ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN LEMAIRE

Une nouvelle définition de l'équitabilité pour les jeux de hasard. Application au paradoxe de Saint-Pétersbourg

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 2 (1973), p. 205-214
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_2_205_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 2, 1973, p. 205-214. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Une nouvelle définition de l'équitabilité pour les jeux de hasard. Application au paradoxe de Saint-Pétersbourg

par

Jean LEMAIRE
Assistant à l'Université de Bruxelles

DEUXIÈME PARTIE

APPLICATION AU PARADOXE DE SAINT-PÉTERSBOURG

RÉSUMÉ. — Nous appliquons la définition de l'équitabilité donnée dans la première partie au cas du Paradoxe de Saint-Pétersbourg. Les prévisions théoriques sont comparées aux résultats d'une simulation effectuée sur ordinateur. Certains effets secondaires comme la finitude de la fortune du banquier sont ensuite introduits dans l'analyse.

SUMMARY. — We apply the equitability theorem of the first part to the Petersburg Paradox and compare its predictions to the results of an extensive simulation of the game performed on computer. The boundedness of the banker's fortune is then introduced in the analysis.

1. MISE ÉQUITABLE

« Une pièce de monnaie est lancée jusqu'à ce que pile apparaisse. Le joueur A reçoit alors de la banque B la somme de 2^n francs, où n est le nombre total de lancers. Quelle mise doit disposer A avant le premier jet pour que la partie soit équitable ? »

L'espérance mathématique de gain de A est infinie, ce qui est un paradoxe, car aucun homme raisonnable ne misera une partie importante de sa fortune pour participer à ce jeu.

Ce problème fut inventé en 1713 par Nicolas Bernoulli. La première tentative de résolution est due à Cramer [*6*]. La première publication émana cependant de Daniel Bernoulli, cousin du précédent. Son mémoire [*1*] parut en 1738 dans les commentaires de l'académie de Saint-Pétersbourg. Le jeu est resté célèbre sous le nom de « Paradoxe de Saint-Pétersbourg », appellation due semble-t-il à d'Alembert [*8*].

Par la suite de trés nombreux auteurs se sont attaqués à ce problème et ont présenté plusieurs méthodes de résolution, qui peuvent être classées en plusieurs catégories.

1) Les explications réalistes ([*4*, *5*, *13*], entre autres), qui réduisent le paradoxe par l'impossibilité pratique de jouer dans les conditions de l'énoncé : la banque ne dispose que d'une fortune limitée, on ne peut jouer qu'un temps fini, par exemple.

2) L'introduction d'une fonction d'utilité concave ([*1*, *2*, *6*, *15*], etc.) permettant d'attribuer au jeu une espérance subjective de gain finie.

3) L'emploi de probabilités subjectives [*5*, *12*] tendant à diminuer, voire à annuler la probabilité d'événements rares.

4) Certains auteurs [*3*] vont même jusqu'à accepter la solution mathématique ou à échafauder les théories les plus fantaisistes en ce qui concerne le calcul des probabilités [*7*, *8*, *9*].

5) Les théories modernes se basent sur les processus stochastiques et en particulier les processus de renouvellement discrets [*10*, *14*].

Un exposé critique de ces méthodes peut être trouvé dans [*12*] et [*16*]. La plupart de celles-ci ne sont pas satisfaisantes et ne peuvent convenir (ou en tous cas suffire) pour expliquer le paradoxe. Les explications réalistes, bien que parfaitement justifiées, sont complètement étrangères au jeu et ne constituent pas une analyse de celui-ci. L'introduction d'une fonction d'utilité n'est qu'un leurre : à toute fonction d'utilité on peut associer un jeu, apparenté au Paradoxe de Saint-Pétersbourg, dont l'espérance mathématique *et* l'espérance subjective de gain sont infinies, ce qui est un nouveau paradoxe. Les probabilités subjectives ne vérifient pas certaines propriétés élémentaires du calcul des probabilités et éliminent complètement certains événements rares, qui peuvent quand même apparaître et dont il faudrait tenir compte. Enfin, les théories basées sur les processus de renouvellement discrets, notamment celle de Robbins, introduisent des hypothèses inacceptables en pratique, la mise étant variable et dépendant des résultats précédents.

