un processus de Markov récurrent de semi-groupe de transition $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et de mesure invariante μ , on a $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(x, A) = \mu(A)/\mu(E)$ pour tout ensemble A de mesure finie. On démontre également que la tribu asymptotique est grossière et on généralise les résultats obtenus par Orey dans le cas discret.

SUMMARY. — The goal of this paper is to show that for a recurrent Markov process with transition semi-group $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ and invariant measure μ , one has $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(x, A) = \mu(A)/\mu(E)$ for every set A such that $\mu(A)$ is finite. The tail σ -field is shown to be trivial and the results of Orey for the discrete case are generalised.

Les théorèmes limites pour les fonctions de transition des chaînes de Markov discrètes sont connus depuis longtemps [5]. Plus récemment, dans une série d'articles, Harris [8], Orey [12], Jain [9], Jamison et Orey [10] ont étendu ces résultats aux chaînes de Markov à valeur dans un espace mesurable quelconque et récurrentes au sens de Harris.

Notre propos est d'utiliser ici ces résultats, afin de donner pour les

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la Section n° 2 « Théories physiques et probabilités » associée au C. N. R. S.

processus de Markov à temps continu une description semblable. Si μ est la mesure invariante du processus et P_t son semi-groupe, nous cherchons à obtenir les théorèmes limites du type :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(x, A) = \mu(A)/\mu(E)$$

où $\mu(A) < \infty$ et où E est l'espace d'états et plus généralement :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v_1 P_t(\cdot) - v_2 P_t(\cdot)\| = 0$$

où v_1 et v_2 sont deux probabilités sur E . Pour cela nous ferons l'hypothèse que la fonction de transition a une partie absolument continue par rapport à μ , hypothèse qui sera justifiée et explicitée dans le premier paragraphe.

I. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

I.1. — Dans tout cet article, nous étudierons un processus de Markov que, pour fixer les idées, nous supposons de Hunt, c'est-à-dire un terme :

$$X = \{ \Omega, \mathcal{F}, (P_x)_{x \in E}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \}$$

à valeur dans un espace E localement compact à base dénombrable. Pour toutes les définitions et notations nous renvoyons à [2]. Signalons seulement que nous appellerons \mathcal{B} la tribu borélienne de E et $\overline{\mathcal{B}}$ sa complétée universelle. Le semi-groupe sera noté P_t , et la fonction de transition $P_t(x, A)$; si f est borélienne, on a :

$$P_t f(x) = \int P_t(x, dy) f(y) = E_x[f(X_t)].$$

Notre hypothèse essentielle est que le processus est récurrent au sens de Harris, c'est-à-dire qu'il existe une mesure m telle que $m(A) > 0$ entraîne :

$$P_x \left[\int_0^\infty 1_A(X_s) ds = \infty \right] = 1$$

pour tout x de E . On sait ([1], [2]) qu'il existe alors une mesure invariante μ pour le semi-groupe P_t , qui jouit de la même propriété que m . Si $\mu(E) = \infty$ on dira que le processus est *nul*, on le dira *positif* dans le cas contraire et on prendra alors $\mu(E) = 1$.

I.2. — Si l'on veut obtenir des théorèmes du type

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(x, A) = \mu(A)/\mu(E),$$

on s'aperçoit immédiatement qu'il faut écarter les processus présentant des phénomènes cycliques comme la translation sur le cercle. La proposition suivante sépare le cas périodique du cas apériodique.

L'espace E étant à base dénombrable, la décomposition de Lebesgue de $P_t(x, \cdot)$ par rapport à μ peut s'écrire

$$P_t(x, \cdot) = P_t^0(x, \cdot) + P_t^1(x, \cdot)$$

où
$$P_t^0(x, A) = \int_A p_t(x, y)\mu(dy);$$

P^0 et P^1 sont des noyaux et $p_t(x, y)$ peut être choisie mesurable par rapport au couple (x, y) . Il n'est pas difficile de montrer que

$$P_{t+s}^1(x, \cdot) \leq \int P_t^1(x, dy)P_s^1(y, \cdot)$$

et que $P_t^1(x, E)$ est une fonction décroissante de t (cf. [6]). On a alors :

PROPOSITION. — Il n'y a que deux cas possibles :

- 1) ou bien μ -presque sûrement $P_t^1(\cdot, E) = 1$ pour tout réel positif t ;
- 2) ou bien $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t^1(x, E) = 0$ pour tout x de E.

