ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

GÖRAN HÖGNÄS

Remarques sur les marches aléatoires dans un demi-groupe avec un idéal compact ayant une probabilité positive

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, n° 3 (1974), p. 345-354

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_3_345_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. X, n° 3, 1974, p. 345-354. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Remarques sur les marches aléatoires dans un demi-groupe avec un idéal compact ayant une probabilité positive

par

Göran HÖGNÄS
Département de Mathématiques,
Åbo Akademi, Åbo, Finlande.

RÉSUMÉ. — Nous démontrons que les principaux résultats sur les marches aléatoires dans un demi-groupe compact [*4*], sont encore valables pour un demi-groupe complètement régulier, engendré par une probabilité régulière ν et satisfaisant à l'hypothèse supplémentaire suivante : il existe un idéal compact I tel que $\nu \mathrm{I} > 0$.

Nous nous proposons aussi, à la fin de la note, de déterminer les probabilités initiales possibles pour les marches stationnaires différentes.

SUMMARY. — We show that the principal results on the random walks in a compact semigroup [*4*], are valid for a completely regular semigroup generated by the regular probability measure ν and satisfying the following additional condition: There is a compact ideal I with $\nu \mathrm{I} > 0$.

In the final section we also determine the possible initial probabilities for the different stationary random walks.

0. INTRODUCTION

M. A. Tortrat a bien voulu nous indiquer, dans une lettre à propos du travail [*4*], que l'essentiel des résultats de ce travail serait valable pour un demi-groupe complètement régulier quelconque (engendré par la probabilité régulière ν) satisfaisant à l'hypothèse suivante

(KI) Il existe un idéal compact I avec $\nu I > 0$.

Cette hypothèse entraîne l'existence du noyau compact K.

Ici nous démontrerons la proposition de M. Tortrat, c'est-à-dire que les marches aléatoires se comportent comme dans le cas compact. A la fin, nous ajouterons quelques remarques concernant les marches stationnaires.

L'auteur tient à remercier MM. les Professeurs Albert Tortrat de sa proposition inspiratrice et Bertil Qvist de son aide et encouragement constant. Nous sommes obligés à M. Hans Lindbäck qui a bien voulu revoir le manuscrit français.

1. PRÉLIMINAIRES

Soit S un demi-groupe complètement régulier (C. R.) et $\mathscr{C}_b(S)$ les fonctions continues bornées sur S. Toute fonctionnelle linéaire continue positive L sur $\mathscr{C}_b(S)$ tendue suivant des compacts et telle que $L1_S = 1$ (1_A désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A) définit une probabilité régulière ν sur la tribu borélienne $\mathscr{B}(S)$ de S et réciproquement. La correspondance entre L et ν est donnée par

$$\nu F = \inf_{\substack{f \geqq 1_F \\ f \in \mathscr{C}_b(S)}} Lf, \qquad F \text{ fermé}$$

$$Lf = \int_S f\,d\nu, \qquad f \in \mathscr{C}_b(S),$$

voir [6] [7]. Nous écrirons parfois νf pour $\int_S f\,d\nu$.

La convolution $\mu * \nu$ de deux mesures régulières μ et ν sur S est définie à partir de cette correspondance entre mesure et fonctionnelle. En effet, on désigne $\mu * \nu$ l'unique probabilité régulière η avec

$$\int f\,d\eta = Lf$$

où L est la fonctionnelle

$$Lf = \int_S \left[\int_S f(uv)\mu(du) \right] \nu(dv), \qquad f \in \mathscr{C}_b(S).$$

La convolution satisfait aux propriétés importantes suivantes :

$$(\mu * \nu)B = \int \nu(x^{-1}B)\mu(dx) = \int \mu(By^{-1})\nu(dy), \qquad B \in \mathscr{B}(S)$$

$$(\mu * \nu)f = \int\left[\int f(uv)\mu(du)\right]\nu(dv) = \int\left[\int f(uv)\nu(dv)\right]\mu(du), \qquad f \in \mathscr{C}_b(S).$$

Si la topologie de S est à base dénombrable on a la propriété « plus intuitive » suivante :

$$(\mu * \nu)B = \int\int 1_B(uv)\mu(du)\nu(dv), \qquad B \in \mathscr{C}(S),$$

cf [*1*] [*5*] [*7*] [*8*].

