ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TORTRAT

Sur les mesures aléatoires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, n° 1 (1971), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_1_1_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VII, n° 1, 1971, p. 1-8.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Sur les mesures aléatoires

par

A. TORTRAT

SUMMARY. — In I we prove the compacity of the law of any random uniformly σ-finite measure on the borelian σ-algebra of a Lusinian space E. In II we study general properties of punctual measures on R_+, defined by the sequence of the conditional laws of $(T_{n+1} \mid T_1, \ldots, T_n)$.

I. — LA COMPACITÉ DES MESURES ALÉATOIRES UNIFORMÉMENT σ-FINIES (1) SUR UN ESPACE LUSINIEN E

L'utilité d'une telle compacité a été montrée dans [*2*], auquel cette première partie apporte un complément.

Soit E un espace Lusinien (2), muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. Nous considérons l'espace Ω de *toutes* les mesures ($\geqslant 0$) définies sur $\mathcal{B}$ et finies sur une *même* suite E_n ($E_n \in \mathcal{B}$) croissant vers E. Par exemple E est un espace métrique, les E_n sont des boules de même centre, de rayon n, les ω sont alors toutes les mesures finies sur les parties bornées de E. $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ désigne la tribu (« cylindrique »), dans Ω, engendrée par les v. a. ωB ($B \in \mathcal{B}$). Cette tribu est à base dénombrable comme $\mathcal{B}$ et égale celle engendrée par les ωA relatives à tout anneau $\mathcal{A}$ (tel $\cup \mathcal{B}_{E_n}$, $\mathcal{B}_{E_n}$ restriction de $\mathcal{B}$ à E_n) sur lequel les ω sont finies, si $\mathcal{B}$ égale le σ-anneau engendré par $\mathcal{A}$.

(1) Ce sont les mesures aléatoires que M. R. Fortet a appelées σ-finies; nous préférons ajouter la précision essentielle « uniformément ».
(2) La définition de E Lusinien est rappelée après la preuve du lemme 2.

LEMME 1. — Lorsque E est espace métrique, $\mathcal{L}$ est aussi la plus petite tribu $\mathcal{L}'$ rendant mesurables les intégrales ωf des fonctions réelles continues bornées : $f \in \mathcal{C}(E)$.

Preuve. — Soit F un fermé borné. On a $1_F = \lim \downarrow f_n$, où f_n continue prend ses valeurs dans [0, 1], et est à support borné. Inversement toute f continue $\geqslant 0$ est une limite croissante de fonctions simples χ_n mesurables $\mathcal{B}$. On a donc $\omega F = \lim \downarrow \omega f_n$ et $\omega f = \lim \uparrow \omega \chi_n$. Ainsi les ωF donc les ωB (suivant la propriété de preuve aisée dite ci-dessus) sont mesurables $\mathcal{L}'$ et les ωf sont mesurables $\mathcal{L}$.

Remarque 1. — Peut-on prouver que $\mathcal{L}_{\mathcal{B}} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ lorsque $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$, mais que les ω ne sont pas nécessairement toutes finies sur $\mathcal{A}$?

LEMME 2. — Soit Ω' l'espace des mesures $\omega'(\geqslant 0)$ bornées (: $\omega' E < \infty$), et $\mathcal{L}'$ la tribu correspondante. On pose $C_n = E_n - E_{n-1}$ ($E_0 = \phi$). L'application

$$\omega' = \sum_{a_n \neq 0} 2^{-n} \frac{\omega_n}{a_n e^{a_n}}, \quad \text{avec} \quad a_n = \omega C_n, \qquad \omega_n B = \omega(B . C_n), \tag{1}$$

définit une correspondance biunivoque et bimesurable entre $(\Omega, \mathcal{L})$ et $(\Omega_0', \mathcal{L}_0')$, Ω_0' étant la partie de Ω' :

$$\Omega_0' = \{ \omega' : \omega' C_n < 2^{-n} \} \in \mathcal{L}', \ \mathcal{L}_0' \text{ restriction de } \mathcal{L}' \text{ à } \Omega_0'. \tag{2}$$

