ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

GASTON GIROUX

Sur les lois d'entrée et de sortie d'une chaîne de Markov

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, nº 4 (1970), p. 345-362

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_4_345_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VI, n° 4, 1970, p. 345-362.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Sur les lois d'entrée et de sortie d'une chaîne de Markov

par

Gaston GIROUX

INTRODUCTION

Ce mémoire contient une généralisation du *théorème de décomposition* (énoncé pour la première fois par Feller (1957)), sous les mêmes hypothèses que celles de Chung: états stables et frontière complètement atomique finie. La démonstration étant identique à celle des *Lecture Notes on Boundary Theory for Markov Chains* de K. L. Chung, on renvoie à ce travail lorsqu'il n'y a rien à changer dans les démonstrations. En faisant cette généralisation nous nous sommes aperçu qu'on pouvait éviter l'emploi de l'hypothèse auxiliaire (il n'y a pas d'états récurrents pour le processus minimal) en remplacant la notion de potentiel par celle de caractéristique. Cette partie est donc développée plus en détails.

Nous appliquons alors ces résultats pour obtenir des relations entre les décompositions. Le fait important est qu'on peut déterminer certaines lois de sortie qui se retrouvent à une constante près dans toute décomposition. Ce fait est trivial pour les lois d'entrée.

Il est facile alors d'employer les techniques de Neveu [*3*] pour obtenir les résultats proposés : le cône des lois d'entrée (respectivement de sortie) correspondant aux points frontières tenaces est de dimension finie, la dimension est égale au nombre de ces points frontières tenaces, et les lois extrémales sont données par ces points frontières tenaces.

Ce travail a pris forme lors d'un séjour à Stanford University, auprès du professeur K. L. Chung. Qu'il me soit permis de le remercier pour les discussions qu'il a bien voulu m'accorder et pour son hospitalité.

Je tiens aussi à exprimer ma plus vive gratitude au Professeur Anatole JOFFE, sans qui ce mémoire n'existerait pas.

CHAPITRE I

DÉCOMPOSITIONS

Ce chapitre contient une généralisation du théorème de décomposition. Mais la démonstration est la même que celle de Chung ; sauf qu'on évite l'emploi de l'hypothèse auxiliaire. On se place dans le cadre des *Lecture Notes on Boundary Theory for Markov Chains* de K. L. Chung. Il semble bon de rappeler quelques résultats et notations.

SECTION 1. **Rappels.**

Π est une MTS (matrice de transition markovienne standard) dont la matrice dérivée à l'origine Q satisfait

HYPOTHÈSE A

$$- \infty < q_{ii} \quad , \quad \sum_{j \neq i} q_{ij} = - q_{ii}$$

(X_t) est la version semi-continue inférieurement à droite,
τ est le premier instant d'accumulation de sauts.

HYPOTHÈSE B

L'ensemble invariant $\{ \tau < \infty \}$ est l'union d'un nombre fini d'ensembles invariants atomiques Δ^a, $a \in B$.

On pose

$$\tau^a_{(t)} = t + \tau_{\Delta^a} \circ \theta_t, \quad \text{si} \quad X_t \in I$$
$$\tau^a_{(t)} = \inf \{ \tau^a_{(s)}, \text{ pour tout } s > t \text{ tel que } X_s \in I \}, \text{ autrement}$$
$$\underset{\sim}{S}_a = \{ \tau^a_{(s)}, s \text{ rationnel} > 0 \}$$

$\underset{\sim}{S}_a^+$ est l'ensemble des points limites par la droite de $\underset{\sim}{S}_a$.

Pour T un temps d'arrêt, H_{T^-} est définie dans Meyer [*1*]; c'est la tribu des événements antérieurs à T et prévisibles.

On a les résultats suivants :

PROPOSITION. — Soit a un élément de B. Il existe alors une et une seule loi d'entrée normalisée $(\xi_t(a, .))$ de Π telle que, pour toute loi initiale μ

$$P_\mu \{ X(\tau + t) = j, \Delta^a \mid H_{\tau^-} \} = \xi_t(a, j) 1_{\Delta^a} \qquad P_\mu - \text{p. p.}$$

Soit P la loi de probabilité d'une loi d'entrée arbitraire, et soit S un temps d'arrêt tel que $X(S) \in I$ p. p. sur $\{ S < \infty \}$. Alors

$$P \{ X(\tau_{(S)} + t) = j, \tau^a_{(S)} < \infty \mid H_{\tau_{(S)}} \} = \xi_t(a, j) 1_{\{\tau^a_{(S)} < \infty\}} \quad \text{P-p. p.}$$

On suppose dans toute la suite, sans nuire à la généralité, que

$$(\xi_t(a, .)) \neq (\xi_t(b, .)) \quad \text{pour} \quad a \neq b, \quad a, b \in B$$

On note P_a la loi de probabilité correspondant à $(\xi_t(a, .))$.

Un point frontière est dit tenace si : $P_a \{ \inf \underset{\sim}{S}_a = 0 \} = 1$

non tenace si : $P_a \{ \inf \underset{\sim}{S}_a = 0 \} = 0$

on a alors dichotomie.

THÉORÈME. — *La propriété de Markov forte à la frontière* (PMFF).

Soit a un point frontière et T un temps d'arrêt.

1) Si a est tenace et si P-p. p. sur $\{ T < \infty \}$ on a $T \in \underset{\sim}{S}_a^+$, alors

$$(*) \qquad P \{ X(T + t) = j, T < \infty \} = P \{ T < \infty \} \xi_t(a, j)$$

2) Si a est non tenace, si T est prévisible et si P-p. p. sur T, on a $T \in \underset{\sim}{S}_a$; alors (*) est encore vrai.

Pour éviter d'alourdir le texte, on suppose qu'il n'y a pas de points frontières éphémères.

SECTION 2. **Les décompositions.**

Soit $A \subseteq B$. On pose

$T^A = \inf \{ t > 0 : \exists a \in A \text{ tel que } t \in \underset{\sim}{S}_a \}$

A_{X_t} le processus tué à T^A

${}^A\Pi_t$ la matrice de transition sous-markovienne standard (MTSS) correspondante ; pour $a \in A$ non tenace :

$$T^{A,a} = T^A \quad \text{si} \quad T^A \in S_a, \quad = \infty \text{ autrement}$$

pour $a \in A$ tenace :

$$T^{A,a} = T^A \quad \text{si} \quad T^A \notin \underset{\sim}{S}_c \text{ pour tout } c \in A \text{ non tenace et } T^A \in \underset{\sim}{S}_a^+$$

PROPOSITION 1.1. — Pour tout $A \subseteq B$, on a

$$\Pi_t = {}^A\Pi_t + \sum_{a \in A} \int_0^t l_s^A(., a) \otimes \xi_{t-s}(a, .) ds$$

où les $l_s^A(., a)$ sont des lois de sortie de ${}^A\Pi$.