Démonstration. — Soit $g(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t^1(x, E)$; cette fonction est mesurable et $1 - g$ est surmédiane ; en effet :

$$P_s(1 - g)(x) = 1 - \int P_s^0(x, dy)g(y) - \int P_s^1(x, dy)g(y);$$

comme $g \leq 1$ et $P_{t+s}^1 \leq P_t^1 P_s^1$ on a $P_t^1 g \geq g$, d'où :

$$P_s(1 - g)(x) \leq 1 - g - \int P_s^0(x, dy)g(y) \leq 1 - g.$$

La proposition III.3 de [1] entraîne que $1 - g$ est égale μ -p. s. à une constante $1 - a \in [0, 1]$ et supérieure ou égale à $1 - a$ partout.

En appliquant le théorème de Lebesgue on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{s \rightarrow \infty} P_{t+s}^1(x, E) \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \int P_t^1(x, dy)P_s^1(y, E) \\ &= \int P_t^1(x, dy)g(y) \leq aP_t^1(x, E); \end{aligned}$$

d'où en passant à la limite $g(x) \leq ag(x)$ et $a \leq a^2$, on a donc : $a = 1$ ou $a = 0$; dans le second cas $g(x) \leq 0$, donc $g(x) = 0$ partout.

DÉFINITION. — Dans la première alternative de la proposition ci-dessus le processus sera dit singulier. Il sera dit régulier dans le cas contraire.

Remarquons que si le semi-groupe P_t est fortement fellerien le processus est régulier. En effet si A est de mesure nulle l'ensemble $\{x : P_t(x, A) > 0\}$ est un ouvert, et il est impossible qu'il soit chargé par μ , il est donc vide. Dans ce cas $P_t^1(x, E) = 0$ pour tout $t > 0$.

Remarquons aussi que si l'on a deux processus en dualité, ils sont réguliers ou singuliers simultanément.

II. THÉORÈMES LIMITES POUR LES PROCESSUS RÉCURRENTS RÉGULIERS

Nous étudions désormais les processus récurrents et réguliers.

II.1. PROPOSITION. — La tribu \mathcal{C} des ensembles Γ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \exists \Gamma_t \in \overline{\mathcal{B}} : P_t 1_{\Gamma_t} = 1_{\Gamma_t} \quad \mu\text{-presque sûrement,}$$

est grossière μ -presque sûrement.

Démonstration. — Elle sera faite en deux parties dont la première suit Foguel [7].

a) \mathcal{C} est purement atomique.

Soit m une mesure bornée équivalente à μ , et $f_t(x, y)$ une densité de $P_t^0(x, \cdot)$ par rapport à m . Soit A un ensemble de la partie non atomique de \mathcal{C} ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, A peut s'écrire

$$A = \bigcup_{j=1}^n A_j^n \quad \text{avec} \quad A_j^n \in \mathcal{C} \quad A_j^n \cap A_i^n = \emptyset \quad \text{si } i \neq j,$$

et

$$m(A_j^n) = \frac{1}{n} m(A).$$

Pour un t fixé, $P_t(\cdot, A) = 1_{A_t}(\cdot)$ μ -p. s.; donc pour μ -presque tout x il existe un indice $j(x)$ et un seul tel que $P_t(x, A) = P_t(x, A_{j(x)}^n) = 1$; donc :

$$P_t^0(x, A) = P_t^0(x, A_{j(x)}^n) = \int f_t(x, y) 1_{A_{j(x)}^n}(y) m(dy) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par suite $\mu(\{x : P_t^1(x, A) = 1\}) = \mu(A)$ ce qui contredit l'hypothèse que le processus est apériodique.

b) \mathcal{C} ne contient pas d'atomes.