Preuve :

a) La biunivocité résulte de ce que, si ω_n' est la restriction de ω' à C_n,

$$\frac{\omega_n'}{a_n'} = \frac{\omega_n}{a_n}, \quad \text{avec} \quad a_n' = \omega' C_n = \frac{1}{2^n e^{a_n}} ; \tag{3}$$

si $a_n' < 2^{-n}$, a_n existe bien défini par $a_n = -\operatorname{Log}(2^n a_n')$ si $a_n' \neq 0$, 0 si $a_n' = 0$.

b) La bimesurabilité résulte des relations

$$\{ \omega' : \omega A < a, \ A \subset C_n \} = \left\{ \omega' : \omega' A < \frac{a \omega' C_n}{-\operatorname{Log}(2^n \omega' C_n)} \right\} \in \mathcal{L}'$$

et

$$\{ \omega : \omega' A < a, \ A \subset C_n \} = \{ \omega : \omega A < 2^n e^{\omega C_n} a . \omega C_n \} \in \mathcal{L}.$$

Par définition de E, il existe un espace polonais X, que nous munissons de sa tribu borélienne $\mathcal{A}$ et une application $\varphi(x) = y$ continue et injective de X sur E : Il y a isomorphisme entre $(X, \mathcal{A})$ et $(E, \mathcal{B})$ (*) (: $x \leftrightarrow \varphi(x)$, $A = \varphi^{-1}B \leftrightarrow B$). Il y a donc aussi un tel isomorphisme entre $(\Omega'_0, \mathfrak{L}'_0)$ et $(\Omega''_0, \mathfrak{L}''_0)$, où Ω'' est l'ensemble des mesures $(\geqslant 0)$ ω'' bornées sur $(X, \mathcal{A})$, et $\Omega''_0 = \{ \omega'' : \omega''\Gamma_n < 2^{-n},\ \text{tout } n \}$, avec $\Gamma_n = \varphi^{-1}C_n$; les tribus $\mathfrak{L}''$ et $\mathfrak{L}''_0$ sont définies comme ci-dessus $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}_0$ et $\mathfrak{L}'_0$. La tribu $\mathfrak{L}''$ n'est autre que la tribu borélienne de l'espace Ω'' *muni de la distance de Prohorov*; on sait en effet que Ω'' est polonais pour cette distance, sa tribu est identique à celle relative à la topologie de la convergence des ωf sur $\mathcal{C}(X)$ (les ouverts dans Ω'' sont les mêmes pour les deux topologies, X étant polonais), c'est donc $\mathfrak{L}''$ (lemme 1). Ainsi, Ω''_0 est une partie borélienne de Ω'', et se donner une probabilité P sur $(\Omega, \mathfrak{L})$ équivaut à se donner P' ou P'' (images) sur $(\Omega'_0, \mathfrak{L}'_0)$ ou $(\Omega''_0, \mathfrak{L}''_0)$ respectivement, ou encore P'' sur $(\Omega'', \mathfrak{L}'')$, avec $P''\Omega''_0 = 1$. P'' est donc compacte (au sens topologique : K-régulière, ou t-régulière, *a fortiori* au sens ensembliste, de Marczewski) sur la tribu à *base dénombrable* $\mathfrak{L}''_0$. C'est dire qu'elle est parfaite, sur $\mathfrak{L}''_0$, donc que P l'est sur $\mathfrak{L}_0$, car toute image conserve la propriété pour une probabilité d'être parfaite. Ainsi on a :

THÉORÈME I. — La loi P d'une mesure aléatoire uniformément σ-finie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ d'un espace Lusinien E, est compacte si elle est définie sur la tribu cylindrique de l'espace Ω de toutes les mesures (finies sur un même anneau $\mathcal{A} = \cup\, \mathcal{B}_{E_n}$, $E_n \uparrow E$).