Démonstration. — Posant $L^A(t; i, a) = P_i\{T^{A,a} \leqslant t\}$, on a

$$\begin{aligned} p_t(i,j) &= P_i\{X_t = j, T^A > t\} + P_i\{X_t = j, T^A \leqslant t\} \\ &= {}^A p_t(i,j) + \sum_{a\in A} P_i\{X_t = j, T^{A,a} \leqslant t\} \\ &= {}^A p_t(i,j) + \sum_{a\in A} \int_0^t \xi_{t-s}(a,j) L^A(ds; i, a) \quad \text{(PMFF)} \end{aligned}$$

Mais $L^A(t; ., a)$ est une caractéristique de ${}^A\Pi$, donc sa dérivée $l_t^A(., a)$ existe et est une loi de sortie de ${}^A\Pi$ (cf. *Lecture Notes*, chap. I, prop. 2).

Posons

$$\rho_t^A(a,j) = P_a\{X_t = j, T^{A-\{a\}} > t\}, \qquad a \in A$$

$$F^A(t; a, b) = P_a\{T^{A-\{a\},b} \leqslant t\}, \quad a, b \in A \quad b \neq a; \quad F^A(t; a, a) = 0, \quad a \in A$$

PROPOSITION 1.2. — On a

$$\sum_{j\in I} \rho_t^A(a,j) + \sum_{b\in A} F^A(t; a, b) = 1, \quad t > 0 \quad a \in A$$

$$\rho_t^A(a,j) + \sum_{b\in B} \int_0^t F^A(ds; a, b)\xi_{t-s}(b,j) = \xi_t(a,j), \quad t \geqslant 0 \quad a \in A$$

La démonstration est la même que celle des *Lectures Notes*, chap. III, prop. 8, où on doit remplacer β^a par $T^{A-\{a\}}$.

En posant pour $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \hat{F}_\lambda^A(a,b) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} F^A(dt; a, b) \\ \hat{\rho}_\lambda^A(a,j) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \rho_t^A(a,j)dt \\ \hat{\xi}_\lambda(a,j) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \xi_t(a,j)dt, \quad \text{on a} \end{aligned}$$

THÉORÈME 1.3.

$(I - \hat{F}_\lambda^A)\hat{\xi}_\lambda(., j) = \hat{\rho}_\lambda^A(., j), \quad j \in I$

$(I - \hat{F}_\lambda^A)$ est inversible et $(I - \hat{F}_\lambda^A)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} [\hat{F}_\lambda^A]^n$.

La démonstration est la même que celle des *Lecture Notes*, chap. III, prop. 9; le développement de l'inverse est justifié par Chung ([*3*], p. 134, lemme 2).

Il n'existe aucune difficulté pour obtenir la décomposition dans le cas où $\Phi = ({}^{B}\Pi)$ est remplacée par ${}^{A}\Pi$, mais nous faisons les détails tout de même pour deux raisons :

1) on évite l'emploi de l'hypothèse auxiliaire en remplaçant la notion de potentiel par celle de caractéristique ;

2) il est bon de voir que la notion de trappe récurrente est la même que celle de point frontière récurrent pour $\Pi^a = ({}^{B-\{a\}}\Pi)$.

Pour $A \subseteq B$ et $a \in B - A$, on pose ${}^{A}\underset{\sim}{S}_a = \underset{\sim}{S}_a \cap [0, T^A[$.

Définition. — $a \in B - A$ est dit ${}^{A}\Pi$-récurrent si $P_a\{{}^{A}\underset{\sim}{S}_a$ n'est pas borné$\} = 1$; autrement a est dit ${}^{A}\Pi$-non-récurrent.

Remarque. — On a le résultat facile : a est une trappe récurrente si et seulement si a est Π^a-récurrent. En effet a est une trappe récurrente si et seulement si :

$$1 = P_a\{\underset{\sim}{S}_a \text{ n'est pas borné, } T^{B-\{a\}} = \infty\} = P_a\{{}^{B-\{a\}}\underset{\sim}{S}_a \text{ n'est pas borné}\}$$

LEMME 1. — Si j est ${}^{A-\{a\}}\Pi$-récurrent et $j \rightsquigarrow a$, alors a est ${}^{A-\{a\}}\Pi$-récurrent.

La démonstration est la même que celle des *Lecture Notes*, chap. III, sec. 3, lemme 2.

LEMME 2. — Si j est ${}^{A}\Pi$-transient et a est ${}^{A-\{a\}}\Pi$-non-récurrent, alors j est ${}^{A-\{a\}}\Pi$-transient.

Démonstration.

1) si $j \not\rightsquigarrow a$ on a $\displaystyle\int_0^\infty {}^{A-\{a\}}p_t(j, j)dt = \int_0^\infty {}^{A}p_t(j, j)dt < \infty$

2) si $j \rightsquigarrow a$, alors par le lemme 1, j ne peut pas être ${}^{A-\{a\}}\Pi$-récurrent.

PROPOSITION 1.4. — Si $a \in A$ est ${}^{A-\{a\}}\Pi$-non-récurrent et j est ${}^{A}\Pi$-transient, alors

$$e^A(a, j) = \int_0^\infty \rho_s^A(a, j)ds < \infty$$

Démonstration. — Par le lemme 2 on a

$$M = \int_0^\infty {}^{A-\{a\}}p_s(j, j)ds < \infty\,;$$

comme $\rho_s^A(a, .)$ est une loi d'entrée de ${}^{A-\{a\}}\Pi$, appliquant le principe du maximum à $\rho_u^A(a, .)$, $u > 0$ quelconque, on a

$$\int_u^\infty \rho_s^A(a, j)ds \leqslant M \langle \rho_u^A(a, .), \underset{\sim}{1} \rangle$$

Mais $\int_0^u \rho_s^{\mathrm{A}}(a, j)ds < \infty$, d'où le résultat.

CAS 1. — *a est* ${}^{\mathrm{A}-\{a\}}\Pi$*-non récurrent*

On pose $\underset{\sim}{\mathrm{I}}_t^{\mathrm{A}} = \{ j \in \mathrm{I} : j \text{ est } {}^{\mathrm{A}}\Pi\text{-non-récurrent} \}$, $\underset{\sim}{\mathrm{I}}_r^{\mathrm{A}} = \mathrm{I} - \underset{\sim}{\mathrm{I}}_t^{\mathrm{A}}$.

LEMME 3. — Si j est ${}^{\mathrm{A}}\Pi$-récurrent, alors $j \not\rightsquigarrow \mathrm{A}$.

Démonstration. — j est ${}^{\mathrm{A}}\Pi$-récurrent si et seulement si $\mathrm{P}_j\{ \mathrm{S}_j$ n'est pas borné, $\mathrm{T}^{\mathrm{A}} = \infty \} = 1$, donc $\mathrm{P}_j\{ \mathrm{T}^{\mathrm{A}} < \infty \} = 0$.

LEMME 4. — Si j est ${}^{\mathrm{A}}\Pi$-récurrent, alors $l_t^{\mathrm{A}}(j, a) \equiv 0$.