Soit A un atome de \mathcal{C} de mesure positive. Soit $t \in \mathbb{R}_+$, par hypothèse μ -p. s.,

$$P_t(x, A) = \sum_k 1_{A_k}(x)$$

où les A_k sont des atomes de \mathcal{C} pour m ($m(A_k) > 0$). Par définition de la récurrence :

$$\int_A m(dx) \int_0^\infty P_s(x, A) ds = + \infty,$$

il existe donc un sous-ensemble de A de mesure positive et des nombres s aussi grands que l'on veut tels que $P_s(x, A) > 0$ sur cet ensemble ; pour un tel s , on a $P_s(x, A) = 1_A(x)$ μ -p. s. par définition de \mathcal{C} . Choisissons s assez grand pour que $\|P_{s-t}^1(x, \cdot)\| < \varepsilon < 1$ sur un ensemble $M \subset A$ et de mesure positive. Alors comme μ -p. s. :

$$1_A(x) = P_s(x, A) = \int P_{s-t}^0(x, dy)P_t(y, A) + \int P_{s-t}^1(x, dy)P_t(y, A),$$

pour m -presque tout x de M , $P_{s-t}^0(x, dy) \geq 1_A(x) - \varepsilon > 0$, et par suite $P_{s-t}(x, \Sigma A_k) > 0$. Comme $P_{s-t}(x, \Sigma A_k)$ ne vaut que 0 ou 1 et est constante m -p. s. sur A , on a $P_{s-t}(x, \Sigma A_k) = 1_A(x)$ m -p. s., soit

$$\sum_k P_{s-t}(x, A_k) = 1_A(x) m\text{-p. s.}$$

Or $P_{s-t}(x, A_k)$ ne vaut que 0 ou 1 et est également constante m -p. s. sur A , il existe donc un A_k et un seul soit A_t tel que $P_{s-t}(x, A_t) = 1_A(x)$ et l'on a

$$\mu(A_t) = \int \mu(dx) P_{s-t}(x, A_t) = \mu(A);$$

par suite $P_t(x, A) = 1_{A_t}(x)$ m -p. s.

Pour tout t il existe donc un atome A_t de même μ -mesure que A tel que $P_t(x, A) = 1_{A_t}(x)$ μ -p. s. Les ensembles A_t sont donc disjoints ou confondus et nous poserons :

$$\mathcal{T} = \inf \{ t > 0 : A \cap A_t = \emptyset \text{ } \mu\text{-p. s.} \}$$

Nous allons maintenant étudier les deux cas suivants :

1) $\mathcal{T} > 0$. Comme $(A_t)_s = A_{t+s}$ et que pour tout t , il existe $s < \mathcal{T}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $t = ns$, il s'ensuit que $A_t = A$ μ -p. s. pour tout t , soit

$$P_t(\cdot, A) = 1_A(\cdot) \text{ } \mu\text{-p. s.}$$

P_t est conservatif sur E et la tribu des ensembles invariants par P_t est grossière (cf. [11]) donc $A = \emptyset$, ou $A = E$ μ -p. s.

2) $\mathcal{F} = 0$. Soit θ un nombre réel tel que $\mu(\{x \in A : P_\theta^1(x, E) < 1\}) > 0$, et posons :

$$G = \{t \geq \theta : P_t(\cdot, A) = 1_A(\cdot) \mu\text{-p. s.}\}.$$

Soient $t_1 \geq t_2 \geq \theta$, $t_1, t_2 \in G$; il existe un point y tel que

$$P_{t_1}(y, A) = P_{t_2}(y, A) = 1 \quad \text{et} \quad P_{t_2}^1(y, E) < 1;$$

supposons que

$$P_{t_1-t_2}(y, A) = 1_A, \neq 1_A \mu\text{-p. s.},$$

on a :

$$1 = P_{t_1}(y, A) = P_{t_2} P_{t_1-t_2}(y, A) = P_{t_2}^0 P_{t_1-t_2}(y, A) + P_{t_2}^1 P_{t_1-t_2}(y, A);$$