Dorénavant nous supposerons S engendré par la probabilité régulière ν, c'est-à-dire que

$$S = \overline{\bigcup_{n \geq 1} C(\nu)^n}$$

où $C(\nu)$ est le support de ν.

Introduisons maintenant notre hypothèse

(KI) Il existe un idéal compact I tel que $\nu I > 0$.

Notre intention est de démontrer que (KI) entraîne que S sera « presque » compact dans le sens que les convoluées $\nu^{(n)}$ et les marches aléatoires sur S se comportent comme dans le cas compact. — Il est facile à voir que l'hypothèse apparemment plus faible que (KI) : il existe un idéal compact I et un entier N avec $\nu^{(N)}I > 0$ aurait les mêmes conséquences que (KI).

L'idéal minimal compact K du demi-groupe compact I est également l'idéal minimal (le noyau) de S.

Si $\nu I = a > 0$ alors $\nu^{(n)} \complement I \leqq (1 - a)^n \to 0$.

Soient $\varepsilon > 0$ et O un ouvert contenant K. On montre exactement comme dans le cas compact qu'il existe un N à partir duquel $\nu^{(n)}O > 1 - \varepsilon$, [5, p. 141], [9].

2. EXISTENCE DE LA PROBABILITÉ INVARIANTE

Avant d'aborder les théorèmes nous avons besoin de quelques définitions et rappels.

DÉFINITION 1. — Une famille $\{f_i\}_{i \in J}$ de fonctions continues bornées sur un espace topologique X (S ou I ici) est dite *équicontinue* si, quels que soient $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe un voisinage $V(x)$ de x tel que

$$y \in V(x) \Rightarrow |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon \qquad \text{pour tout } i \in J.$$

DÉFINITION 2 [4]. — L'opérateur de transition de la marche à droite, bilatère et mixte est défini, respectivement, par

$$\mathrm{P}_d f(x) = \int f(xt)\nu(dt)$$

$$\mathrm{P}_b f(x) = \int\int f(sxt)\nu(ds)\nu(dt)$$

$$\mathrm{P}_m f(x) = \int \{ af(tx) + (1-a)f(xt) \} \nu(dt), \qquad f \in \mathscr{C}_b(\mathrm{S}),\ 0 < a < 1 .$$

Il s'ensuit immédiatement *que*

$$\mathrm{P}_d^n f(x) = \int f(xt)\nu^{(n)}(dt)$$

$$\mathrm{P}_b^n f(x) = \int\int f(sxt)\nu^{(n)}(ds)\nu^{(n)}(dt)$$

$$\mathrm{P}_m^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} \int\int f(sxt)\nu^{(k)}(ds)\nu^{(n-k)}(dt).$$

LEMME 1. — Sous l'hypothèse (KI)

a) les $\nu^{(n)}$ sont uniformément tendues (U. T., cf. [6]),

b) $\{ \mathrm{P}_i^n f \}_{n=1}^{\infty}$ est équicontinue pour $f \in \mathscr{C}_b(\mathrm{S})$. En particulier, $\mathrm{P}_i f \in \mathscr{C}_b(\mathrm{S})$, $(i = d, b, m)$.

Démonstration :

a) $\nu^{(\mathrm{N})}\mathrm{I} > 1 - \varepsilon'$ dès que N est assez grand. Les probabilités $\nu^{(n)}$ étant régulières, donc tendues, il existe un compact $\mathrm{C}_{\varepsilon'}$ tel que $\nu^{(n)}\mathrm{C}_{\varepsilon'} > 1 - \varepsilon'$ pour $n = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}$. $\mathrm{K}_{\varepsilon'} = \mathrm{C}_{\varepsilon'} \cup \mathrm{I}$ est un compact avec $\nu^{(n)}\mathrm{K}_{\varepsilon'} > 1 - \varepsilon'$ pour tout entier positif n.

