ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

G. BODIOU

Complément à l'article : « Sur les treillis booléens métriques et le conditionnement général des probabilités »

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, nº 1 (1971), p. 21-22

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_1_21_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VII, n° 1, 1971, p. 21-22. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Complément à l'article :

Sur les treillis booléens métriques et le conditionnement général des probabilités

(G. Bodiou; ces *Annales*, vol. VI, n° 1, 1970)

par

G. BODIOU
Faculté des Sciences, Marseille.

Dans cet article, les résultats essentiels sont :

Proposition A : *Tout treillis booléen métrique,* B, *est ortho-isomorphe à un sous-treillis du treillis des multiplicités linéaires fermées d'un espace de Hilbert,* H, *ou treillis (m. l. f.).*

Proposition B : *Tout sous-treillis booléen,* B, *du treillis (m. l. f.), est métrique (on suppose que* H *et* O *appartiennent à* B*).*

La preuve qui est donnée de la proposition B, dans l'article considéré, utilise la compacité de la sphère unité de H; elle n'est donc valable que si H est de dimension finie. Cette limitation est sévère; nous la levons dans cette note complémentaire.

Théorème B. — *Tout sous σ-treillis booléen,* B, *du triellis (m. l. f.) des multiplicités linéaires fermées de l'espace de Hilbert,* H, *à base dénombrable, est capable d'une probabilité strictement positive : c'est un σ-treillis de Boole métrique.*

On impose à B d'admettre O et H en tant que minorant et majorant universels, communs avec (m. l. f.).

On montrera qu'il existe un vecteur normé, Ψ, dans H, qui n'est orthogonal à aucun des éléments de B; la loi de probabilité quantique qu'il détermine est telle que :

$$\forall b \in \mathrm{B},\ b \neq 0,\ \mathrm{P}(b/\Psi) \neq 0.$$

On sait que $\mathrm{P}(b/\Psi)$ est le carré de la norme de la projection de Ψ sur b.

Soit, dans B, une chaîne maximale, c'est-à-dire non contenue dans une autre chaîne; son existence est assurée par l'axiome du choix. Cette chaîne est nécessairement finie ou dénombrable, puisque les compléments relatifs entre termes constituent une décomposition de H en sous-espaces orthogonaux et que H est à base dénombrable; soit $(\ldots\ b_i,\ b_{i'}\ \ldots)$ cette chaîne; elle a nécessairement O pour terme minimal et H pour terme maximal.

Soit b un élément quelconque de B.

Posons : $(b_{i'} - b_i) \wedge b = y_i$; $y_i \neq (b_{i'} - b_i) \Leftrightarrow \mathrm{C}b \wedge (b_{i'} - b_i) \neq 0$; c'est-à-dire :

« b ne contient aucun intervalle » $\Leftrightarrow$ « Cb coupe tout intervalle ».

S'il en était ainsi, les B_i, tels que : $\mathrm{B}_i = \mathrm{C}b \wedge b_i$, constitueraient une chaîne dont les intervalles seraient inclus dans les intervalles homologues de la chaîne des b_i, sans se confondre avec elle, puisque tous les B_i sont majorés par Cb. Cela est exclu par le caractère maximal de la chaîne des b_i. Donc :

« Tout élément, b, majore un intervalle $(b_{i'} - b_i)$ de la chaîne maximale ».

Il existe dans H un ensemble K de vecteurs orthonormés, tel que les vecteurs de K qui appartiennent à b_i constituent une base de b_i, pour tout i, et donc, ceux qui appartiennent à un intervalle $(b_{i'} - b_i)$ constituent une base de cet intervalle.

Il existe un vecteur unitaire, Ψ, de projection non nulle sur chacun des vecteurs de K, donc sur chacun de leurs majorants; c'est le vecteur que nous cherchions et l'on a bien, pour tout b non nul, dans B : $\mathrm{P}(b/\Psi) \neq 0$. *C. Q. F. D.*

(Manuscrit reçu le 3 septembre 1970).