or $P_{t_2}^0 P_{t_1-t_2}(y, A) = 0$ et $P_{t_2}^1(y, E) < 1$, on arrive donc à $1 < 1$ et par suite $P_{t_1-t_2}(\cdot, A) = 1_A$ μ -p. s. Si l'ensemble G était de mesure de Lebesgue positive, l'ensemble $G - G$ contiendrait un ouvert contenant l'origine, ce qui contredirait donc l'hypothèse $\mathcal{F} = 0$. Si λ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , on a donc $\lambda(G) = 0$. Mais :

$$\int_A \mu(dx) \int_0^\infty P_t(x, A) dt = \int_\theta^\infty dt \int_A \mu(dx) P_t(x, A) = \mu(A) \cdot \lambda(G) = 0,$$

et ceci est incompatible avec la récurrence. Par suite on ne peut avoir $\mathcal{F} = 0$. \mathcal{C} est donc grossière μ -p. s.

II.2. PROPOSITION. — *La chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de probabilité de transition $P_1(x, \cdot)$ est récurrente et aperiodique.*

Démonstration :

1) P_1 est une contraction positive de $L^1(\mu)$ ([2]), et la tribu des ensembles invariants pour P_1 est contenue dans la tribu \mathcal{D} des ensembles Γ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un ensemble Γ_n tel que $P_n 1_\Gamma = 1_{\Gamma_n}$ μ -p. s.; nous allons montrer que \mathcal{D} est grossière μ -p. s. Soit $\Gamma \in \mathcal{D}$, il existe un ensemble N de mesure nulle tel que $x \notin N$ entraîne $P_n(x, \Gamma) = 1_{\Gamma_n}(x)$ pour tout n , soit encore $(P_n(x, \Gamma))^2 = P_n(x, \Gamma)$ d'où pour $t < n$ et $x \notin N$:

$$\begin{aligned} \int P_{n-t}(x, dy) (P_t(y, \Gamma))^2 &\geq \left(\int P_{n-t}(x, dy) P_t(y, \Gamma) \right)^2 \\ &= (P_n(x, \Gamma))^2 = P_n(x, \Gamma) \\ &= \int P_{n-t}(x, dy) P_t(y, \Gamma); \end{aligned}$$

ceci n'est possible que si $P_t(y, \Gamma) = 0$ ou 1 , $P_{n-t}(x, \cdot)$ -presque sûrement ; soit alors $\Gamma_1 = \{y : 0 < P_t(y, \Gamma) < 1\}$; si $\mu(\Gamma_1) > 0$ on a

$$\mu(\{x : P_{n-t}(x, \Gamma_1) > 0\}) > 0$$

puisque μ est invariante et ceci contredit ce qui précède, on a donc $\mu(\Gamma_1) = 0$, et par suite $\Gamma \in \mathcal{C}$; donc $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ et \mathcal{D} est grossière. Il en résulte en particulier qu'une fonction invariante par P_1 est constante μ -p. s.

2) Soit $\Gamma \in \mathcal{B}$, $\mu(\Gamma) > 0$ et posons

$$A = \left\{ \omega : \sum_1^\infty 1_{\Gamma}(X_n(\omega)) = \infty \right\};$$

on a $1_A \circ \theta_1 = 1_A$ et par suite la fonction $x \rightarrow P_x[A]$ est P_1 -invariante, donc égale μ -p. s. à une constante a . Soit $x \in E$, et n suffisamment grand pour que $\|P_n^1(x, \cdot)\| < \varepsilon$; on a alors :

$$\begin{aligned} P_x[A] &= \int P_n(x, dy)P_y[A] \\ &= aP_n^0(x, E) + \int P_n^1(x, dy)P_y[A], \end{aligned}$$

donc

$$|P_x[A] - a| \leq a|1 - P_n^0(x, E)| + \varepsilon \leq \varepsilon(a + 1);$$

on a donc $P_x[A] = a$ pour tout x de E . D'autre part, P_x p. s.

$$1_A = \lim_{n \rightarrow \infty} E_x[1_A | \mathcal{F}_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} E_{X_n}[A],$$

donc $a = 0$ ou $a = 1$. Enfin θ_1 est une contraction positive et conservative de $L^1(P_\mu)$ ([2]), donc :

$$\sum_1^\infty 1_{\{X_n(\omega) \in \Gamma\}} = 0 \quad \text{ou} \quad + \infty \quad P_\mu\text{-presque sûrement.}$$