Les $\nu^{(n)}$ sont donc U. T.

b) Soit $f \in \mathscr{C}_b(\mathrm{S})$; $f \geqq 0$ pour simplicité, le cas général étant tout à fait analogue.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_d^n f(x) &= \int_{\mathrm{S}} f(xt)\nu^{(n)}(dt) \\
&= \int_{\mathrm{K}_{\varepsilon'}} f(xt)\nu^{(n)}(dt) + \int_{\complement \mathrm{K}_{\varepsilon'}} f(xt)\nu^{(n)}(dt) \\
&\leqq \int_{\mathrm{K}_{\varepsilon'}} f(xt)\nu^{(n)}(dt) + \varepsilon' \,\| f \| ,
\end{aligned}$$

où $\| f \| = \sup_{t \in \mathrm{S}} | f(t) |$.

Également,

$$\begin{aligned} P_b^n f(x) &= \iint_{S\times S} f(sxt)\nu^{(n)}(ds)\nu^{(n)}(dt) \\ &\leqq \iint_{K_{\varepsilon'}\times K_{\varepsilon'}} f(sxt)\nu^{(n)}(ds)\nu^{(n)}(dt) + 2\varepsilon' \,||f|| \end{aligned}$$

et

$$P_m^n f(x) \leqq \iint_{K_{\varepsilon'}\times K_{\varepsilon'}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k(1-a)^{n-k} f(sxt)\nu^{(k)}(ds)\nu^{(n-k)}(dt) + 2\varepsilon' \,||f||.$$

Quels que soient $\varepsilon > 0$ et $x \in X$ il existe un voisinage $V(x)$ de x tel que

$$y \in V(x) \Rightarrow \sup_{t\in K_{\varepsilon'}} |f(xt) - f(yt)| < \varepsilon$$

et

$$\sup_{s,\,t\in K_{\varepsilon'}} |f(sxt) - f(syt)| < \varepsilon .$$

Pour démontrer cela on fait appel à la compacité de $K_{\varepsilon'}$ (et celle de $K_{\varepsilon'} \times K_{\varepsilon'}$), cf. [3] [4]. Choisir maintenant $\varepsilon' < \varepsilon/2\,||f||$. Alors on aura

$$|P_i^n f(x) - P_i^n f(y)| < 2\varepsilon \qquad \text{dès que } y \in V(x) \quad (i = d, b, m),$$

c'est-à-dire la famille $\{ P_i^n \}_{n=1}^{\infty}$ est équicontinue.

Les fonctionnelles linéaires continues L' sur $\mathscr{C}(I)$, l'espace des fonctions continues (donc bornées) sur le compact I, peuvent s'identifier aux fonctionnelles linéaires continues L sur $\mathscr{C}_b(S)$ avec leur support dans I ($Lf = 0$ dès que $f \leqq 1_{\complement I}$). Donné L sur $\mathscr{C}_b(S)$ on définit L' sur $\mathscr{C}(I)$ par $L'f = Lg$ où g est une extension de f, une telle extension existe quand S est C. R. (théorème d'extension de Tietze). Réciproquement L' définit une L à support dans I par $Lg = L'g'$ où g' est la restriction de g à I. Ainsi nous avons le droit de confondre, et nous le ferons souvent, les fonctionnelles L' et L ainsi que les probabilités régulières correspondantes.

DÉFINITION 3.

$$Tf(x) = \int_S f(xs)\nu(ds), \; f \in \mathscr{C}(I).$$

T est un opérateur positif équicontinu, voir [5], qui applique $\mathscr{C}(I)$ dans $\mathscr{C}(I)$. Poser

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^k .$$

On a alors, cf. [5], p. 134, que $T_n \to \bar{T}$ où $\bar{T}$ applique $\mathscr{C}(I)$ dans $\mathscr{C}(I)$ et satisfait aux formules

$$\bar{T}T = T\bar{T} = \bar{T}^2 = \bar{T}.$$

(La convergence qui nous intéresse ici est la convergence faible :

$$\| \mathrm{T}_n f - \mathrm{T} f \| \to 0 \qquad \text{toute } f \in \mathscr{C}(\mathrm{I}).$$

Par analogie, une suite de probabilités régulières sur l'espace topologique C. R. X. $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ est dite convergente vers la probabilité régulière ν si

$$\int_{\mathrm{X}} f(x)\nu_n(dx) \to \int_{\mathrm{X}} f(x)\bar{\nu}(dx) \qquad \text{quelle que soit } f \in \mathscr{C}_b(\mathrm{X}).)$$

THÉORÈME 1.