Remarque 2. — Dans Ω' existe une distance ρ', correspondant à la distance de Prohorov ρ'' dans Ω'', pour laquelle $\mathfrak{L}'$ est la tribu borélienne. Cette tribu correspond à la topologie définie par la convergence des $\omega' f'$ pour toute $f' \in \mathcal{C}'(E) \supset \mathcal{C}(E)$, où $\mathcal{C}'(E)$ se compose de toutes les fonctions $f'(y) = f'' \circ \varphi^{-1}(y)$, avec f'' continue bornée sur X. Ces f' ne sont pas nécessairement continues, mais toute $g'(y) \in \mathcal{C}(E)$ est image de

$$g''(x) = g' \circ \varphi(x)$$

continue, donc $\in \mathcal{C}'(E)$. La classe Γ' compacte approchant P' sur $\mathfrak{L}'$ (ou $\mathfrak{L}'_0$) est donc formée de compacts pour cette topologie. Mais la correspondance (1) entre Ω'_0 et Ω rompt cette signification, bien qu'ici, l'application $\omega' \to \omega$ étant injective, P soit approchée par la classe compacte Γ image de la classe Γ'. La tribu $\mathfrak{L}$ n'est plus reliée à une notion de convergence des ω. Lorsque E est un espace métrique, une définition naturelle est celle de la convergence des ωf pour chaque f de $\mathcal{C}(E)$ qui soit, en outre, à support borné.

(*) Ce point est loin d'être élémentaire, cf. par exemple *Lecture notes in Mathematics*, n° 139, Springer 1970, de A. BADRIKIAN.

II. — SUR LES MESURES ALÉATOIRES PONCTUELLES LES PLUS GÉNÉRALES, DANS R

Placons-nous, en fait, dans $R_+ = \{ t \geqslant 0 \}$. Par définition, l'événement élémentaire ω est identifiable à une suite infinie presque sûrement strictement croissante

$$0 \leqslant T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots, T_i(\omega) \ldots$$

P est une loi de probabilité sur la tribu cylindrique $\mathfrak{L}$ dans $\Omega = \{ \omega \}$, c'est-à-dire la plus petite tribu rendant mesurables les v. a. $T_i(\omega)$ (de Ω dans R_+). Notre seule hypothèse sera, pour l'instant :

(H_1) *a)* $N(t)$ est fini et augmente indéfiniment avec t,
b) $P\{ T_i = T_{i+1} \} = 0$, tout i.

Nous voulons étudier la définition de la loi temporelle de ce processus (*i. e.* P sur $\mathfrak{L}$) au moyen de la suite des fonctions

$$\overline{H}_{n+1}(\tau_1, \ldots \tau_n, \tau) = P\{ T_{n+1} > \tau \mid T_1 = \tau_1, \ldots T_n = \tau_n \}. \tag{1}$$

Il est, en effet, toujours possible de définir P par ces lois conditionnelles.

L'hypothèse (H_1) *b)* se traduit par $\overline{H}_{n+1}(\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_n) \overset{\text{p.s.}}{=} 1$, compte tenu de ce que, vu la définition (1), H_{n+1} est continue à droite comme fonction de τ. Pour chaque τ fixé, $\overline{H}_{n+1}(\theta, \tau)$ est mesurable en $\theta = \prod_1^n \tau_i \in R_+^n$ et le « p. s. » ci-dessus signifie sauf pour un ensemble P-nul de valeurs de θ. Il est entendu que θ décrit le domaine $0 \leqslant \tau_1(\theta) \leqslant \tau_2(\theta) \ldots \leqslant \tau_n(\theta) \leqslant \tau$ (lorsque $\tau_{n+1} = \tau$ fixé). Nous écrirons aussi $\theta \leqslant \tau$ pour $\tau_n(\theta) \leqslant \tau$. La définition de la suite des $\overline{H}_{n+1}$ est alors arbitraire, ces conditions étant posées, à ceci près qu'il faudra en plus imposer (H_1) *a)*.