D'après ce qui précède cette valeur est 0 si $a = 0$ et $+\infty$ si $a = 1$. Le cas zéro entraînerait :

$$E_\mu \left[\sum_1^\infty 1_{\{X_n \in \Gamma\}} \right] = 0, \quad \text{soit} \quad \sum_1^\infty \mu(\Gamma) = 0$$

ce qui est contradictoire ; on a donc $a = 1$, la chaîne X_n est récurrente et comme la tribu \mathcal{D} est grossière elle est apériodique. Nous allons donc pouvoir lui appliquer les résultats de Orey, Jain et Jamison ([12], [9], [10]).

II. 3. DÉFINITION. — On appelle tribu asymptotique du processus X la tribu :

$$\mathcal{A} = \bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} \theta_t^{-1}(\mathcal{F}_\infty).$$

Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si, pour tout t il existe un ensemble $A_t \in \mathcal{A}$ tel que $1_A = 1_{A_t} \circ \theta_t$. On posera $\mathcal{H}_t = \theta_t^{-1}(\mathcal{F}_\infty)$.

THÉORÈME. — \mathcal{A} est grossière P_ν -presque sûrement quelle que soit la loi ν .

Démonstration. — Soit $A \in \mathcal{A}$, les fonctions $x \rightarrow E_x[A_t]$ sont bornées par 1 et :

$$P_n[E \cdot [A_n]](x) = E_x[E_{X_n}[A_n]] = P_x[A];$$

or d'après [12], pour deux points quelconques x et y de E :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| P^n(x, \cdot) - P^n(y, \cdot) \| = 0;$$

on a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} |P^n[E \cdot [A_n]](x) - P^n[E \cdot [A_n]](y)| = 0$, soit $P_x[A] = P_y[A]$.

Comme $A_n \in \mathcal{A}$, $P_x[A_n] = P_y[A_n]$; et $P_x[A_n] = P_x[E \cdot [A_n]](x) = P_x[A]$. D'autre part $1_A = \lim_{n \rightarrow \infty} E_{X_n}[A_n] = P_x[A]$, P_x -p. s. Il en résulte que $P_x[A]$ ne peut valoir que 0 ou 1 ce qui démontre le théorème.

II. 4. — Nous allons maintenant reprendre le raisonnement de Blackwell et Freedman ([3]) pour montrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — Quelles que soient les probabilités m_1 et m_2 sur E :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| m_1 P_t(\cdot) - m_2 P_t(\cdot) \| = 0$$

En particulier dans le cas positif $\lim_{t \rightarrow \infty} \| m_1 P_t(\cdot) - \mu(\cdot) \| = 0$.

Démonstration :

1) Soient $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_\infty$ et m une probabilité sur E ; on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{H}_t} |P_m(A \cap \mathcal{B}) - P_m(A)P_m(\mathcal{B})| = 0.$$

En effet

$$\begin{aligned} \sup_{A \in \mathcal{H}_t} |P_m(A \cap \mathcal{B}) - P_m(A)P_m(\mathcal{B})| &= \sup_{A \in \mathcal{H}_t} \left| \int_A (1_{\mathcal{B}} - P_m(\mathcal{B})) dP_m \right| \\ &= \sup_{A \in \mathcal{H}_t} \left| \int_A (P_m(\mathcal{B} | \mathcal{H}_t) - P_m(\mathcal{B})) dP_m \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |P_m(\mathcal{B} | \mathcal{H}_t) - P_m(\mathcal{B})| dP_m, \end{aligned}$$

et cette dernière quantité tend vers zéro d'après le théorème précédent.

2) Soit $\Gamma \in \mathcal{B}$; appliquons la relation précédente avec

$$m = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y \right),$$

$A = \{X_t \in \Gamma\}$, $B = \{X_0 = x\}$ ou $B = \{X_0 = y\}$; il vient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\Gamma \in \mathcal{B}} |P_t(x, \Gamma) - P_t(y, \Gamma)| = 0.$$

Soit alors H_t l'ensemble de mesure positive dans la décomposition de Jordan-Hahn de $m_1 P_t(\cdot) - m_2 P_t(\cdot)$;

$$(m_1 P_t - m_2 P_t)(H_t) = \int (P_t(x, H_t) - P_t(y, H_t)) dm_1(x) dm_2(y)$$

qui tend vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. On en déduit immédiatement le théorème.