Démonstration.

$$\int_0^t l_s^{\mathrm{A}}(j, a)ds = \mathrm{P}_j\{ \mathrm{T}^{\mathrm{A},a} \leqslant t \} \leqslant \mathrm{P}_j\{ \mathrm{T}^{\mathrm{A}} < \infty \} = 0.$$

On peut donc poser :

$$\begin{aligned} \sigma_t^{\mathrm{A}}(a, a) &= \sum_{j \in \underset{\sim}{\mathrm{I}}_t^{\mathrm{A}}} e^{\mathrm{A}}(a, j) l_t^{\mathrm{A}}(j, a) \\ &= \langle e^{\mathrm{A}}(a, .), l_t^{\mathrm{A}}(., a) \rangle \end{aligned}$$

si on convient que $\infty \cdot 0 = 0$.

LEMME 5. — Si $\mathrm{A} \neq \emptyset$, alors $\underset{\sim}{\mathrm{I}}_t^{\mathrm{A}} \neq \emptyset$.

Démonstration. — Si $\mathrm{A} \neq \emptyset$, alors il existe $j \in \mathrm{I}$ tel que $j \rightsquigarrow \mathrm{A}$, donc par le lemme 3, $j \in \underset{\sim}{\mathrm{I}}_t^{\mathrm{A}}$.

Les deux lemmes suivants sont fondamentaux.

LEMME 6. — $\sigma_t^{\mathrm{A}}(a, a)$ est une fonction décroissante, continue droite, intégrable au voisinage de 0 (finie sauf peut-être en 0), et $\sigma_\infty^{\mathrm{A}}(a, a) = 0$.

Démonstration.

a) Par le lemme de Fatou, $\sigma_t^{\mathrm{A}}(a, a)$ est continue à droite.

b) Pour voir que $\sigma_t^{\mathrm{A}}(a, a)$ est décroissante, il suffit de remarquer que

$$\sigma_{t+s}^{\mathrm{A}}(a, a) = \langle e^{\mathrm{A}}(a, .), {}^{\mathrm{A}}\Pi_t l_s^{\mathrm{A}}(., a) \rangle = \langle e^{\mathrm{A}}(a, .)\, {}^{\mathrm{A}}\Pi_t, l_s^{\mathrm{A}}(., a) \rangle \leqslant \sigma_t^{\mathrm{A}}(a, a)$$

c) Par PMFF, on a

$${}^{\mathrm{A}-\{a\}}\Pi_t = {}^{\mathrm{A}}\Pi_t + \int_0^t l_{t-s}^{\mathrm{A}}(., a) \otimes \rho_s^{\mathrm{A}}(a, .)ds,$$

d'où

$$(*) \qquad \rho^A_{u+t}(a,.) = \rho^A_u(a,.)\,{}^A\Pi_t + \int_0^t \langle \rho^A_u(a,.), l^A_{t-s}(.,a)\rangle \rho^A_s(a,.)ds$$

intégrant de 0 à ∞, on a pour $j \in \underset{\sim}{\mathrm{I}}^A_t$

$$\infty > \int_t^\infty \rho^A_u(a,j)du \geqslant \int_0^t \sigma^A_{t-s}(a,a)\rho^A_s(a,j)ds \geqslant \sigma^A_\infty(a,a)\int_0^t \rho^A_s(a,j)ds$$

Si $\rho^A_s(a,j) \equiv 0$ pour tout $j \in \mathrm{I}^A_t$ alors $\sigma^A_t(a,a) \equiv 0$ et le lemme est trivial autrement comme $\rho^A_s(a,j)$ est continue, la première inégalité montre que $\sigma^A_t(a,a)$ est intégrable au voisinage de 0 (donc finie sauf peut-être en 0).

d) La deuxième inégalité montre que $\sigma^A_\infty(a,a) = 0$, puisque

$$\lim_{t\uparrow\infty} \int_t^\infty \rho^A_u(a,j)du = 0, \qquad j \in \underset{\sim}{\mathrm{I}}^A_t$$

LEMME 7.

$$\mathrm{F}^A_t(a,.) = \lim_{\mathrm{T}\uparrow\infty} \uparrow \left[\int_0^{\mathrm{T}+t} \rho^A_u(a,.)du - \int_0^{\mathrm{T}} \rho^A_u(a,.)\,{}^A\Pi_t du\right],$$

satisfait

$$\mathrm{F}^A_{t+t'}(a,.) - \mathrm{F}^A_{t'}(a,.) = \mathrm{F}^A_t(a,.)\,{}^A\Pi_{t'}$$

Démonstration. — Intégrant (*) de 0 à T on a

$$\int_0^{\mathrm{T}+t} \rho^A_u(a,.)du - \int_0^{\mathrm{T}} \rho^A_u(a,.)\,{}^A\Pi_t du = \int_0^t \left[1 + \left\langle \int_0^{\mathrm{T}} \rho^A_u(a,.)du, l^A_{t-s}(.,a)\right\rangle\right]\rho^A_s(a,.)ds$$

donc

$$\lim_{\mathrm{T}\uparrow\infty} \uparrow \left[\int_0^{\mathrm{T}+t} \rho^A_u(a,.)du - \int_0^{\mathrm{T}} \rho^A_u(a,.)\,{}^A\Pi_t du\right] = \int_0^t [1 + \sigma^A_{t-s}(a,a)]\rho^A_s(a,.)ds < \infty \quad \text{sur} \quad \mathrm{I}$$

comme la limite est croissante, on a

$$\lim_{\mathrm{T}\uparrow\infty} \left[\int_0^{\mathrm{T}+t} \rho^A_u(a,.)\,{}^A\Pi_{t'}du - \int_0^{\mathrm{T}} \rho^A_u(a,.)\,{}^A\Pi_{t+t'}\right] = \mathrm{F}^A_t(a,.)\,{}^A\Pi_{t'}$$

alors

$$
\begin{aligned}
&F^A_{t+t'}(a,.) - F^A_{t'}(a,.) \\
&= \lim_{T\uparrow\infty}\left[\int_0^{T+t+t'} \rho^A_u(a,.)du - \int_0^T \rho^A_u(a,.)\,{}^A\Pi_{t+t'}du\right. \\
&\left. - \int_0^{T+t'} \rho^A_u(a,.)du + \int_0^T \rho^A_u(a,.)\,{}^A\Pi_{t'}du\right] \\
&= \lim_{T\uparrow\infty}\left[\int_{T+t'}^{T+t'+t} \rho^A_u(a,.)du + \left\{\int_0^T \rho^A_u(a,.)du - \int_0^T \rho^A_u(a,.)\,{}^A\Pi_t du\right\}{}^A\Pi_{t'}\right] \\
&= \lim_{T\uparrow\infty}\left[\int_{T+t'}^{T+t'+t} \rho^A_u(a,.)du - \int_T^{T+t} \rho^A_u(a,.)\,{}^A\Pi_{t'}du\right] + F^A_t(a,.)\,{}^A\Pi_{t'}
\end{aligned}
$$