Remarque 3. — Nous n'avons besoin de connaître les $\overline{H}_{n+1}(\theta, \tau)$ que p. s. relativement à $P(d\theta)$ $(\theta \leqslant \tau)$ et désignerons par $v_t(d\theta)$ la mesure $\overline{H}_{n+1}(\theta, t)P(d\theta)$ sur le domaine $\theta \leqslant t$ (l'indice n étant sous-entendu) on a donc ([ ] désignant la variation totale)

$$\begin{aligned} v_t(d\theta) &= P\{ T_{n+1} > t, d\theta \}, \\ [v_t] &= \int_{\theta \leqslant t} P(d\theta)\overline{H}_{n+1}(\theta, t) = P\{ T_{n+1} > t, T_n \leqslant t \}. \end{aligned} \tag{2}$$

On a

$$[v_t] = P\{ N(t) = n \}, \quad \text{soit} \quad p_n(t) \text{ cette fonction.}$$

Nous poserons encore

$$(3) \qquad H_{n+1}(t, \tau) = P\{T_{n+1} > \tau \mid N(t) = n\} = \frac{\int_{\theta \leqslant t} \overline{H}_{n+1}(\theta, \tau) P(d\theta)}{p_n(t)}, \quad \text{si } p_n(t) \neq 0.$$

Proposition 1. — Les fonctions $p_n(t)$ et $H_{n+1}(t, \tau)$ sont continues à droite (en t et τ séparément, avec $p_n(t) \neq 0$, pour la deuxième).

La continuité en probabilité du processus $N(t)$ équivaut à la continuité en τ des $\overline{H}_{n+1}(\theta, \tau)$ pour presque tout θ ($\theta \leqslant t$, modulo P). Alors $p_n(t)$ est continue et $H_{n+1}(t, \tau)$ l'est en chacun de ses arguments ($p_n(t) \neq 0$).

Preuve :

a) On a (n fixé)

$$p_n(t') - p_n(t) = \int_{\theta \leqslant t} \overline{H}(\theta, t') - \overline{H}(\theta, t) P(d\theta) + \int_{t < \theta \leqslant t'} \overline{H}(\theta, t') P(d\theta).$$

Puisque le numérateur de (3) a son accroissement en t majoré par $P\{t < T_n \leqslant t'\}$, les continuités à droite affirmées dans l'énoncé de la proposition sont bien assurées.

b) Dire que $N(t)$ n'est pas continu en probabilité, en t, c'est dire qu'il existe n et $\alpha > 0$ avec $P\{T_{n+1} = t\} = \alpha$, donc que

$$\int_0^{t'} \{\overline{H}(\theta, t') - \overline{H}(\theta, t)\} P(d\theta) \text{ reste } \geqslant \alpha \text{ lorsque } t' \uparrow t.$$

Il est pour cela nécessaire et suffisant que $\overline{H}(\theta, t)$ ne soit pas p. s. en θ (modulo P) continue.

c) On a (avec $\Delta =]t', t]$

$$P\{\Delta N \geqslant 1\} = \sum_0^{\infty} P\{T_n \leqslant t', T_{n+1} \in \Delta\}$$

et

$$\Delta p_n(t) = -P\{T_n \leqslant t', T_{n+1} \in \Delta\} + P\{T_n \in \Delta, T_{n+1} > t\},$$

d'où les continuités de p_n et H_{n+1} lorsque $N(t)$ est continu en Probabilité.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où :

(H_2) Le processus $N(t)$ est continu en probabilité.

Désignons par $\mathcal{O} = \sum_j \Delta_j$ ($\Delta_j = \Delta_j^{(n)}$: d'ordre n), la somme d'intervalles ouverts Δ_j telle que :

$$\mathcal{O} = \{t : p_n(t) > 0, t > 0\}, \Delta_j =]c_j, C_j[.$$

Proposition 2. — La connaissance de $\overline{H}_{n+1}(\theta, t)$ n'est utile que lorsque τ_n et t appartiennent à un même intervalle Δ_j.