II. 5. PROPOSITION. — Dans le cas positif pour toute fonction f de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ et tout x de E :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t f = \int f(x) d\mu(x)$$

Dans le cas nul, pour toute fonction f de $\mathcal{L}^\infty(\mu) \cap \mathcal{L}^1(\mu)$ et tout x de E :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t f(x) = 0$$

Démonstration. — La première partie résulte immédiatement du théorème ci-dessus. Pour la seconde il suffit de suivre Jain ([9] théorème 27) avec quelques modifications triviales. On démontre en fait la propriété plus forte : pour tout x de E et tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t f(x) / \mu, f > + \varepsilon = 0$$

uniformément en f sur les ensembles $\{f : \|f\| \leq K\}$.

Remarque. — Si A_t est une fonctionnelle additive de caractéristique intégrable et bornée et h un nombre positif la proposition précédente entraîne

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_x[A_{t+h} - A_t] = h E_\mu(A_1)$$

dans le cas positif et zéro dans le cas nul. Ainsi par exemple le nombre de sauts d'amplitude donnée dans un intervalle de temps de longueur donnée tend vers une constante, nulle dans le cas nul. On voit apparaître une nouvelle fois le caractère « moins récurrent » du cas nul par rapport au cas positif.

II.6. COROLLAIRE 1. — Dans le cas positif, l'opérateur θ_t est fortement mélangeant.

Démonstration. — C'est la première partie de la démonstration du théorème II.4.

COROLLAIRE 2. — Dans le cas positif si $f \in L^p (1 \leq p < \infty)$, $P_t f$ converge vers $\langle \mu, f \rangle$ dans L^p lorsque t tend vers l'infini.

Démonstration. — Si $g \in L^\infty$ on sait que $P_t g(x) \rightarrow \langle \mu, g \rangle$ μ -p. s.

Les $P_t g$ sont d'autre part uniformément bornés par $\|g\|_\infty$; la famille $(P_t g)^p$ est donc équi-intégrable et $\forall p \in [1, \infty[$:

$$P_t g \xrightarrow{L^p} \langle \mu, g \rangle.$$

L^∞ est dense dans L^p , donc pour tout f de L^p , il existe $g \in L^\infty$ tel que $\|f - g\|_p < \varepsilon$ ce qui entraîne $|\langle \mu, f \rangle - \langle \mu, g \rangle| < \varepsilon$ et pour tout t

$$\|P_t f - P_t g\|_p < \varepsilon$$

puisque P_t est une contraction de L^p . On a donc :

$$\begin{aligned} \|P_t f - \langle \mu, f \rangle\|_p &\leq \|P_t f - P_t g\|_p \\ &\quad + \|P_t g - \langle \mu, g \rangle\|_p + |\langle \mu, f \rangle - \langle \mu, g \rangle|; \end{aligned}$$

et il suffit de prendre t assez grand pour que $\|P_t g - \langle \mu, g \rangle\|_p < \varepsilon$, pour avoir $\|P_t f - \langle \mu, f \rangle\|_p < 3\varepsilon$.

COROLLAIRE 3. — Pour tout couple x, y de $E \times E$, $p_t(x, z) - p_t(y, z)$ tend vers zéro dans $L^1(\mu)$. Dans le cas positif $p_t(x, z)$ tend vers 1 dans $L^1(\mu)$.