Nous allons résoudre le Paradoxe en appliquant le théorème 1 de la première partie. Choisissons d'abord $A = \frac{1}{4}$. Dans ce cas, la mise équitable vaut

$$f(n) = \sum_{\frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{4n}} 2^{-i}2^i = \sum_{\mathrm{Log}_2 4n \geq i} 1\,;$$

$$\boxed{m(n) = \mathrm{Log}_2\, 4n.}$$

On constate que la mise augmente de 1 franc chaque fois que le nombre de parties n double.

Il est intéressant de comparer ce résultat avec ceux obtenus par Lévy [*11*] et Feller [*10*], en partant de considérations différentes.

Désignons par $\sigma^2(n)$ la variance des gains après la troncature par $P_0(n)$. Il est facile de voir que $\sigma^2(n)$ doit vérifier l'équation aux différences

$$x_k = 2x_{k-1} + k^2 + 2^k$$

avec la condition initiale

$$x_0 = 0$$

en tous les k entiers tels que $2^k = n$.

La solution de cette équation est

$$\boxed{\sigma^2(n) = 8n - 2 - (\mathrm{Log}_2\, 4n)^2 = 8n - 2 - m(n)^2.}$$

L'effet d'autres troncatures est de déplacer la courbe des gains parallèlement à elle-même. Pour a quelconque, la mise équitable vaut

$$\boxed{m(n) = \mathrm{Log}_2\, \frac{n}{A}.}$$

Dans le cas particulier du jeu de Saint-Pétersbourg, le théorème 1 ne fournit qu'une condition suffisante. En effet, pour $P_0(n) = \frac{1}{n^2}$, nous avons $m(n) = 2\,\mathrm{Log}_2\, n$ et pour $P_0(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $m(n) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}_2\, n$. Ces deux mises sont équitables.

Les courbes de gain correspondant aux différentes valeurs de A sont parallèles. Le problème de décision est donc ramené au choix de l'origine de la courbe. Si le banquier fixe à l'avance le nombre de parties qu'il autorisera et s'il choisit une constante A, il peut déterminer une mise équitable.

En général cette mise n'est pas acceptable pour le joueur, étant donné que sa fortune ne lui permet de jouer qu'un nombre $m < n$ de parties. Cependant, il est possible qu'il accepte les conditions du jeu. En effet, la définition de l'équitabilité n'est qu'asymptotique et de nombreux effets secondaires peuvent intervenir (plaisir du jeu, goût du risque, distribution des gains très étalée, chance de gagner une grosse somme moyennant une mise assez faible, fonction d'utilité convexe. ...).

2. SIMULATION

Pour tester les prévisions théoriques du paragraphe précédent, nous avons simulé le jeu 4.194.304 ($= 2^{22}$) fois sur ordinateur IBM 7040. Les nombres pseudo-aléatoires ont été engendrés par la congruence

$$X_{i+1} = AX_i \text{ Mod } (2^{35} - 31),$$

où

$$A = 5^5 ;$$

$2^{35} - 31$ est le nombre premier le plus grand inférieur à 2^{35} (35 étant la capacité d'un mot de l'ordinateur).

En plus des tests habituels, la suite de nombres a passé de manière satisfaisante un test relatif aux suites de nombres inférieurs à 0,5, utilisés comme « face » dans le programme.

Les résultats de cette simulation sont résumés dans les graphiques et tableaux suivants.

Les résultats de la simulation confirment les prévisions théoriques : à l'exception des petites valeurs de n (inférieures à 60), la courbe de gain moyen ne s'écarte guère plus de un écart-type de la valeur théorique (calculée pour une valeur de $A = 1/4$).

