ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN PELLAUMAIL

Application de l'existence d'un relèvement à un théorème sur la désintégration des mesures

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, nº 3 (1972), p. 211-215

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_3_211_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VIII, n° 3, 1972, p. 211-215. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Application de l'existence d'un relèvement à un théorème sur la désintégration des mesures

par

Jean PELLAUMAIL

Maître Assistant à l'I. N. S. A. Laboratoire de Probabilités.
Équipe de recherche associée au C. N. R. S., n° 250. Beaulieu. 35-Rennes.

SUMMARY. — The purpose of this paper is to prove a desintegration theorem for measures. By using a lifting in a appropriate way, we give a short proof of a theorem, which is analogous to a A. and C. Ionescu-Tulcea's one. In our paper, we deal with the case where the first space is any topological space with a regular measure, and the second space any measurable space.

1. INTRODUCTION

On se propose de prouver un théorème sur la désintégration des mesures en utilisant l'existence d'un relèvement (lifting). Le principal intérêt de cette application est de donner des démonstrations beaucoup plus *simples* que les démonstrations classiques.

De plus, le théorème obtenu est un peu plus général que ceux usuellement énoncés.

Notamment, ce théorème généralise la proposition 13, paragraphe 2 de [*1 bis*]. Il généralise également le théorème 5 page 150 de [*4*] puisque :

— d'une part, on étend le résultat aux fonctions boréliennes intégrables,

— d'autre part, l'espace de « départ » est un espace topologique quelconque et l'espace d' « arrivée » est un espace mesurable quelconque.

La démonstration proposée est différente des démonstrations classiques qui partent du théorème de Dunford-Pettis : en fait, si on « démonte » le mécanisme des démonstrations classiques dans le cas où on a un relèvement et où on utilise un théorème de Radon-Nikodym faible (cf. [*9*] ou [*9 bis*]), on obtient, après une dernière simplification, la démonstration directe proposée ici.

Cette dernière simplification ainsi que la possibilité de généraliser un théorème initial élémentaire au cadre proposé ici m'ont été indiquées par M. Métivier : qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

2. THÉORÈME

Soit Ω un espace topologique séparé et m une « mesure positive au sens de Bourbaki » définie sur Ω. Soit $\mathscr{F}$ la tribu des ensembles m-mesurables.

1) *Soit $(\Omega', \mathscr{F}_1')$ un espace mesurable et* T *une application m-mesurable de $(\Omega, \mathscr{F})$ dans $(\Omega', \mathscr{F}_1')$. Soit m' la mesure définie sur $\mathscr{F}_1'$ par $m'(\mathrm{A}') = m.[\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}')]$ et soit $\mathscr{F}'$ la tribu complétée de $\mathscr{F}_1'$ par rapport à m'.*
Supposons qu'il existe une application linéaire ρ' de $(\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_\infty)(\Omega', \mathscr{F}', m')$ dans $(\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_\infty)(\Omega', \mathscr{F}', m')$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) *$\rho'(f)$ appartient à la classe d'équivalence de f pour l'égalité presque sûre,*

(ii) $\sup\limits_{\omega\in\Omega} \rho'(|f(\omega)|) = \|f\|_\infty$,

(iii) *$f \geq 0$ presque sûrement implique $\rho'|f| \geq 0$.*

Alors il existe une application φ de Ω' dans l'ensemble des « mesures positives au sens de Bourbaki bornées par 1 *» définies sur Ω, application telle que :*

Pour toute fonction borélienne f m-intégrable, définie sur Ω, l'application $\omega' \rightsquigarrow \int f.d\varphi(\omega')$ appartient à $\mathrm{E}[f \mid \mathrm{T}]$ c'est-à-dire à la classe d'équivalence des fonctions g appartenant à $\mathscr{L}_\infty(\Omega', \mathscr{F}', m')$ et telles que, pour tout élément A *de $\mathscr{F}'$,*

$$\int_{\mathrm{A}} g.dm' = \int_{\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A})} f.dm$$

2) *Si Ω' est un espace topologique, si* T *est une application m-propre (cf. [1], § 2, définition 4) de Ω dans Ω' et si $\mathscr{F}_1'$ est la tribu des ensembles m'-mesurables de Ω', les conditions ci-dessus sont satisfaites.*

De plus, si on peut choisir pour ρ' un relèvement fort (cf. [4], chap. VIII), *pour tout élément ω' de Ω', le support de $\varphi(\omega')$ est contenu dans* $\mathrm{T}^{-1}(\omega')$.