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \nu^{(k)} \to \mu$$

où μ est une probabilité régulière sur le noyau K avec

$$\mu * \nu = \nu * \mu = \mu^{(2)} = \mu .$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathscr{C}_b(\mathrm{S})$ et f' sa restriction à I. f' appartient donc à $\mathscr{C}(\mathrm{I})$. On peut alors définir

$$\mathrm{L}f = \limsup_{\mathrm{N} \to \infty} \int_{\mathrm{I}} \bar{\mathrm{T}} f'(x) \nu^{(\mathrm{N})}(dx)$$

où $\bar{\mathrm{T}}$ est la limite de T_n :

$$\bar{\mathrm{T}} f'(x) = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathrm{S}} f'(xs)\nu_n(ds) .$$

(Bien noter que toutes les expressions sont majorées en valeur absolue par $\| f \|$).

D'après ce qui précède $\nu^{(\mathrm{N})} \complement \mathrm{I} < \varepsilon$ dès que N est assez grand. Alors

$$\int_{\mathrm{I}} \bar{\mathrm{T}} f'(x)\nu^{(\mathrm{N})}(dx) = \int_{\mathrm{I}} \lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathrm{S}} f(xs)\nu^{(k)}(ds)\nu^{(\mathrm{N})}(dx)$$

égale, à $\varepsilon \| f \|$ près,

$$\limsup_{n} (\liminf_{n}) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathrm{S}} \int_{\mathrm{S}} f(xs)\nu^{(k)}(ds)\nu^{(\mathrm{N})}(dx)$$

$$= \limsup_{n} (\liminf_{n}) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathrm{S}} f(s)\nu^{(k+\mathrm{N})}(ds) ,$$

d'où l'on déduit l'existence de

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int f(s)\nu^{(k)}(ds)$$

et que cette limite égale Lf.

L est une fonctionnelle continue positive sur $\mathscr{C}_b(S)$. Elle est tendue car $Lf = 1$ si $1 \geqq f \geqq 1_I$ et $L1 = 1$. Il existe donc une probabilité régulière η avec

$$Lf = \int f(s)\eta(ds)$$

d'où

$$\nu_n \to \eta .$$

Les suites $(\nu^{(n)})$ et (ν_n) étant U. T. (lemme 1) on obtient facilement par continuité, cf. ([*6*], p. 224),

$$\nu * \eta = \eta * \nu = \eta * \eta = \eta .$$

η est une probabilité régulière idempotente sur le compact I. Elle est donc une probabilité idempotente sur le noyau K, [*5*]. Nous la désignerons désormais μ.

3. LE DEMI-GROUPE $\Sigma(\nu)$

Dans [*5*] Rosenblatt emploie les propriétés du demi-groupe

$$\Sigma(\nu) = \overline{\{ \nu^{(n)} \mid n = 1, 2, \ldots \}}$$

pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite $(\nu^{(n)})$ converge ([*5*], p. 151-153). Le théorème 2 ci-dessous montrera que la théorie de [*5*] sera valable aussi sous l'hypothèse (KI).

LEMME 2. — Tout sous-ensemble infini de $\{ \nu^{(n)} \}$ a un point d'accumulation.

Démonstration. — Considérer tout d'abord l'ensemble $\{ \eta^n \}$ de probabilités régulières sur I définies par

$$\eta^n = \frac{1}{\nu^{(n)}I} \nu^{(n)} |_I \qquad \text{(la restriction de } \nu^{(n)} \text{ à I divisée par } \nu^{(n)}I)$$

ou

$$\eta^n f' = \frac{1}{\nu^{(n)}I} \int_I f d\nu^{(n)}.$$

L'ensemble de probabilités régulières sur le compact I est compact. Tout sous-ensemble infini $\{ \eta^{n'} \}$ de $\{ \eta^n \}$ a donc un point d'accumulation η'. Étant donné que $\nu^{(n)}I > 1 - \varepsilon$ dès que n est assez grand il est clair que η' en même temps est un point d'accumulation de l'ensemble $\{ \nu^{(n')} \}$ correspondant à $\{ \eta^{n'} \}$.

THÉORÈME 2. — $\Sigma(\nu)$ est un demi-groupe compact.

Démonstration. — La convolution étant continue il ne nous reste que la vérification de la compacité de $\Sigma(\nu)$.

