ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. BECKER

Sur deux théorèmes fondamentaux du calcul des probabilités

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 4 (1974), p. 385-389
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_4_385_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. X, n° 4, 1974, p. 385-389.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Sur deux théorèmes fondamentaux du calcul des probabilités

par

R. BECKER
Université de Paris VI, Institut de Mathématiques,
9, Quai Saint-Bernard, tour 46, E. R. A. 294, couloir 46.0, 4e étage.
Paris V, France

SUMMARY. — The object of this paper is to give a simple proof of the theorem I.2 below and to interpret this result in the frame of lattice vectorial spaces.

I. — INTRODUCTION

L'objet de ce travail est de donner une preuve très simple du théorème I.2 ci-dessous et d'envisager quelques interprétations de ce théorème et du lemme de Borel-Cantelli dans le cadre des espaces vectoriels ordonnés (e. v. o.), réticulés (e. v. r.) et complètement réticulés (e. v. c. r.).

Certaines définitions et certains outils techniques utilisés sont analogues à ceux de [5]. Dans une certaine mesure, ce travail peut s'inscrire dans le cadre de [5] et être regardé comme précisant des résultats de [5] grâce à des hypothèses plus fortes.

I.1. NOTATIONS. — (X, θ, μ) désigne un espace mesuré avec μ finie et $\geqslant 0$.
$L^\infty(\theta)$ et $L^\infty_+(\theta)$ sont les espaces de fonctions associés à la tribu θ et $L^1(\mu)$, $L^1_+(\mu)$, $L^\infty(\mu)$, $L^\infty_+(\mu)$ les espaces de classes de fonctions associés à la mesure μ.

I.2. THÉORÈME (*). — *Soit m une forme linéaire $\geqslant 0$ sur $L^\infty(\theta)$. S'il n'existe*

(*) Ce théorème, familier aux probabilistes, ne figure quasiment pas dans la littérature et est attribué par Foguel à Neveu ([3], p. 47) qui en a donné une démonstration.

aucun élément non nul φ de $L_+^\varphi(\mu)$ tel que $\int f\varphi d\mu \leqslant m(f)$ *pour tout* $f \in L_+^\infty(\theta)$, *alors* $\exists g \in L_+^\infty(\theta)$ *tel que* $m(g) = 0$ *et* $g > 0$ μ-p. p.

Preuve. — L'hypothèse équivaut à dire $\nexists \varphi \in L_+^1(\mu)$, $\varphi \neq 0$, tel que, $\forall e \in \theta$, $\int_e \varphi d\mu \leqslant m(e)$.

En prenant $\varphi = h1(E)$ où $h > 0$ et $E \in \theta$, puis en appliquant le lemme de Zorn, on voit que, $\forall k > 0$, il existe une suite $e(n, k)$ d'ensembles mesurables, deux à deux disjoints, avec, si $e(0, k) = X/\left(\bigcup_n e(n, k)\right)$, $\mu(e(0, k)) = 0$ et telle que $\forall n$: $m(e(n, k)) \leqslant k\mu(e(n, k))$ $\forall p$ entier > 0, $\exists n_p$ tel que

$$\sum_{n_p+1}^{\infty} \mu(e(n, 1/p)) \leqslant 2^{-p} ;$$

posons $g_p = \sum_1^{n_p} 1(e(n, 1/p)) + (1/p) \sum_{n_p+1}^{\infty} 1(e(n, 1/p))$: $g = \inf(g_p)$ convient.

Remarquons que le théorème de Lebesgue-Radon-Nikodým résulte immédiatement de I.2.

Si E est un e. v. c. r. on note N(E) le s. e. v. (sous e. v.) de E^+ ([6] V.1) formé des éléments *normaux* sur E ([2] déf. 1) ([5] note VIII.27).

I.3. Corollaire. — *Soit* E *un s. e. v. isolé* ([1], p. 32, exercice 4) *de l'espace* $M(\mu)$ *des classes de fonctions μ-mesurables, finies* μ-p. p. *Si* E *contient un élément* > 0, μ-p. p. *alors :*

a) N(E) *est isomorphe, en tant qu'e. v. c. r., à l'espace*

$$E^\Delta = \left(g : g \in M(\mu), \quad \forall f \in E \int |fg| < \infty\right).$$

b) *Si* $m \geqslant 0$ *est un élément de* E^+, *étranger à* N(E), $\exists f \in E$ *tel que* $m(f) = 0$ *et* $f > 0$.

Preuve. — On peut supposer que la constante $1 \in E$. *a*) Résulte alors de ([2], théorème 1). *b*) Supposons que $f > 0, f \in E$, entraîne $m(f) > 0$. D'après I.2 $\exists g \in L_+^1(\mu)$, non nulle, avec $\int ugd\mu \leqslant m(u)$ pour tout $u \in L_+^\infty(\mu)$; d'où aisément $g \in E^\Delta$.