Preuve. — On a

$$p_n(t') = \int_{\theta \leqslant t'} \overline{H}(\theta, t')P(d\theta) \geqslant \int_{\theta \leqslant t'} \overline{H}(\theta, t)P(d\theta), \quad \text{tout} \quad t \geqslant t'.$$

Si donc il existe entre $\tau_n(\theta)$ et $t > \tau_n(\theta)$ un t' avec $p_n(t') = 0$, $\overline{H}(\theta, t)$ est nulle pour tout $t \geqslant t'$, p. s. modulo $P(d\theta)$. La connaissance de $\overline{H}$ est donc inutile si $\tau_n(\theta) \notin \mathcal{O}$, car $P\{T_n = c_j\} = 0$ et si $\tau_n(\theta) \in \Delta_j$, $\overline{H}_{n+1}(\theta, t)$ est nulle pour $t \geqslant C_j$, p. s. modulo $P(d\theta)$.

Remarque 4. — En fait, $P\{T_n \in \mathcal{O}\} = 0$. Ce point est intuitif, puisque $t \in \mathcal{O}$ signifie que $p_n(t) = P\{T_n \leqslant t,\ T_{n+1} > t\} = 0$, c'est-à-dire que t ne peut (p. s.) séparer T_n et T_{n+1}, alors que $T_{n+1} - T_n$ est p. s. > 0. Il nous semble cependant qu'une preuve rigoureuse doit passer par l'argument suivant :

Proposition 3. — T_n prend ses valeurs dans l'ouvert où $p_n(t) > 0$.

Preuve. — Posons $\mathcal{O}^c = F$ et soit m la loi de T_n. On a

$$\int_F p_n(t)m(dt) = 0 = \int_{\tau_n(\theta) \in F} P(d\theta) \int_{\tau_n \leqslant t \in F} \overline{H}(\theta, t)m(dt).$$

C'est dire que p. s. en θ, pour $\tau_n(\theta) \in F$, donc *a fortiori* p. s. en $\tau_n \in F$ (modulo m) il existe un θ (avec $\tau_n(\theta) = \tau_n$) tel que $m\Delta_\tau = 0$, pour $\Delta_\tau =]\tau_n, \tau_n + \varepsilon(\tau_n)[$ *et* $\overline{H}(\theta, t) > 0$ sur Δ_τ (puisque $\overline{H}(\theta, t)$ est continue à droite en t et vaut 1 pour tout $t = \tau_n(\theta)$). Soit A l'ensemble des $\tau \in F$, qui sont extrémités gauches de Δ_τ (non vides) m-nuls et $\mathcal{O}' = \Sigma\Delta_i'$ l'ouvert $\bigcup_{\tau \in A} \Delta_\tau$. Dans chaque $\Delta_i' =]a_i, b_i[$, tout t est intérieur à un Δ_τ, donc $[a_i + \varepsilon, b_i - \varepsilon]$ est recouvert par un nombre fini de ces Δ_τ et

$$m\Delta_i' = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \uparrow m[a + \varepsilon, b - \varepsilon] = 0.$$

$F - A$ étant m-nul et $A - \mathcal{O}'$ étant l'ensemble dénombrable des a_i, on a bien $mF = 0$.

Proposition 4. — Dans chaque $\overline{\Delta}_j = [c_j, C_j]$, le plus petit segment portant la v. a. T_n, admet c_j pour extrémité gauche (et $C_j' \leqslant C_j$ pour extrémité droite, vu la proposition 3). De même T_{n+1} prend ses valeurs dans $\sum_j [c'_j, C_j]$, $c'_j \geqslant c_j$. La preuve concernant T_n résulte de ce que $p_n(c_j) = 0$ implique

$$p_n(t) = \int_{\theta \leqslant t} P(d\theta)\overline{H}(\theta t) = \int_{c_j < \tau_n(\theta) \leqslant t} P(d\theta)\overline{H}(\theta, t) > 0, \quad t \in]c_j, C_j[.$$