Soit R l'ensemble de points d'accumulation de $\{ \nu^{(n)} \}$. R est un ensemble fermé de probabilités régulières sur I, cf. la démonstration du lemme 2 ci-dessus. R est donc compact, étant un sous-ensemble fermé d'un compact.

Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement de $\Sigma(\nu)$. Il existe un sous-recouvrement fini $\mathscr{U}^i$ de $\mathscr{U}$ recouvrant R. Mais alors il reste au dehors de la réunion des ensembles de $\mathscr{U}^i$ au plus un nombre fini d'éléments $\nu^{(n)}$ (lemme 2). Tout $\Sigma(\nu)$ peut donc être recouvert par un sous-recouvrement fini de $\mathscr{U}$, ce qui veut dire que $\Sigma(\nu)$ est compact.

4. LES MARCHES ALÉATOIRES SUR S

Il suit immédiatement des théorèmes 1 et 2 que toutes les propriétés de la marche à droite [*4*], chapitre 4, théorèmes 1-6, sont encore valables.

Pour la marche bilatère le cas est essentiellement pareil. Il faut cependant procéder moins directement.

Tout d'abord, nous corrigeons une erreur dans [*4*], p. 117 et 140. Il faut définir la fonction de transition P_b à partir de l'opérateur de transition correspondant

$$P_b(x, A) = \inf_{\substack{f \geq 1_A \\ f \in \mathscr{C}_b(S)}} P_b f(x), \quad A \text{ fermé}$$

Dans ce cas-là $P_b(x, A)$ satisfait à

$$P_b(x, O) = \sup_{\substack{f = 0 \text{ sur } \complement O \\ f \in \mathscr{C}_b(S)}} P_b f(x), \quad O \text{ ouvert}$$

Aussi $P_b(x, A)$ est-elle une fonction borélienne en x et une probabilité régulière en A. La définition de [*4*]

$$P_b(x, A) = (\nu \times \nu) \{ (s, t) \mid sxt \in A \}$$

est équivalente à celle donnée ci-dessus sous certaines conditions sur la topologie, par exemple, s'il existe une base dénombrable, cf. [*8*].

La mesure μ_1 de [*4*], chapitre 5 existe sous l'hypothèse (KI), la démonstration de ce fait est analogue à celle du théorème 1. Pour démontrer les propriétés des mesures μ_x, $x \in I$, de [*4*] on raisonne de la même façon que dans le lemme 5.3 de [*4*]. Cela peut se faire grâce à la compacité de I et au fait que $\nu^{(n)} I \to 1$. De manière analogue on obtient tous les lemmes 5.4-5.7 de [*4*] et par conséquent tous les théorèmes de [*4*], chapitre 5.

En ce qui concerne la marche mixte il n'est pas difficile de constater, en employant les techniques décrites ci-dessus, que tous les résultats de de [*4*], chapitre 6 valent encore sous (KI).

5. LES MARCHES STATIONNAIRES

Nous terminerons par quelques remarques sur la condition de stationnarité. Dans [4], nous avons pris comme probabilité initiale la probabilité idempotente sur K, celle que nous avons désignée μ. Nous allons voir dans la suite qu'une définition moins restrictive ajouterait peu d'éléments nouveaux à l'étude, car la structure des probabilités initiales possibles ne diffère guère de celle de μ. Nous supposerons toujours (KI).

La marche aléatoire à opérateur de transition P et probabilité initiale η sera dite *stationnaire* si

$$\eta \mathrm{P} = \eta$$

c'est-à-dire

$$\int \eta(dt)\mathrm{P}f(t) = \int \eta(dt)f(t), \quad f \in \mathscr{C}_b(\mathrm{S}).$$

Pour la marche à droite cette condition de stationnarité s'écrit aussi

$$\eta * \nu = \eta$$

d'où l'on obtient immédiatement, par continuité,

$$\eta * \mu = \eta .$$

Le support de η étant un sous-ensemble du noyau K nous employons ce que nous savons de la structure de $\mathrm{K} = \mathrm{X} \times \mathrm{G} \times \mathrm{Y}$, et nous obtenons par la méthode de ([5], p. 145) que

$$\eta = \alpha' \times \chi \times \beta$$

où α' est une probabilité régulière sur un sous-ensemble de X et χ et β sont les G- et Y-composantes de $\mu = \alpha \times \chi \times \beta$.