3. INTRODUCTION DE CERTAINS EFFETS SECONDAIRES

Nous avons jusqu'à présent négligé certains effets secondaires comme la psychologie des joueurs en face du risque, la finitude de la fortune du banquier, l'utilité du joueur. Ces facteurs peuvent être introduits sans peine dans notre analyse. A titre exemplatif, nous mentionnons les résultats obtenus lorsque l'on tient compte du fait que le banquier ne dispose que d'une somme finie T_0.

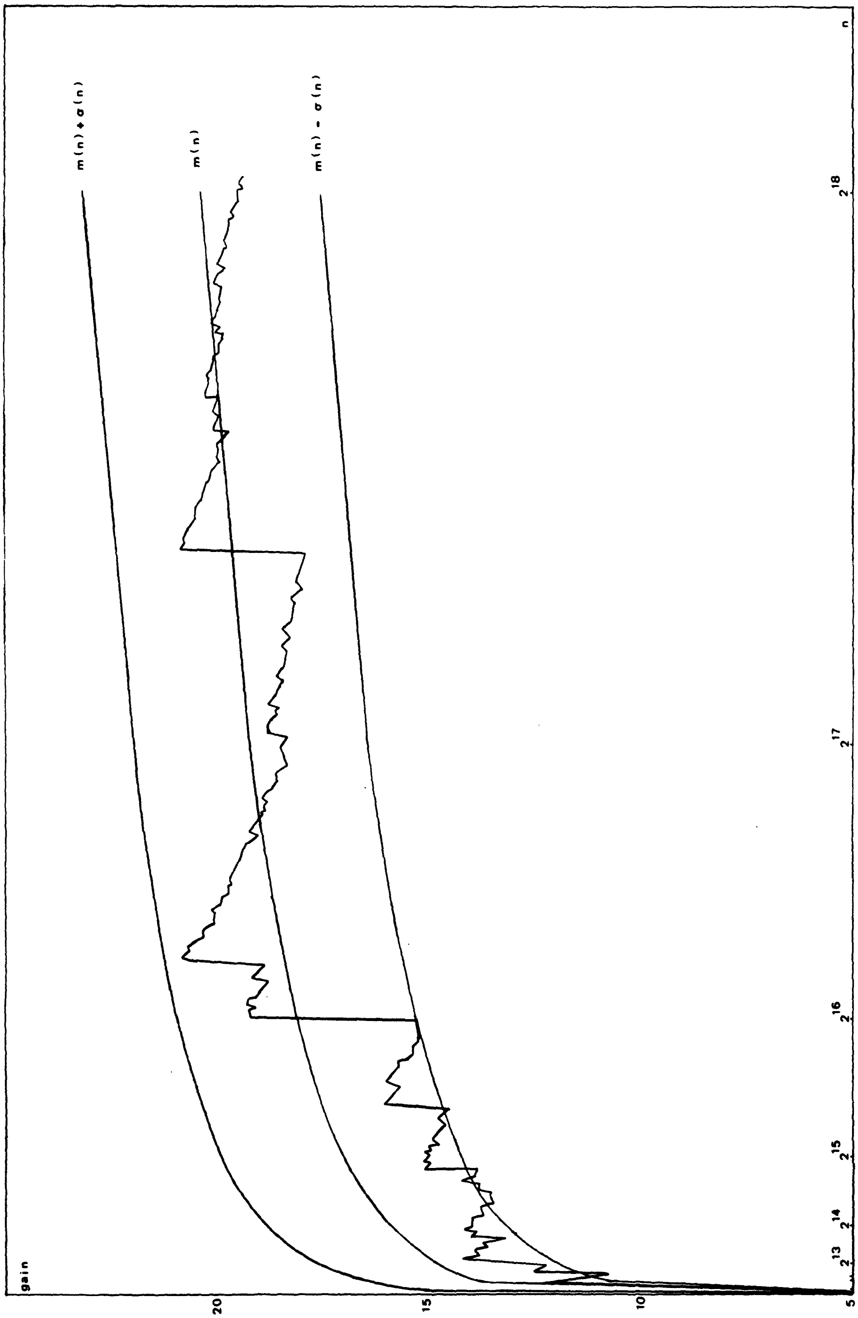
Premier cas : tous les gains supérieurs à T_0 *sont annulés.*

Considérons toujours $A = 1/4$. Le théorème suivant se déduit immédiatement de l'application du théorème 1.