PREUVE

a) *Construction de φ.*

Soit $(\mathrm{K}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un concassage de Ω pour m. Soit $\hat{\mathscr{K}}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur Ω et dont la restriction à chaque K_i est continue.

Pour tout élément i de I, et tout élément ω' de Ω', soit φ_i la mesure de Radon positive définie par, quel que soit f élément de $\hat{\mathscr{K}}$, $\langle \varphi_i(\omega'), f \rangle = \delta'[\mathrm{E}(f.1_{\mathrm{K}_i} \mid \mathrm{T})](\omega')$.

On a bien une mesure de Radon puisque $\varphi_j(\omega')$ est une application linéaire et que $\| f \|_\infty \leqslant 1$ implique $|\langle \varphi_i(\omega'), f \rangle| \leqslant 1$.

De plus, pour toute partie finie J de I, on a $\| f \|_\infty \leqslant 1$ implique $\left|\sum_{i\in\mathrm{J}} \langle \varphi_i(\omega'), f \rangle\right| \leqslant 1$; par conséquent, la famille $(\varphi_i(\omega'))_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable (quel que soit ω'). Ceci permet de poser $\varphi(\omega') = \sum_{i\in\mathrm{I}} \varphi_i(\omega')$ et $\varphi(\omega')$ est « une mesure positive au sens de Bourbaki bornée par 1 » qui satisfait au 1) de l'énoncé pour f élément de $\hat{\mathscr{K}}$.

Notons que ceci généralise déjà le théorème 5 page 150 de [4].

b) *Preuve du* 1) *si f est une fonction indicatrice d'ouvert m-intégrable.*

Soit $f = 1_\mathrm{U}$ avec U ouvert m-intégrable de Ω. Pour tout élément ω' fixé de Ω', soit $\int_\mathrm{U} d\varphi(\omega') = \int_\Omega 1_\mathrm{U}.d\varphi(\omega')$, cette intégrale étant prise au sens de Bourbaki (intégrale de 1_U par rapport à la « mesure » $\varphi(\omega')$).

Si on fait varier ω', la fonction $\int_\mathrm{U} d\varphi(.)$ pour U ouvert fixé de Ω, se présente comme l'enveloppe supérieure des fonctions. $\sum_{i\in\mathrm{J}} \langle \varphi_i(.), g \rangle$ pour J partie finie de I et $0 \leqslant g \leqslant 1_\mathrm{U}$, $g \in \hat{\mathscr{K}}$.

C'est donc une enveloppe supérieure de « relèvements » donc (cf. th. 3, p. 40 de [4] ou [3]) c'est un élément de $\mathscr{L}_\infty(\Omega', \mathscr{F}', \mu')$ dont la classe d'équivalence dans $\mathrm{L}_\infty(\Omega', \mathscr{F}', \mu')$ est l'enveloppe supérieure des classes d'équivalence des $\langle \varphi(.), g \rangle$, enveloppe supérieure dans l'espace complètement réticulé L_1. Ceci prouve que 1_U satisfait à la condition du 1).

c) *Preuve du* 1) *quand f est borélienne m-intégrable.*

Soit $\mathscr{C}$ la famille des fonctions f qui satisfont à la condition du 1) de l'énoncé du théorème. D'une part, $\mathscr{C}$ est un espace vectoriel. D'autre part, $\mathscr{C}$ est une classe monotone « dominée » (théorème de Lebesgue). Par conséquent (cf., par exemple, lemme 3, p. 241 de [*6 bis*]), $\mathscr{C}$ contient toutes les fonctions boréliennes m-intégrables.

d) *Preuve du début du* 2).