mais

$$
\begin{aligned}
&\lim_{T\uparrow\infty}\left[\int_{T+t'}^{T+t'+t} \rho^A_u(a,.)du - \int_T^{T+t} \rho^A_u(a,.)\,{}^A\Pi_{t'}du\right] \\
&\qquad = \lim_{T\uparrow\infty}\left[\int_0^t \rho^A_{u+T}(a,.)[{}^{A-\{a\}}\Pi_{t'} - {}^A\Pi_{t'}]du\right] \\
&\qquad = \lim_{T\uparrow\infty}\int_0^{t'}\left\langle \int_0^t \rho^A_{u+T}(a,.)du,\ l^A_{t'-s}(.,a)\right\rangle \rho^A_s(a,.)ds \\
&\qquad \leqslant \lim_{T\uparrow\infty}\int_0^{t'}\left\langle \int_T^\infty \rho^A_u(a,.)du,\ l^A_{t'-s}(.,a)\right\rangle \rho^A_s(a,.)ds = 0
\end{aligned}
$$

puisque la sommation se fait sur $\underset{\sim}{\mathrm{I}}^A_t$ et pour $j \in \underset{\sim}{\mathrm{I}}^A_t$

$$
\int_T^\infty \rho^A_u(a,j)du \downarrow 0 \qquad (T \to \infty)
$$

d'où le lemme.

Soit $\eta^A_t(a,.)$ la loi d'entrée de ${}^A\Pi$ telle que

$$
\int_0^t \eta^A_s(a,.)ds = F^A_t(a,.) \quad (\textit{Lecture Notes}, \text{chap. 1, prop. 2})
$$

PROPOSITION 1.5. — La loi d'entrée $\rho^A_t(a,.)$ de ${}^{A-\{a\}}\Pi$ et la loi d'entrée $\eta^A_t(a,.)$ de ${}^A\Pi$ sont reliées par la formule

$$
\rho^A_t(a,.) = \int_0^t \eta^A_{t-s}(a,.)E^A(ds\,;a,a)\ (*)
$$

où $E^A(.\,;a,a)$ est une mesure de probabilité sur $[0,\infty[$.

(*) On convient que l'intégrale est toujours prise sur l'intervalle fermé, sauf mention du contraire.

Démonstration. — Par les *Lecture Notes*, chap. III, lemme 6, il existe une mesure de probabilité sur $[0, \infty[$ telle que

$$\int_0^t [1 + \sigma_{t-s}^{\mathrm{A}}(a, a)]\mathrm{E}^{\mathrm{A}}(ds\,; a, a) = 1$$

pour presque tout t.

Mais comme

$$\int_0^t \eta_s^{\mathrm{A}}(a, .)ds = \int_0^t [1 + \sigma_{t-s}^{\mathrm{A}}(a, a)]\rho_s^{\mathrm{A}}(a, .)ds$$

par une transformation de Laplace, on a tout de suite

$$\rho_t^{\mathrm{A}}(a, .) = \int_0^t \eta_{t-s}^{\mathrm{A}}(a, .)\mathrm{E}^{\mathrm{A}}(ds\,; a, a)$$

pour presque tout t; pour avoir égalité partout il suffit de montrer que $\mathrm{E}^{\mathrm{A}}(.\,; a, a)$ est continue sur $]0, \infty[$, puisque $\rho_t^{\mathrm{A}}(a, .)$ et $\eta_t^{\mathrm{A}}(a, .)$ sont continues. Mais par le même lemme on a en fait continuité absolue sur $]0, \infty[$ puisque

$$d\sigma_t^{\mathrm{A}}(a, a) = - \langle \eta_{t-s}^{\mathrm{A}}(a, .), l_s^{\mathrm{A}}(., a) \rangle\, dt$$

(Comme on a une loi d'entrée et une loi de sortie relativement au même semi-groupe ${}^{\mathrm{A}}\Pi$, le produit scalaire ne dépend pas de s).

CAS 2. — *a est* ${}^{\mathrm{A}-\{a\}}\Pi$*-récurrent*

La démonstration est alors identique à celle des *Lecture Notes*.

$\underset{\sim}{\mathrm{I}}^a = \{ j \in \mathrm{I} : a \rightsquigarrow j \}$ est alors une classe ${}^{\mathrm{A}-\{a\}}\Pi$-récurrente donc Π restreinte à $\underset{\sim}{\mathrm{I}}^a \times \underset{\sim}{\mathrm{I}}^a$ est une MTS et les états de $\underset{\sim}{\mathrm{I}}^a$ communiquent. On sait qu'il existe alors une mesure $e^{\mathrm{A}}(a, .)$ sur $\underset{\sim}{\mathrm{I}}^a$, positive non nulle unique (à une constante près) et invariante par la restriction de Π à $\underset{\sim}{\mathrm{I}}^a \times \underset{\sim}{\mathrm{I}}^a$. Comme $p_t(j, k) \equiv 0$ si $j \in \underset{\sim}{\mathrm{I}}^a$, $k \notin \underset{\sim}{\mathrm{I}}^a$, on peut la prolonger en une mesure invariante par Π en posant : $e^{\mathrm{A}}(a, k) = 0$, $k \notin \underset{\sim}{\mathrm{I}}^a$. On a alors la proposition analogue à *Lecture Notes*, champ. III, prop. 12.

PROPOSITION 1.6. — La mesure $e^{\mathrm{A}}(a, .)$ est purement excessive pour ${}^{\mathrm{A}}\Pi$, donc admet une représentation :

$$e^{\mathrm{A}}(a, .) = \int_0^\infty \eta_t^{\mathrm{A}}(a, .)dt$$

où $\eta_t^{\mathrm{A}}(a, .)$ est une loi d'entrée de ${}^{\mathrm{A}}\Pi$.

La loi d'entrée $\rho_t^A(a, .)$ de ${}^{A-\{a\}}\Pi$ et la loi d'entrée $\eta_t^A(a, .)$ de ${}^A\Pi$ sont reliées par la formule

$$\rho_t^A(a, .) = \int_0^t \eta_{t-s}^A(a, .)E^A(ds\,; a, a)$$

où $E^A(.\,; a, a)$ est une mesure infinie σ-finie sur $[0, \infty[$ obtenue comme l'unique mesure satisfaisant

$$\int_0^t \sigma_{t-s}^A(a, a)E^A(ds\,; a, a) = 1$$

où comme précédemment $\sigma_t^A(a, a) = \langle e^A(a, .), l_t^A(., a) \rangle$.

Finalement on peut énoncer le théorème de décomposition; on pose $\hat{E}_\lambda^A$ = la matrice diagonale d'éléments diagonaux

$$\hat{E}_\lambda^A(a, a) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}E^A(dt\,; a, a)$$

THÉORÈME 1.7. — Soit $A \subseteq B$, on a alors

$$\hat{\Pi}_\lambda = {}^A\hat{\Pi}_\lambda + \sum_{a\in A}\sum_{b\in A} \hat{l}_\lambda^A(., a) \otimes [I - \hat{F}_\lambda^A]^{-1}\hat{E}_\lambda^A\hat{\eta}_\lambda^A(b, .)$$

Nous aurons besoin au chapitre suivant d'une relation entre un point frontière a tenace et le comportement de $E^A(t\,; a, a)$ à l'origine. Les résultats sont encore ici une généralisation facile de résultats des *Lecture Notes*.