L'affirmation concernant T_{n+1} résulte des propriétés de T_n et $\overline{H}_{n+1}(\theta, t)$. Ainsi on a le

THÉORÈME II. — Si $N(t)$ est un processus ponctuel sur R_+, continu en probabilité (à points $T_n \leqslant T_{n+1} \ldots$, p. s. séparés, $N(t)$ p. s. fini), il existe pour chaque n, un ouvert

$$\mathcal{O}^{(n)} = \Sigma\Delta_j^{(n)} = \{ t : P\{ N(t) = n \} > 0 \},$$

tel que

a) $P(T_n \notin \mathcal{O}^{(n)} = P(T_{n+1} \notin \mathcal{O}^{(n+1)}) = 0$,

b) Dans $[c_j, C_j]$, fermeture de $\Delta_j^{(n)}$, les plus petits segments portant T_n et T_{n+1} ont respectivement c_j pour extrémité gauche et C_j pour extrémité droite.

Remarque 5. — Lorsqu'on suppose le processus $N(t)$ Markovien, on peut expliciter $\overline{H}_{n+1}(\theta, t)$ dans chaque Δ_j, sous la forme

$$\overline{H}_{n+1}(\theta, t) \overset{\text{p.s.}}{=} \frac{H_{n+1}(t)}{H_{n+1}(\tau_n(\theta))},$$

suivant l'exposé [*1*]. $H_{n+1}(t)$ est une fonction continue non croissante dans chaque Δ_j, nulle en C_j (> 0 en $C_j - \varepsilon$); elle peut $\uparrow \infty$ lorsque $t \downarrow c_j$, à condition que

$$\int_{c_j}^{c_j+\eta} \frac{H_{n+1}(\eta)}{H_{n+1}(\tau)} P(d\tau) = p_n(\eta) \underset{\eta \downarrow 0}{\longrightarrow} 0 \; (P(d\tau) = \text{loi de } T_n).$$

Remarque 6. — L'hypothèse (H_1) *a)* ($N(t)$ fini) n'était pas indispensable. Elle limite lorsque $n \uparrow \infty$, l'accumulation à distance finie des $\Delta_j^{(n)}$. Cette accumulation paraît possible, pour n fixé. Approfondir ces points, lorsque $N(t)$ est markovien pourrait être intéressant (lié à la notion d'états instantanés ?).

Remarque 7. — Dans le cas des processus cumulatifs (cf. [*1*]), c'est-à-dire lorsqu'on impose

$$P(d\theta)\overline{H}_{n+1}(\theta, t) = p_n(t) \frac{n!}{t^n} d\tau_1 \ldots d\tau_n \quad \text{dans} \quad \{ \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n \leqslant t \},$$

la répartition de $\tau_1 \times \ldots \times \tau_n$ conditionnée par $N(t) = n$, est uniforme, on a $p_n(t) > 0$ pour tout $t > 0$, sous l'hypothèse (H_1) *a)*.

En effet, on a

$$p_{n'}(t') \geqslant p_n(t)\left(\frac{t'}{t}\right)^n\left(1 - \frac{t'}{t}\right)^{n-n'}, \quad \text{tous} \quad n' \leqslant n,\, t' < t\,;$$

Si donc $a_n = \inf\limits_{p_n(t)=0} t$, on a $p_{n'}(t') = 0$ pour tout $t' > a_n$ et $n' \geqslant n$. On aurait donc, suivant la proposition 3, $P\{T_{n'} \geqslant a_n\} = 0$, tout $n' \geqslant n$, ce qu'interdit (H_1) *a)*.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] R. Fortet et Kambouzia, Les répartitions ponctuelles markoviennes; estimations et tests concernant leurs lois de probabilité, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. V, 1969, p. 185.

[*2*] A. Tortrat, Sur les mesures aléatoires dans les groupes non abéliens, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. V-1, 1969, p. 31-47.

(Manuscrit reçu le 16 septembre 1970).