Puisque T est m-propre, m' est la mesure image de m par T. Le problème est donc de construire un relèvement linéaire sur $(L_1 \cap L_\infty)(\Omega', \mathscr{F}', m')$. Soit $(H_x)_{x \in X}$ un concassage de Ω' pour m'. Pour tout x, soit ρ_x un relèvement défini sur $L_\infty(H_x, \mathscr{F}_x, m)$ en désignant par $\mathscr{F}_x$ la tribu des ensembles m'-mesurables contenus dans H_x. Soit f un élément de $(L_1 \cap L_\infty)(\Omega', \mathscr{F}', m')$ et g un représentant de f dans $(\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_\infty)$ $(\Omega', \mathscr{F}', m')$. On pose :

$$\rho'(f) = \sum_{x \in X} \rho_x(g \,.\, 1_{H_x}).$$

On vérifie immédiatement que $\rho'(f)$ ne dépend que de f et que ceci définit un « relèvement linéaire » sur $(L_1 \cap L_\infty)(\Omega', \mathscr{F}', m')$.

e) *Preuve de la fin du* 2)

On reprend la démonstration du 1) mais en choisissant pour $(K_i)_{i \in I}$ un concassage de Ω pour m tel que la restriction de T à chaque K_i soit continue (cf. [*1 bis*], § 1, n° 8, proposition 10).

Soit A un compact de Ω et g une fonction continue positive dont le support est contenu dans A. Soit $a = \text{Sup}\ .g(\omega)$. Soit $A_i = K_i \cap A$. On a :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i(\omega'), g \rangle &= \rho'[E(g \,.\, 1_{K_i} \mid T)](\omega') \qquad \text{(par construction)} \\ &\leq \rho'[E(a \,.\, 1_{A_i} \mid T)](\omega') \\ &\leq a \,.\, \rho'(1_{T(A_i)})(\omega') \\ &\leq a \,.\, 1_{T(A_i)}(\omega') \end{aligned}$$

(puisque $T(A_i)$ est compact et que ρ' est un relèvement fort).

Donc $\langle \varphi(\omega'), g \rangle = 0$ si ω' n'appartient pas à T(A). Ceci montre que, pour tout ω', le support de $\varphi(\omega')$ est contenu dans $T^{-1}(\omega')$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Édition Initiale Hermann, Paris, 1955.
[*1 bis*] Bourbaki, *Intégration.* Chapitre IX, 1969.
[*2*] Dunford-Schwartz, *Linear Operators*, Part 1. John Wiley Sons, 1967.

[3] IONESCU-TULCEA, On the lifting property. I. *J. Math. Anal. Appl.*, t. **3**, 1961, p. 537-546.

[4] IONESCU-TULCEA, *Topics in the theory of lifting*. Springer-Verlag, 1969.

[5] D. MAHARAM, On a theorem of Von Neumann. *Proc. Am. Math. Soc.*, t. **9**, n° 6, 1958, p. 987-994.

[6] MÉTIVIER, Martingales à valeurs vectorielles. Applications à la dérivation des mesures vectorielles. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. **17**, 2, 1967, p. 175-208.

[6 bis] MÉTIVIER, *Notions fondamentales de la théorie des Probabilités*, Dunod, 1968.

[7] MEYER, *Probabilités et potentiel*, Hermann, 1966.

[8] J. Von NEUMANN, Algebraische Representanten der Funktionen bis auf eine Menge vom Masse Null. *J. Reine Angew. Math.*, t. **165**, 1931, p. 109-115.

[9] PELLAUMAIL, Sur la dérivation des mesures vectorielles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **269**, 1969, p. 904-907.

[9 bis] PELLAUMAIL, Sur la dérivation d'une mesure vectorielle. *Bull. Soc. Math. France*, t. **98**, 1970, p. 305 à 318.

(Manuscrit reçu le 7 février 1972).