LEMME 8.

$$\langle \rho_u^A(a, .), L_v^A(., a) \rangle = \int_0^u [\sigma_{u-s}^A(a, a) - \sigma_{v+u-s}^A(a, a)]E^A(ds\,; a, a)$$

Démonstration. — Il suffit de développer le premier membre comme au *Lecture Notes*, p. 80.

PROPOSITION 1.8. — Si a est tenace alors $E^A(0\,; a, a) = 0$ pour tout $A \supseteq \{a\}$.

Démonstration. — Le lemme 6, chap. III, des *Lecture Notes* nous dit que $E^A(0\,; a, a) = 0$ si et seulement si $\sigma_0^A(a, a) = \infty$. Montrons que $\sigma_0^A(a, a) < \infty$ implique a non tenace; remarquons que si $\inf S_a = 0$ alors $\exists\, \delta > 0$ tel que $T^{A-\{a\}} > \delta$, donc

$$\begin{aligned} P_a\{\inf \underset{\sim}{S}_a = 0\} &= \lim_{v\downarrow 0} P_a\{T^{A-\{a\}} > v, \underset{\sim}{S}_a \cap]0, v[\neq \emptyset\} \\ &= \lim_{v\downarrow 0}\lim_{u\downarrow 0} P_a\{T^{A-\{a\}} > v, \underset{\sim}{S}_a \cap]u, v[\neq \emptyset\} \\ &= \lim_{v\downarrow 0}\lim_{u\downarrow 0} \langle \rho_u^A(a, .), L_{v-u}^A(., a) \rangle \end{aligned}$$

alors par le lemme

$$\begin{aligned} P_a\{\inf S_a = 0\} &= \lim_{v\downarrow 0}\lim_{u\downarrow 0}\int_0^u [\sigma^A_{u-s}(a, a) - \sigma^A_{v-s}(a, a)]E^A(ds\,; a, a) \\ &= \lim_{v\downarrow 0}[\sigma^A_0(a, a) - \sigma^A_v(a, a)]E^A(0\,; a, a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

CHAPITRE II

SECTION 1. **Relations entre les décompositions.**

On pose $\hat{M}^A_\lambda = [I - \hat{F}^A_\lambda]^{-1}\hat{E}^A$

$$\hat{\Theta}^A_{\lambda,\mu}(a, b) = \langle \hat{\eta}^A_\lambda(a, .), \hat{l}^A_\mu(., a)\rangle$$

LEMME 1.

$$\hat{M}^A_\mu = \hat{M}^A_\lambda + (\lambda - \mu)\hat{M}^A_\lambda\hat{\Theta}^A_{\lambda,\mu}\hat{M}^A_\mu$$

Démonstration. — On a

$$\begin{gathered} \hat{\xi}_\mu(a, .) - \hat{\xi}_\lambda(a, .) = (\lambda - \mu)\hat{\xi}_\lambda(a, .)\hat{\Pi}_\mu \\ \hat{\eta}^A_\mu(a, .) - \hat{\eta}^A_\lambda(a, .) = (\lambda - \mu)\hat{\eta}^A_\lambda(a, .)\,{}^A\hat{\Pi}_\mu \\ \hat{\xi}^A_\lambda = \hat{M}^A_\lambda\hat{\eta}^A_\lambda \end{gathered}$$

(où $\hat{\xi}^A_\lambda$ est la restriction de $\hat{\xi}_\lambda$ à A), donc

$$\hat{M}^A_\mu\hat{\eta}^A_\mu - \hat{M}^A_\lambda\hat{\eta}^A_\lambda = (\lambda - \mu)\hat{M}^A_\lambda\hat{\eta}^A_\lambda\,{}^A\hat{\Pi}_\lambda + (\lambda - \mu)\hat{M}^A_\lambda\hat{\Theta}^A_{\lambda,\mu}\hat{M}^A_\lambda\hat{\eta}^A_\mu$$

d'où

$$[\hat{M}^A_\mu - \hat{M}^A_\lambda - (\lambda - \mu)\hat{M}^A_\lambda\hat{\Theta}^A_{\lambda,\mu}\hat{M}^A_\mu]\hat{\eta}^A_\mu = 0$$

en notant $H_{\lambda,\mu}$, la matrice entre crochets, on a plus explicitement

$$\sum_{b\in A} H_{\lambda,\mu}(a, b)\hat{\eta}^A_\lambda(b, j) = 0, \qquad a\in A, \quad j\in I$$

sommant sur j et posant

$$\hat{\eta}^A_\lambda(b) = \sum_{j\in I}\hat{\eta}^A_\lambda(b, j),$$

on a pour tout $a\in A$ et $b\in A$, $H_{\lambda,\mu}(a, b) = 0$, puisque $\hat{\eta}^A_\lambda(b) > 0$, $b\in A$; d'où le lemme.

LEMME 2.
$$\hat{m}^{A}_{\lambda}(.,b) = \sum_{a\in A} \hat{l}^{A}_{\lambda}(.,a)\hat{M}^{A}_{\lambda}(a,b)$$

est la transformée de Laplace d'une loi de sortie de Π.

Démonstration. — Il faut montrer
$$\hat{m}^{A}_{\mu}(.,a) - \hat{m}^{A}_{\lambda}(.,a) = (\lambda-\mu)\hat{\Pi}_{\lambda}\hat{m}^{A}_{\lambda}(.,a)$$
c'est-à-dire
$$\hat{l}^{A}_{\mu}\hat{M}^{A}_{\mu} - \hat{l}^{A}_{\lambda}\hat{M}^{A}_{\lambda} = (\lambda-\mu)\,{}^{A}\hat{\Pi}_{\lambda}\hat{l}^{A}_{\mu}\hat{M}^{A}_{\mu} + (\lambda-\mu)\hat{l}^{A}_{\lambda}\hat{M}^{A}_{\lambda}\hat{\Theta}^{A}_{\lambda,\mu}\hat{M}^{A}_{\mu}$$
mais $\hat{l}^{A}_{\lambda}$ étant la transformée de Laplace d'une loi de sortie de ${}^{A}\Pi$ cela revient à montrer
$$\hat{l}^{A}_{\lambda}\hat{M}^{A}_{\mu} - \hat{l}^{A}_{\lambda}\hat{M}^{A}_{\lambda} = (\lambda-\mu)\hat{l}^{A}_{\lambda}\hat{M}^{A}_{\lambda}\hat{\Theta}^{A}_{\lambda,\mu}\hat{M}^{A}_{\mu}$$
mais c'est le lemme 1.