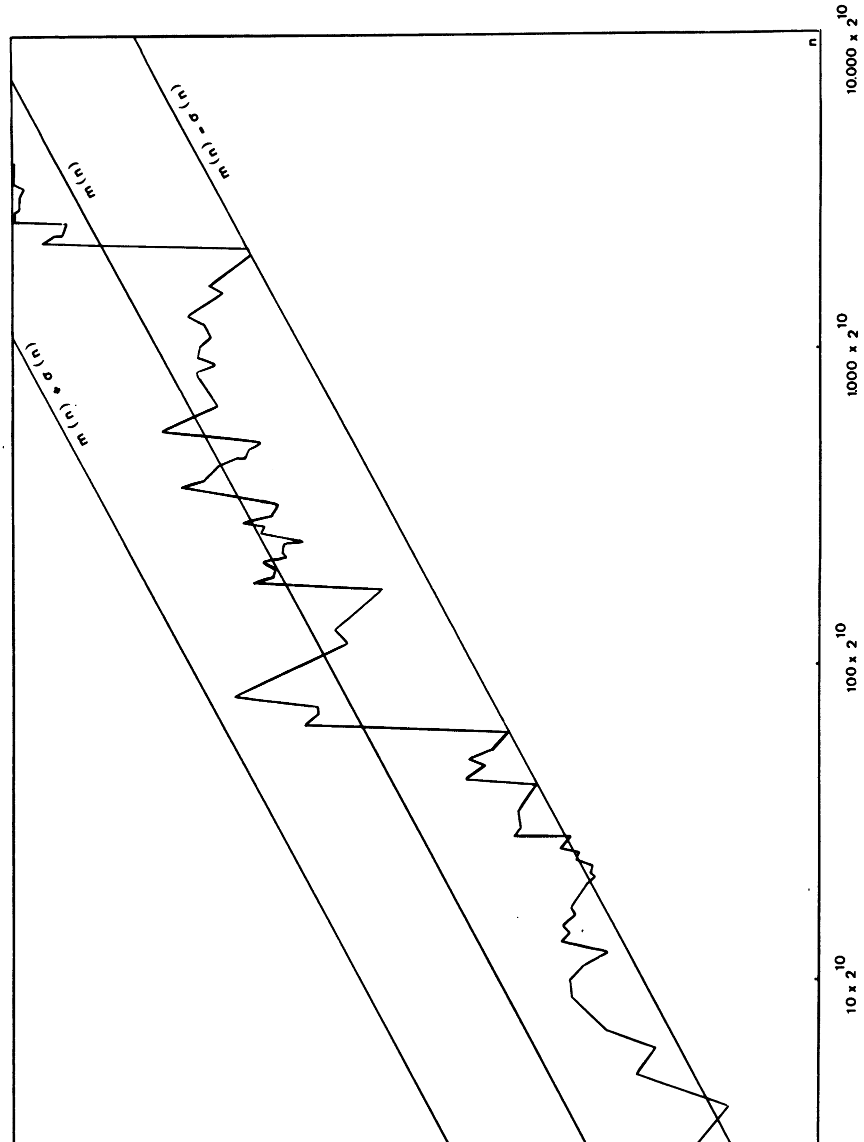
Résultats observés ($n = 2^K$ *où* K = 10, 11, ..., 22).