I.4. Remarque. — Si de plus E est tel que $\forall e$ avec $\mu(e) > 0$, $\exists f_e \in E$ tel que $\int_e |f_e|\,d\mu = +\infty$, alors, $\forall m \geqslant 0$ dans E^+, $\exists f \in E$ avec $m(f)=0$ et $f>0$.

En utilisant l'hypothèse du continu on peut donner un exemple d'espace E du type précédent tel que E^+ sépare les points de E : soit b une bijection de l'ensemble $[1, \Omega[$ des ordinaux dénombrables sur l'ensemble des (classes de) parties de $[0, 1]$ de mesure > 0 pour la mesure dx ($X = [0, 1]$, $\mu = dx$, θ est la tribu classique). Pour tout $\alpha \in [1, \Omega[$ x_α désignera un élément de l'espace de Stone associé à θ et porté par $b(\alpha)$.

Pour $\alpha = 1$ soient x_1 et $f_1 \in M(dx)$ avec $\int_{b(1)} |f_1| = \infty$ et $f_1(x_1)$ fini.

Soit $\beta \in [1, \Omega[$; supposons construits les x_α et les $f_\alpha \in M(dx)$ pour tout $\alpha < \beta$ avec :

$$\int_{b(\alpha)} |f_\alpha| = \infty \qquad \text{et } \forall \gamma < \beta,\ f_\alpha(x_\gamma) \text{ fini}.$$

En raison de l'hypothèse du continu $\exists e$ non négligeable, $e \subset e_\beta$, tel que $\forall \alpha \in [1, \Omega[$ f_α est bornée sur e et x_α n'est pas porté par e ; prenons x_β porté par e et f_β nulle hors de e tels que $\int_{b(\beta)} |f_\beta| = \infty$ et $f_\beta(x_\beta)$ est fini.

On peut prendre pour E le s. e. v. isolé de $M(dx)$ engendré par les f_α et 1.

Notons cependant que, si θ n'a pas de μ-atome, alors $(M(\mu))^+ = (0)$.

II. — LE LEMME DE BOREL-CANTELLI DANS LE CADRE DES E. V. C. R.

Soit E un e. v. c. r. et soit $A \subset E$; on note B_A la *bande engendrée* par A dans E.

II. 1. THÉORÈME. — *Soit* E *un e. v. c. r. et soit* (x_n) *une suite d'éléments* $\geqslant 0$ *de* E, *majorée par un élément* $y \geqslant 0$. *On suppose qu'il existe* $f \geqslant 0$ *dans* N(E) *telle que* $0 \leqslant z \leqslant y$ *et* $f(z) = 0$ *entraînent* $z = 0$.

Alors, si $x_0 = \inf(x_n)$, *on a* $B_{x_0} = \cap B_{x_n}$, *dès que* $\Sigma f(y - x_n) < \infty$.

Preuve. — D'après ([*1*], p. 35, exercice 13 ou [*4*] 50.3) et ([*2*], déf. 1, 3 ; théorème 1) on peut identifier l'espace $(z : \exists k \geqslant 0,\ |z| \leqslant ky)$ à un $L^\infty(\mu)$ et f à μ ; y, x_0 et x_n sont alors identifiés à 1, g_0 et g_n.

Il s'agit alors de montrer que $(x : g_0 > 0) = \cap (x : g_n > 0)$: soit $e = \cap (x : g_n > 0)$; on a

$$\sum \int (1(e) - (g_n)1(e))d\mu \leqslant \sum \int (1 - g_n)d\mu = \sum f(y - x_n) < \infty .$$

Si on pose $e_n = (x : x \in e$ et $g_n(x) \leqslant 1/2)$ on a donc

$$\sum \mu(e_n) \leqslant 2 \sum \int (1(e) - (g_n)1(e))d\mu < \infty \ ;$$

d'où $\inf (g_n) > 0$ μ-p. p. sur e.

Le lemme de Borel-Cantelli correspond au cas où $E = L^\infty(\mu)$, $x_n = 1(e_n^c)$, $y = 1$, $f = \mu$.

III. — ÉTUDE DE L'ESPACE N(F) POUR CERTAINS E. V. C. R. F

Comme, sur un espace stonien, deux mesures normales $\geqslant 0$ étrangères ont leur support (ouvert et fermé) disjoints on a, en utilisant ([*1*], p. 35, exercice 13 ou [*4*] 50.3).

III.1. Lemme ([*5*], note VIII, 27.8). — *Soient* E *un e. v. c. r. et* (g_i) *une famille d'éléments* $\geqslant 0$ *de* N(E). *Soit* $f \geqslant 0$ *dans* N(E), *étrangère aux* g_i, $\forall i$; *si* $f \neq 0$, $\exists x \geqslant 0$ *dans* E *tel que* $f(x) > 0$ *et* $g_i(x) = 0, \forall i$.

III.2. Définition. — Soit E un e. v. o. positivement engendré et soit F un s. e. v. de E^+ ; on dit que F est *filtrant-stable* lorsque, pour toute famille filtrante croissante (x_α) de F, majorée dans F, alors $\sup (x_\alpha) \in F$.