Nous voulons montrer que $m^{A}_{\lambda}(.,b)$ ne dépend pas de A (à une constante près) (Lorsque A = B, on laisse tomber l'indice B et on note Φ, la matrice ${}^{B}\Pi$).
On a
$$\hat{p}_{\lambda}(i,j) = \hat{f}_{\lambda}(i,j) + \sum_{a\in B}\sum_{b\in B} \hat{l}_{\lambda}(i,a) \sum_{n\geq 0} \hat{F}^{n}_{\lambda}(a,b)\hat{E}_{\lambda}(b,b)\hat{\eta}_{\lambda}(b,j)$$

le terme général de la double somme s'écrit plus explicitement
$$\hat{l}_{\lambda}(i,a)\hat{F}_{\lambda}(a,a_1)\ \ldots\ \hat{F}_{\lambda}(a_{n-1},b)\hat{E}_{\lambda}(b,b)\hat{\eta}_{\lambda}(b,j)$$

Pour $A \subseteq B$, on divise alors cette double somme entre les termes qui contiennent au moins un indice dans A, et ceux qui ne contiennent pas d'indices dans A; ces derniers ajoutés à $\hat{f}_{\lambda}(i,j)$ nous donnent la transformée de Laplace de la probabilité partant de i d'être à j sans aller à A, donc ${}^{A}\hat{p}_{\lambda}(i,j)$.

Des premiers on en fait une somme infinie de sommes de la façon suivante : on divise selon le dernier indice dans A.

Ceux qui ont un dernier changement de bannières dans A nous donnent
$$\Big[\sum_{a\in A}\hat{l}_{\lambda}(i,a)\hat{E}_{\lambda}(a,a) + \sum_{b\in B}\sum_{a\in A}\hat{l}_{\lambda}(i,b)\hat{F}_{\lambda}(b,a)\hat{E}_{\lambda}(a,a) + \ \ldots\Big]\hat{\eta}_{\lambda}(a,j)$$

ceux dont l'avant-dernier changement de bannières est dans A mais le dernier n'y est pas, nous donnent
$$\Big[\sum_{a\in A}\hat{l}_{\lambda}(i,a)\hat{E}_{\lambda}(a,a) + \sum_{b\in B}\sum_{a\in A}\hat{l}_{\lambda}(i,b)\hat{F}_{\lambda}(b,a)\hat{E}_{\lambda}(a,a) + \ \ldots\Big]\sum_{c\notin A}\hat{F}_{\lambda}(a,c)\hat{\eta}_{\lambda}(c,j)$$

etc. ;

mais

$$\hat{m}_\lambda(i, a) = \hat{l}_\lambda(i, a)\hat{\mathrm{E}}_\lambda(a, a) + \sum_{b\in\mathrm{B}} \hat{l}_\lambda(i, b)\hat{\mathrm{F}}_\lambda(b, a)\hat{\mathrm{E}}_\lambda(a, a) + \dots, \quad a \in \mathrm{A}$$

notre somme s'écrit alors

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{a\in\mathrm{A}} \hat{m}_\lambda(i, a) \sum_{c_1,\dots,c_m\notin\mathrm{A}} \hat{\mathrm{F}}_\lambda(a, c_1) \dots \hat{\mathrm{F}}_\lambda(c_{m-1}, c_m)\hat{\eta}_\lambda(c_m, j)$$

donc finalement notant

$$\hat{\eta}_\lambda^{\mathrm{A}}(a, j) = \sum_{m\geq 0} \sum_{c_1,\dots,c_m\notin\mathrm{A}} \hat{\mathrm{F}}_\lambda(a, c_1) \dots \hat{\mathrm{F}}_\lambda(c_{m-1}, c_m)\hat{\eta}_\lambda(c_m, j)$$

on a

$$\hat{p}_\lambda(i, j) = {}^{\mathrm{A}}\hat{p}_\lambda(i, j) + \sum_{a\in\mathrm{A}} \hat{m}_\lambda(i, a)\hat{\eta}_\lambda^{\mathrm{A}}(a, j) \tag{*}$$

d'autre part par le théorème de décomposition on a

$$\hat{p}_\lambda(i, j) = {}^{\mathrm{A}}\hat{p}_\lambda(i, j) + \sum_{a\in\mathrm{A}} \hat{m}_\lambda^{\mathrm{A}}(i, a)\hat{\eta}_\lambda^{\mathrm{A}}(a, j) \tag{**}$$

THÉORÈME 2.1. — Pour tout $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ on a $\hat{m}_\lambda^{\mathrm{A}}(., a) = c_{\mathrm{A},a}\hat{m}_\lambda(., a)$.

Démonstration. — Il suffit de faire le cas $\mathrm{A} = \{ a \}$, comparant (*) et (**) et sommant sur j

$$\hat{m}_\lambda^{\{a\}}(i, a)\hat{\eta}_\lambda^{\{a\}}(a) = \hat{m}_\lambda(i, a)\hat{\eta}_\lambda^{\{a\}}(a)$$

ou encore

$$\hat{m}_\lambda^{\{a\}}(i, a) = c_{\lambda,a}\hat{m}_\lambda(i, a)$$

comme $m_t^{\{a\}}(., a)$ et $c_{\lambda,a}$, $m_t(., a)$ sont des lois de sortie de Π, dont les transformées de Laplace coïncident pour une valeur, ces lois sont égales ; et comme λ est arbitraire la constante ne dépend pas de λ.

SECTION 2. Les lois d'entrée et de sortie de Π.

On note D l'ensemble des points frontières tenaces

$$\underset{\sim}{n}^{\mathrm{B}}(t) \text{ la cardinalité de } \underset{\sim}{\mathrm{S}}_{\mathrm{B}} \cap]0, t[$$

Les définitions suivantes sont empruntées à Neveu [*2*].

$\bar{\Pi}$-PERTURBATION. — Une famille de matrices positives $\{ R_{s,t} ; s>0, t>0 \}$ sur $I \times I$ est dite une $\bar{\Pi}$-perturbation si

1) $\bar{\Pi}_u R_{s,t} \bar{\Pi}_v = R_{u+s,t+v}$

2) $R_{s,t}\underset{\sim}{1} \leqslant \bar{l}_s \left(\text{où } \int_0^t \bar{l}_s ds = \underset{\sim}{1} - \bar{\Pi}_t \underset{\sim}{1} \right)$.

DOMINATION ABSOLUE. — Soit $\bar{\Pi}$, Π deux MTSS sur $I \times I$. $\bar{\Pi}$ est dite absolument dominée par Π si

1) $\bar{\Pi} \leqslant \Pi$

2) $\lim\limits_{u \downarrow 0} \dfrac{1}{u} \bar{\Pi}_s [\Pi_u - \bar{\Pi}_u] \bar{\Pi}_t = 0$.