K	MT	MO	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
10	12	9,72	487	268	121	80	39	17	8	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	13	12,33	1 009	512	265	136	68	34	12	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	14	10,80	2 064	999	522	263	134	68	25	10	6	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	15	14,28	4 100	2 059	1 012	508	258	139	57	26	16	6	7	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	16	13,90	8 237	4 063	2 021	1 024	519	271	124	62	33	14	8	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	17	14,95	16 549	8 098	4 042	2 000	1 034	527	261	119	70	37	14	9	7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
16	18	15,20	32 852	16 408	8 149	3 998	2 058	1 052	510	241	127	79	31	19	9	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
17	19	18,18	65 543	32 816	16 299	8 154	4 100	2 113	1 001	494	272	155	66	29	20	4	3	1	1	1	0	0	0	0	0
18	20	20,11	131 209	65 404	32 732	16 399	8 147	4 130	2 056	992	537	283	137	64	31	7	8	4	1	2	1	0	0	0	0
19	21	22,45	262 184	131 008	65 680	32 648	16 371	8 099	4 060	2 081	1 090	541	281	123	58	24	18	12	4	4	1	1	0	0	0
20	22	21,15	524 175	261 891	131 423	65 491	32 825	16 327	8 111	4 080	2 112	1 076	549	252	139	52	34	19	9	9	1	1	0	0	0
21	23	20,37	1 048 135	524 719	262 568	130 949	65 304	32 527	16 268	8 278	4 178	2 124	1 064	519	262	123	70	30	16	12	5	1	0	0	0
22	24	24,92	2 096 784	1 048 960	525 166	261 666	130 731	65 049	32 621	16 740	8 232	4 176	2 131	1 044	473	241	151	56	43	23	11	3	2	0	1

MT = moyenne théorique
MO = moyenne observée
Colonnes suivantes : nombres de résultats 2, 4, 8, 16,...



Graphique n° 1 : évolution du gain moyen au cours des 2^{18} premières répétitions du jeu.



Graphique n° 2 : évolution du gain moyen. Échelle semi-logarithmique.

THÉORÈME 3 :

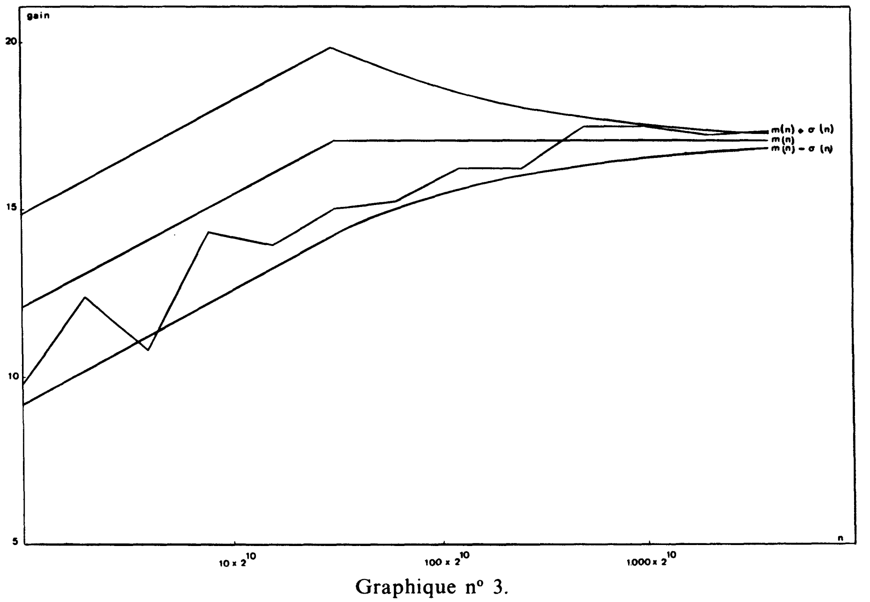
$$m(n) = \begin{cases} \mathrm{Log}_2\, 4n & n < T_0^*/4 \\ \mathrm{Log}_2\, T_0^* & n \geq T_0^*/4\,; \end{cases}$$

$$\sigma^2(n) = \begin{cases} 8n - 2 - (\mathrm{Log}_2\, 4n)^2 & n < T_0^*/4 \\ 2T_0^* - 2 - (\mathrm{Log}_2\, T_0^*)^2 & n \geq T_0^*/4, \end{cases}$$

où T_0^* est la plus grande puissance de 2 inférieure à T_0.