III.3. Corollaire ([*5*], note X, 32.10). — *Soit* E *un e. v. o. positivement engendré et soit* F *un s. e. v. c. r. filtrant stable de* E^+. *Soit* $\tilde{E}$ *l'image de* E *par l'application canonique de* E *dans* F^+ ; *on a* $B_{\tilde{E}} = N(F)$.

On dit qu'un e. v. c. r. est de *genre dénombrable* si toute famille d'éléments $\geqslant 0$, deux à deux étrangers et non nuls, est au plus dénombrable ([*2*], déf. 3) ([*5*], note VIII, 27.18).

III.4. Théorème. — *Soit* E *un e. v. o. positivement engendré et soit* F *un s. e. v. c. r. filtrant stable de* E^+. *On suppose qu'il existe dans* F *un élément* $f \geqslant 0$ *tel que* $B_f = F$ (B_f *étant prise dans* F) *et que* N(F) *soit de genre dénombrable. On a alors*

a) N(F) *est engendré par l'image de* E *dans* F^+.

b) *Un élément* $m \geqslant 0$ *de* F^+ *est étranger à* N(F) *si* $\exists 1 \geqslant 0$ *dans* F *avec* $m(1) = 0$ *et* $B_1 = F$.

Preuve. — *a*) Résulte de III.3.

Par une méthode voisine de celle de II.1 on voit que F est isomorphe, en tant qu'e. v. c. r., à un s. e. v. isolé d'un $M(\mu)$, de sorte qu'à f corresponde la fonction constante 1 ; il suffit alors d'appliquer I.4.

I.2 correspond au cas $E = L^1(\mu)$, $F = L^\infty(\mu)$ et $f = 1$.

III.4 se simplifie moyennant certaines hypothèses sur E et F.

On dit qu'un s. e. v. d'un e. v. c. r. est *complètement co-réticulé* s'il est co-réticulé ([*1*], p. 32, exercice 3) et filtrant stable. Le lemme suivant résulte de III.1 :

III.5. LEMME ([*5*], note VIII, 27.11). — *Soient* E *un e. v. c. r. et* F *un s. e. v. complètement co-réticulé de* N(E). *Soient* f, $g \geqslant 0$ *dans* F ; *on a* :

$(g \in B_f$, B_f *étant prise dans* F) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \geqslant 0$ *dans* E, $f(x) = 0$ *entraîne* $g(x) = 0$).

Soient E un e. v. o. et $f \in E^+$; on note $f > 0$ quand

$$(x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0) \Rightarrow x = 0$$

([*5*], note VIII, 27.16).

III.6. THÉORÈME. — *Soient* E *un e. v. c. r. de genre dénombrable et* F *un s. e. v. complètement co-réticulé de* N(E) *qui contient un élément* $f > 0$; *alors*

a) $B_f = F$ (B_f *étant prise dans* F).

b) N(F) *est de genre dénombrable.*

E, F *et* f *vérifient donc les hypothèses sous lesquelles* III.4 *est énoncé.*

Preuve. — *a*) est un cas particulier de III.5.

Par une méthode voisine de celle de II.1 on voit que F est isomorphe à un s. e. v. isolé des fonctions continues, finies sur un ouvert partout dense, d'un espace hyperstonien S, de sorte qu'à f corresponde la fonction constante 1. Il suffit de prouver que S est de genre dénombrable.

$\forall x \geqslant 0$ dans E, notons m_x la mesure normale correspondante sur S et e_x son support. Soit (x_α) une famille maximale d'éléments $\geqslant 0$ de E, deux à deux étrangers et non nuls, telle que les m_{x_α} soient deux à deux étrangères. Il suffit de prouver que $\overline{(\cup e_\alpha)} = S$: soit $e_0 \subset S \backslash (\cup e_\alpha)$, e_0 non vide, ouvert et fermé ; d'après III.1 $\exists x \geqslant 0$ dans E tel que $m_x(e_0) > 0$ et $m_x(e_\alpha) = 0$; donc $\exists y \geqslant 0$ dans E tel que $y \leqslant x$, y est étranger aux x_α et $m_y(e_0) > 0$, $m_y(e_\alpha) = 0$. (x_α) n'est donc pas maximale.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] BOURBAKI, *Intégration*, Chap. 2 (2e édition).
[*2*] DIXMIER, Sur certains espaces considérés par M. H. Stone. *Sum. Bras. Math.*, t. **II**, Fasc. 11, 1951.
[*3*] FOGUEL, *The ergodic theory of Markov Process*. Van Nostrand.
[*4*] LUXEMBURG et ZAANEN, *Riesz spaces I*, North-Holland Math. Lib. Amsterdam, London.
[*5*] LUXEMBURG-ZAANEN, Notes on Banach function spaces. *Indagationes Mathematicae*. Note VIII, vol. **26**, fasc. 1, p. 104-119. Note X, vol. **26**, fasc. 5, p. 493-506.
[*6*] SCHAEFER, *Topological Vector Spaces*.

(Manuscrit reçu le 9 octobre 1974)