Démonstration. — Comme $P_t^1(x, E) \rightarrow 0$ pour tout x le théorème II.4 entraîne

$$\sup_{\Gamma \in \mathcal{B}} \left| \int_{\Gamma} (p_t(x, z) - p_t(y, z)) d\mu(z) \right| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

or

$$\begin{aligned} \int |p_t(x, z) - p_t(y, z)| d\mu(z) &= \int_{\{z: p_t(x, z) \geq p_t(y, z)\}} (p_t(x, z) - p_t(y, z)) d\mu(z) \\ &\quad + \int_{\{z: p_t(x, z) < p_t(y, z)\}} (p_t(y, z) - p_t(x, z)) d\mu(z) \\ &\leq 2 \sup_{\Gamma} \left| \int_{\Gamma} (p_t(x, z) - p_t(y, z)) d\mu(z) \right|, \end{aligned}$$

ce qui démontre le corollaire.

III. UNE REMARQUE SUR LE CAS SINGULIER

Dans le cas singulier la tribu \mathcal{C} introduite en II.1 peut aussi bien être grossière (cas des processus à accroissements indépendants) qu'égale à $\overline{\mathcal{B}}$ ou intermédiaire entre ces deux cas. La richesse de \mathcal{C} montre l'importance des phénomènes périodiques. Cela sera illustré par le résultat partiel suivant.

PROPOSITION. — *Sous l'hypothèse (L), si $P_t^1(x, E) = 1$ pour tout x et si $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{B}}$ alors pour tout x de C , $P_t(x, \cdot) = \varepsilon_{\psi(x,t)}$ où la fonction $x \rightarrow \psi(x, t)$ est finement continue. Si le processus est fellerien cette fonction est continue.*

Démonstration. — Soit $\{G_n\}$ une base de la topologie de E . Il existe un ensemble N de mesure nulle tel que pour tout $x \notin N$ et tout entier n ,

$$P_t(x, G_n) = 1_A(x)$$

où A est un borélien. Fixons $x \notin N$ et soit y un point de E , alors ou bien il existe un $G_n \ni y$ tel que $P_t(x, G_n) = 0$ ou bien pour tout $G_n \ni y$, $P_t(x, G_n) = 1$. Le premier cas n'étant pas possible pour tout y de E , il existe un y soit \tilde{y} tel que l'on soit dans le second cas et l'on a alors :

$$P_t(x, \cap \{G_n, G_n \ni \tilde{y}\}) = 1,$$

soit

$$P_t(x, \cdot) = \varepsilon_{\tilde{y}}.$$

On pose $\tilde{y} = \psi(x, t)$; pour toute fonction f finement continue, $P_t f$ est finement continue, comme dans ce cas $P_t f(x) = f(\psi(x, t))$ il en résulte que $\psi(\cdot, t)$ est finement continue et comme N^c est finement dense dans E la relation précédente se prolonge par continuité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. AZEMA, M. DUFLO et D. REVUZ, Mesure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **8**, 1967, 157-181.
- [2] J. AZEMA, M. DUFLO et D. REVUZ, Mesure invariante des processus de Markov récurrents. *Sém. Cal. Prob. Fac. Sci., Strasbourg*, III, 1968, Springer Verlag, Lec. Notes in Math, **88**, 24-33.
- [3] D. BLACKWELL et D. FREEDMAN, The tail σ -field of a Markov chain and a theorem of Orey. *Ann. Math. Stat.*, **35**, 1964, 1291-1295.
- [4] R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETTOOR, *Markov processes and Potential Theory*. Academic Press, 1968.
- [5] K. L. CHUNG, *Markov chains with stationary transition probabilities*. Springer Verlag, 1960.

- [6] J. L. DOOB, Asymptotic properties of Markov transition probabilities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63**, 393-438.
- [7] R. S. FOGUEL, An L^p theory for a Markov process with subinvariant measure. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1965, 398-406.
- [8] T. E. HARRIS, The existence of stationary measures for certain Markov processes. *Proc. Third Berkeley Symp. Math. Stat. Probab.*, vol. II, 1956, 113-124.
- [9] N. C. JAIN, Some limit theorems for a general Markov process. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **6**, 1966, 206-223.
- [10] B. JAMISON et S. OREY, Tail σ -field of Markov processes recurrent in the sense of Harris. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **8**, 1967, 18-40.
- [11] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson, 1964.
- [12] S. OREY, Recurrent Markov chains. *Pacific J. of Math.*, **9**, 1959, 805-827.

Manuscrit reçu le 25 mars 1969.