En d'autres termes, nous pouvons supposer sans restriction que T_0 est une puissance de 2. Pour n inférieur à la valeur critique $n_0 = T_0^*/4$, le joueur considère que la banque n'annule aucun paiement. Au-delà de ce point, il adopte toujours la même mise, qui n'est rien d'autre que la mise classique.

Le graphique n° 3 compare les valeurs théoriques aux résultats de la simulation, pour $T_0 = 2^{17}$.



Graphique n° 3.

Deuxième cas : les gains supérieurs à T_0 *sont ramenés à la valeur* T_0.

Dans ce cas (plus réaliste), l'application du théorème principal conduit à des équations aux différences plus compliquées. On démontre le

THÉORÈME 4

$$m(n) = \begin{cases} \mathrm{Log}_2\, 4n & n < T_0^*/4 \\ \mathrm{Log}_2\, T_0 + \dfrac{T_0}{T_0^*}\left(1 - \dfrac{T_0^*}{4n}\right) & n \geq T_0^*/4. \end{cases}$$

Pour $n \to \infty$, la moyenne tend vers $m(\infty) = \mathrm{Log}_2\, 2\mathrm{T}_0$.

$$\sigma^2(n) = \begin{cases} 8n - 2 - (\mathrm{Log}_2\, 4n)^2 & n < \mathrm{T}_0^*/4 \\ 2\mathrm{T}_0 - 1 - (\mathrm{Log}_2\, 2\mathrm{T}_0)^2 - \left(\dfrac{\mathrm{T}_0}{4n} - 1\right)^2 & \\ \qquad + \dfrac{\mathrm{T}_0}{2n}\,\mathrm{Log}_2\, \mathrm{T}_0 + \dfrac{\mathrm{T}_0^2}{\mathrm{T}_0^*}\left(1 - \dfrac{\mathrm{T}_0}{4n}\right) & n \geq \mathrm{T}_0^*/4. \end{cases}$$

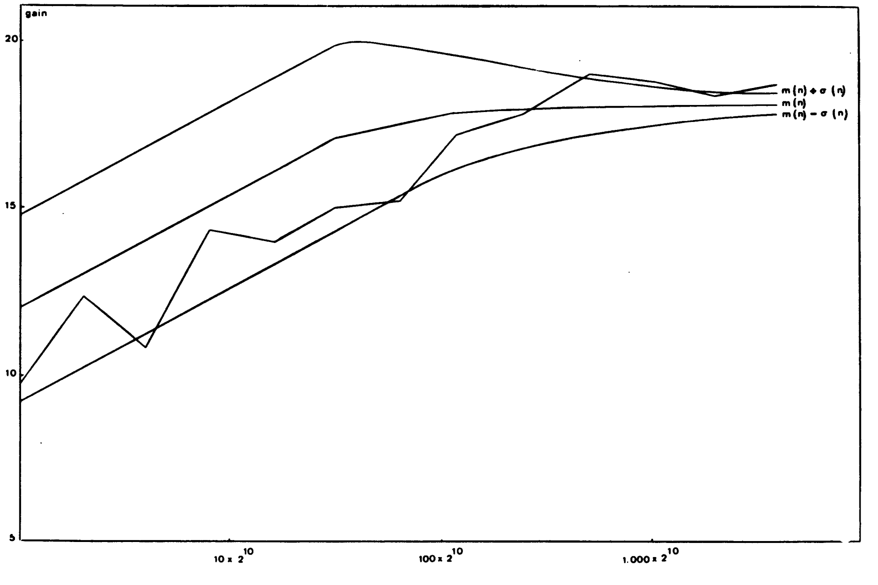
Pour $n \to \infty$, la variance tend vers $\sigma^2(\infty) = 3\mathrm{T}_0 - 2 - (\mathrm{Log}_2\, 2\mathrm{T}_0)^2$.