LEMME 3. — Soit $a \in D$ et $A \subseteq B$ tel que $a \in A$, alors

$$\lim_{u \downarrow 0} \xi_u(a, .)\, {}^A\Pi_t = \lim_{u \downarrow 0} \downarrow \xi_u(a, .) {}^A\Pi_{t-u} = 0$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{u \downarrow 0} & \sum_k \xi_u(a, k) {}^A p_t(k, j) \\
&= \lim_{u \downarrow 0} \sum_k P_a \{ X_u = k \} P \{ X_{t+u} = j, \underset{\sim}{S}_A \cap]u, t + u[= \varnothing \mid X_u = k \} \\
&= \lim_{u \downarrow 0} P_a \{ X_{t+u} = j, \underset{\sim}{S}_A \cap]u, t + u[= \varnothing \} \\
&= \lim_{u \downarrow 0} P_a \{ X_t = j, \underset{\sim}{S}_A \cap]u, t[= \varnothing \} \\
&= P_a \{ X_t = j, \underset{\sim}{S}_A \cap]0, t[= \varnothing \} \\
&= P_a \{ \inf \underset{\sim}{S}_a > 0 \} = 0
\end{aligned}$$

PROPOSITION 2.2.

a) ${}^D\Pi$ est la MTSS du processus obtenu par la Φ-perturbation

$$Q_{s,t}(i, j) = \sum_{a \notin D} l_s(i, a) P_a \{ X_t = j, \underset{\sim}{n}^B(t) = 0 \}$$

b) ${}^D\Pi$ est absolument dominée par Π.

Démonstration.

a) Ce résultat est essentiellement contenu dans Chung [*2*]. Comme dans Neveu [*2*], on pose

$$ {}^D p_t^{\langle 0 \rangle}(i, j) = f_t(i, j) \qquad Q_{s,t}^{\langle 0 \rangle}(i, j) = Q_{s,t}(i, j)$$

$$ {}^D p_t^{\langle n \rangle}(i, j) = \int_0^t Q_{t-s,s}^{\langle n-1 \rangle}(i, j) ds \quad (= P_i \{ X_t = j, \underset{\sim}{n}^B(t) = n \})$$

$$Q_{s,t}^{\langle n\rangle}(i,j) = \sum_{a\notin D} l_s(i,a) P_a\{X_t = j, \underset{\sim}{n}^B(t) = n\}$$

alors

$$\sum_{n\geqslant 0} {}^D p_t^{\langle n\rangle}(i,j) = P_i\{X_t = j, \underset{\sim}{n}^B(t) < \infty\} = P_i\{X_t = j, T^D > t\} = {}^D p_t(i,j)$$

b) $\lim_{u\downarrow 0} \frac{1}{u}[{}^D\Pi_s(\Pi_u - {}^D\Pi_u){}^D\Pi_t](i,j)$

$$= \lim_{u\downarrow 0} \frac{1}{u}\left[{}^D\Pi_s\left(\sum_{a\in D}\int_0^u l_{u-v}^D(.,a)\otimes \xi_v(a,.)dv\right){}^D\Pi_t\right](i,j)$$

$$= \lim_{u\downarrow 0} \frac{1}{u}\left[\sum_{a\in D}\int_0^u \sum_h \sum_k {}^D p_s(i,h) l_{u-v}^D(h,a)\xi_v(a,k)\,{}^D p_t(k,j)dv\right]$$

$$= \lim_{u\downarrow 0} \frac{1}{u}\int_0^u \sum_{a\in D}\sum_k l_{s+u-v}^D(i,a)\xi_v(a,k)\,{}^D p_t(k,j)dv$$

$$= \lim_{u\downarrow 0} \sum_{a\in D} l_{s+u}^D(i,a)\sum_k \xi_u(a,k)\,{}^D p_t(k,j) = 0.$$

Remarquons que D est le plus petit ensemble satisfaisant le lemme 3 pour tout a tenace, on pose alors

$$\mathscr{F} = \{h_t : h_t \text{ est une loi d'entrée de } \Pi \text{ et } \lim_{u\downarrow 0} h_u\,{}^D\Pi_{t-u} = 0\}$$

$$\mathscr{G}_b = \{g_t : g_t \text{ est une loi de sortie de } \Pi, \sup_j \int_0^t g_u(j)du < \infty \text{ pour tout } t$$
$$\text{et } \lim_{u\downarrow 0} {}^D\Pi_{t-u}g_u = 0\}$$

LEMME 4. — Soit h_t une loi d'entrée de Π et $\bar\Pi \leqslant \Pi$, alors

$$\lim_{u\downarrow 0} h_u\bar\Pi_{t-u} = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{\mu\uparrow\infty} \hat h_\mu[I + (\mu-\lambda)\bar\Pi_\lambda] = 0$$

Démonstration. — Il est facile de voir que

$$\int_0^\infty e^{-\mu u}h_u du + (\mu-\lambda)\int_0^\infty e^{-\mu u}h_u du \int_0^\infty e^{-\lambda t}\bar\Pi_t dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\lim_{u\downarrow 0} h_u\bar\Pi_{t-u}dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t e^{-(\mu-\lambda)u}d(h_u\bar\Pi_{t-u})dt$$

donc

$$\lim_{\mu\uparrow\infty} \hat h_\mu[I + (\mu-\lambda)\bar\Pi_\lambda] = 0 \quad \text{est équivalent à} \quad \lim_{u\downarrow 0} h_u\bar\Pi_{t-u} = 0 \quad dt\text{-p. p.}$$

mais pour t donné, il existe s tel que

$$0 = \lim_{u \downarrow 0} [h_u \bar{\Pi}_{t+s-u}](i) \geqslant \lim_{u \downarrow 0} [h_u \bar{\Pi}_{t-u}](i) \bar{p}_s(i, i)$$

comme $\bar{p}_s(i, i) > 0$ pour tout s, le lemme en découle.

On a un résultat analogue pour les lois de sortie de Π.

Remarques.

1) On a le résultat facile :

si

$$\xi_t(a, j) = \sum_{b \in D} c_b \xi_t(b, j) + \sum_{b' \notin D} d_{b'} \xi_t(b', j), \quad a \in D, \quad d_{b'} \geqslant 0$$

alors

$$c_b = \delta_{ab} \quad \text{et} \quad d_{b'} = 0, \quad b \in D, \quad b' \notin D$$

en effet sommant sur j on a

$$1 = \Sigma c_b + \Sigma d_{b'}$$

d'autre part

$$1 = P_a \{ \inf \underset{\sim}{S}_D = 0 \} = \Sigma c_b + \Sigma d_{b'} P_{b'} \{ \inf \underset{\sim}{S}_D = 0 \}$$

donc si $d_{b'} \neq 0$ il faut

$$P_{b'} \{ \inf S_D = 0 \} = 1$$

donc $d_{b'} = 0$ (on a supposé qu'il n'y a pas de points frontières éphémères) et alors

$$\delta_{ab} = P_a \{ \inf \underset{\sim}{S}_b = 0 \} = c_b$$

2) Si $a \notin D$,

$$\xi_t(a, j) = \sum_{b \in D} P_a \{ \inf \underset{\sim}{S}_b = 0 \} \xi_t(b, j) + \sum_{i \in \underset{\sim}{I}} P_a \{ X_0 = i \} p_t(i, j) + P_a \{ X_0 \notin I, \tau > 0, X_t = j \}$$

Par 1) les $\xi_t(a, .)$, $a \in D$, sont indépendantes ; mais 2) montre que pour $a \notin D$ on ne peut rien espérer. Pour les $\xi_t(a, .)$, $a \in D$, on a le résultat plus fort.