Il n'est pas difficile de vérifier que la marche à droite stationnaire est ergodique, si et seulement si α' est concentrée à un point. Elle est mélangeante si et seulement si, en outre, $\nu^{(n)}$ converge.

Soit η la probabilité initiale de la marche bilatère stationnaire. De : $\eta\mathrm{P}^n = \eta$ pour tout n, on déduit que η est une probabilité sur K. Par conséquent nous pouvons restreindre P à $\mathscr{C}(\mathrm{I})$. Alors, [4], chapitre 5, $\eta\mathrm{P}^n = \eta \to \eta\bar{\mathrm{P}} = \eta$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \eta f = \int \eta(dt)\bar{\mathrm{P}}f(t) &= \int_{\mathrm{X}\times\mathrm{H}\times\mathrm{Y}} \eta(dt)\bar{\mathrm{P}}f(t) + \int_{\mathrm{X}\times g\mathrm{H}\times\mathrm{Y}} \eta(dt)\bar{\mathrm{P}}f(t) \\ &= \eta(\mathrm{X}\times\mathrm{H}\times\mathrm{Y})\mu_1 f + (1 - \eta(\mathrm{X}\times\mathrm{H}\times\mathrm{Y}))(\nu * \mu_1) f, \end{aligned}$$

d'où, avec $b = \eta(\mathrm{X}\times\mathrm{H}\times\mathrm{Y})$,

$$\begin{aligned} \eta &= \mu \text{ si } \mathrm{H} = \mathrm{G} \\ &= b\mu_1 + (1-b)(\nu * \mu_1) \text{ si } \mathrm{H} \neq \mathrm{G}. \end{aligned}$$

La marche bilatère est ergodique, si et seulement si

(A) $H = G$

ou (B) $b = 0$ ou 1

(La tribu des invariants est triviale dans le cas (A). Elle contient exactement K, $X \times H \times Y$, $X \times gH \times Y$, $\emptyset$ plus les ensembles de mesure nulle dans le cas (B).)

La marche bilatère est mélangeante si et seulement si, en outre,

(A) $\nu^{(n)}$ converge

(B) $\nu^{(2n)}$ converge.

Pour la marche mixte on obtient sans difficulté, vu $P_n \to \bar{P}$ si l'on restreint P à $\mathscr{C}(I)$, que

$$\eta \bar{P} = \eta$$

d'où, cf. [2] [4],

$$\eta = \mu .$$

Remarque. — Dans les trois cas, les mesures μ_x, $x \in I$, I compact, définies par

$$\mu_x f = \bar{P} f(x), \quad f \in \mathscr{C}(I) \qquad \text{(cf. [4])}$$

sont des probabilités stationnaires et satisfont donc aux résultats énoncés ci-dessus.

RÉFÉRENCES

[1] I. GLICKSBERG, Weak compactness and separate continuity, *Pacific J. Math.*, vol. **9**, 1961, p. 205-214.

[2] G. HÖGNÄS, An ergodic random walk on a compact semi-group. *Acta Acad. Aboensis*, Ser. B, vol. **33**, n° 9, 1973.

[3] G. HÖGNÄS, A note on random walks on a compact semi-group. *Acta Acad. Aboensis*, Ser. B, vol. **33**, n° 10, 1973.

[4] G. HÖGNÄS, Marches aléatoires sur un demi-groupe compact. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Sect. B, vol. **10**, 1974, p. 115-154.

[5] M. ROSENBLATT, *Markov Processes. Structure and Asymptotic Behavior*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1971.

[6] A. TORTRAT, Lois de probabilité sur un espace topologique complètement régulier et produits infinis à termes indépendants dans un groupe topologique. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Sect. B, vol. **1**, 1965, p. 217-237.

[7] A. TORTRAT, Lois tendues et convolutions dénombrables dans un groupe topologique X. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Sect. B, vol. **2**, 1966, p. 279-298.

[8] A. TORTRAT, Lois tendues μ sur un demi-groupe topologique complètement simple X. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **6**, 1966, p. 145-160.

[9] A. TORTRAT, Lois de probabilité dans les semi-groupes topologiques X complètement réguliers. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **261**, 1965, p. 3941-3944.

(Manuscrit reçu le 12 juin 1974)