COROLLAIRE. — Si T_0 est une puissance de 2, nous avons

$$m(n) = \begin{cases} \mathrm{Log}_2\, 4n & n < \mathrm{T}_0/4 \\ \mathrm{Log}_2\, 2\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_0/4n & n \geq \mathrm{T}_0/4 \end{cases}$$

$$\sigma^2(n) = \begin{cases} 8n - 2 - (\mathrm{Log}_2\, 4n)^2 & n < \mathrm{T}_0/4 \\ 3\mathrm{T}_0 - 1 - (\mathrm{Log}_2\, 2\mathrm{T}_0)^2 - \left(\dfrac{\mathrm{T}_0}{4n} - 1\right)^2 & \\ \qquad + \dfrac{\mathrm{T}_0}{2n}\left(\mathrm{Log}_2\, \mathrm{T}_0 - \dfrac{\mathrm{T}_0}{2}\right) & n \geq \mathrm{T}_0/4. \end{cases}$$

Le joueur ne tient pas compte de la réduction de certains paiements jusqu'à la valeur critique $n_0 = \mathrm{T}_0^*/4$. Pour $n > n_0$, la moyenne progresse



Graphique n° 4.

de plus en plus lentement pour atteindre asymptotiquement la valeur imposée par la théorie classique.

Le graphique n° 4 compare les valeurs théoriques aux résultats expérimentaux, pour $T_0 = 2^{17}$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] D. BERNOULLI, Specimen Theoriæ novæ de mensura sortis. *Commentarii academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ*, vol. **5**, 1738, p. 175-193. Traduction par L. SOMMER, *Econometrica*, vol. **22**, 1954, p. 23-35.

[*2*] G. BERNARD, Réduction du paradoxe de Saint-Pétersbourg par la théorie de l'utilité. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), vol. **259**, 1964, p. 3168-3170.

[*3*] J. BERTRAND, *Calcul des probabilités*. Paris, 1889, p. IX-XII et 62-67.

[*4*] E. BOREL, Le paradoxe de Saint-Pétersbourg. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), vol. **229**, 1949, p. 406-407.

[*5*] G. BUFFON, Essai d'arithmétique morale, 1777, dans les *Œuvres Complètes* (Paris), t. IV, 1836, p. 269-274.

[*6*] G. CRAMER, Lettre à N. BERNOULLI, 1728. *Econometrica*, vol. **22**, 1954, p. 33-35.

[*7*] J. D'ALEMBERT, Croix ou pile. Encyclopédie du dictionnaire raisonné. Paris, 1754.

[*8*] J. D'ALEMBERT, *Opuscules*, vol. **1**, p. 1-25 ; vol. **4**, p. 73-105 et 283-341 ; vol. **7**, p. 39-60.

[*9*] J. D'ALEMBERT, Doutes et questions sur le calcul des probabilités mélangés de littérature, d'histoire et de philosophie, vol. V, Paris, 1773.

[*10*] W. FELLER, Note on the theory of large numbers and fair games. *Ann. of Math. Statistics*, vol. **16**, 1945, p. 301-304.

[*11*] P. LEVY, *Calcul des probabilités*. Paris, 1925, p. 113-133.

[*12*] K. MENGER, Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre. Betrachtungen im Anschluss an das sogenannte Petersburger Spiel. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, vol. **5**, 1934, p. 459-485.

[*13*] D. POISSON, *Recherche sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, Paris, 1837, p. 73.

[*14*] H. ROBBINS, Recurrent games and Petersburg Paradox. *Ann. of Math. Statistics*, vol. **32**, 1961, p. 187-194.

[*15*] F. TIMERDING, Aufsatz über die Bernoullische Wertlehre. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, vol. **47**, 1902, p. 337.

[*16*] I. TODHUNTER, *A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace*, Cambridge, 1865, 2nd ed. New York, 1949, p. 134, 220-222, 259-262, 275, 280-281, 286-289, 332, 345-346, 393, 470-471.

(Manuscrit reçu le 30 janvier 1973).

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPOT LÉGAL ÉD. N° 1947*b*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 6572. 6-1973.