THÉORÈME 2.3. — Les $\xi_t(a, .)$, $a \in D$, sont extrémales parmi les lois d'entrée de Π. De plus dim $\mathscr{F} = \underset{\sim}{n}(D)$ (= le nombre de points frontières tenaces).

Démonstration.

a) Soit $0 \leqslant h_t \leqslant \xi_t(a, .)$, une loi d'entrée de Π ; on a

$$\begin{aligned}\hat{h}_\lambda &= \hat{h}_\mu[\mathrm{I} + (\mu - \lambda)\hat{\Pi}_\lambda] \\ &= \hat{h}_\mu[\mathrm{I} + (\mu - \lambda)\,{}^a\hat{\Pi}_\lambda] + (\mu - \lambda)\langle \hat{h}_\mu, \hat{l}_\lambda^{\{a\}}(., a)\rangle \hat{\xi}_\lambda(a, .)\end{aligned}$$

mais par le lemme 3 on a, en posant $\mathrm{A} = \{ a \}$ et puisque $0 \leqslant h_t \leqslant \xi_t(a, .)$,

$$\lim_{\mu \uparrow \infty} \hat{h}_\mu[\mathrm{I} + (\mu - \lambda)\,{}^a\hat{\Pi}_\lambda] = 0$$

alors

$$c(\lambda) = \lim_{\mu \uparrow \infty} (\mu - \lambda)\langle h_\mu, \hat{l}_\lambda^{\{a\}}(., a)\rangle$$

existe, et on a

$$\hat{h}_\lambda = c(\lambda)\hat{\xi}_\lambda(a, .)$$

mais h_t et $c(\lambda)\xi_t(a, .)$ étant des lois d'entrée de Π dont les transformées de Laplace coïncident pour une valeur du paramètre, elles sont égales (et alors $c(\lambda)$ ne dépend pas de λ).

b) Soit $h_t \in \mathscr{F}$, on a encore par le lemme 3 avec cette fois $\mathrm{A} = \mathrm{D}$

$$\begin{aligned}\hat{h}_\lambda &= \sum_{a \in \mathrm{D}} \lim_{u \uparrow \infty} (\mu - \lambda)\langle \hat{h}_\mu, \hat{l}_\lambda^{\mathrm{D}}(., a)\rangle \sum_{b \in \mathrm{D}} \hat{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(a, b)\hat{\eta}_\lambda^{\mathrm{D}}(b, .) \\ &= \sum_{a \in \mathrm{D}} \lim_{u \uparrow \infty} (\mu - \lambda)\langle \hat{h}_\mu, \hat{l}_\lambda^{\mathrm{D}}(., a)\rangle \hat{\xi}_\lambda(a, .)\end{aligned}$$

donc $\dim \mathscr{F} = \underset{\sim}{n}(\mathrm{D})$.

THÉORÈME 2.4. — *Les $m_t(., a)$, $a \in \mathrm{D}$, sont extrémales parmi les lois de sortie de Π. De plus $\dim \mathscr{G}_b = \underset{\sim}{n}(\mathrm{D})$.*

Démonstration. — On a

$$\hat{\Pi}_\lambda = {}^a\hat{\Pi}_\lambda + \hat{m}_\lambda^{\{a\}}(., a) \otimes \hat{\eta}_\lambda^{\{a\}}(a, .)$$

alors

$$\hat{m}_\lambda^{\{a\}}(., a) = [\mathrm{I} + (\mu - \lambda)\,{}^a\hat{\Pi}_\lambda]\hat{m}_\mu^{\{a\}}(., a) + (\mu - \lambda)\hat{m}_\lambda^{\{a\}}(., a)\langle \hat{\eta}_\lambda^{\{a\}}(a, .), \hat{m}_\mu^{\{a\}}(., a)\rangle$$

appliquant le lemme 1 avec $\mathrm{A} = \{ a \}$, on a

$$(\mu - \lambda)\hat{\mathrm{E}}_\lambda^{\{a\}}(a, a)\langle \hat{\eta}_\lambda^{\{a\}}(a, .), \hat{l}_\mu^{\{a\}}(., a)\rangle \hat{\mathrm{E}}_\mu^{\{a\}}(a, a) = \hat{\mathrm{E}}_\lambda^{\{a\}}(a, a) - \hat{\mathrm{E}}_\mu^{\{a\}}(a, a)$$

donc

$$\hat{m}_\lambda^{\{a\}}(., a) = [\mathrm{I} + (\mu - \lambda)\,{}^a\hat{\Pi}_\lambda]\hat{m}_\mu^{\{a\}}(., a) + \hat{m}_\lambda^{\{a\}}(., a) - \hat{m}_\lambda^{\{a\}}(., a)\hat{\mathrm{E}}_\mu^{\{a\}}(a, a)/\hat{\mathrm{E}}_\lambda^{\{a\}}(a, a)$$

comme

$$\lim_{\mu \uparrow \infty} \hat{\mathrm{E}}_{\mu}^{\{a\}}(a, a) = 0 \quad \text{pour} \quad a \in \mathrm{D}$$

on a

$$\lim_{\mu \uparrow \infty} [\mathrm{I} + (\mu - \lambda)\, {}^{a}\hat{\Pi}_{\lambda}] \hat{m}_{\mu}^{\{a\}}(., a) = 0$$

alors que $m_t^{\{a\}}(., a)$ soit extrémale se montre comme au théorème précédent mais par le théorème 2.1, $m_t^{\{a\}}(., a) = cm_t(., a)$.

La dernière partie du théorème se montre comme au théorème précédent.

BIBLIOGRAPHIE

CHUNG, K. L.

[1] *Markov chains with stationary transition probabilities*. Second edition, Springer-Verlag, 1967.

[2] On the boundary theory for Markov chains. *Acta Math.*, t. **110**, 1963, p. 19-77.

[3] On the boundary theory for Markov chains II. *Acta Math.*, t. **115**, 1966, p. 111-163.

[4] *Markov process with infinities. Markov processes and potential theory*, John Wiley and Sons, 1967.

[5] *Lecture notes on boundary theory for Markov chains*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, 1970.

MEYER, P. A.

[1] *Guide détaillé de la théorie « générale » des processus*, Séminaire de probabilité II, Université de Strasbourg, Springer-Verlag, 1968.

NEVEU, J.

[1] Une généralisation des processus à accroissements positifs indépendants. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, t. **25**, 1960-1961, p. 36-61.

[2] *Lattice methods and submarkovien processes*. Proc. 4th Berkeley Sym. on Prob. and Stat., 1961, p. 347-391.

[3] Sur les états d'entrée et les états fictifs d'un processus de Markov. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **17**, 1961, p. 323-337.

(Manuscrit reçu le 26 juin 1970).

Faculté des Sciences,
Sherbrooke, Québec.