ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

FRANÇOIS BLANCHARD

Conditions d'isomorphisme des flots spéciaux

Annales de l'I. H. P., section B, tome 11, nº 2 (1975), p. 173-185
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1975__11_2_173_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XI, n° 2, 1975, p. 173-185. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Conditions d'isomorphisme des flots spéciaux

par

François BLANCHARD (*)
Laboratoire de Calcul des Probabilités, Université Paris VI,
4, place Jussieu, Tour 56, 75230 Paris Cedex 05

ABSTRACT. — For two special flows to be isomorphic, the automorphisms on which they are built must have isomorphic induced systems.

It is shown that two special flows on isomorphic bases are isomorphic if and only if a measurable function u can be found such that

$$g \circ \phi(x) - f(x) = u(x) - u(\tau x),$$

where f and g are the ceiling functions, and τ is the isomorphism of the bases.

1. INTRODUCTION

Le théorème d'Ambrose-Kakutani [*1*] ne donne pas une représentation unique d'un flot propre comme flot spécial : la question se pose donc de savoir quelles relations existent entre les diverses représentations spéciales d'un même flot; le cas le plus clair à cet égard est celui des processus ponctuels stationnaires, dont on connaît une représentation canonique (Hanen [7]) qui n'est pas celle d'Ambrose-Kakutani. D'un autre côté, Krieger [*10*] a récemment établi l'équivalence de l'isomorphisme faible des automorphismes de type III_0, avec l'isomorphisme des flots spéciaux, cependant que

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la Section n° 1 « Mathématiques, Informatique » associée au C. N. R. S.

Comes et Takesaki [*4*] donnaient une correspondance entre flots spéciaux et facteurs de type III_0.

On trouvera ici une condition nécessaire et suffisante d'isomorphisme de deux flots spéciaux, qui s'exprime sous forme d'une condition sur les systèmes dynamiques de base : l'existence d'induits isomorphes, qui a été notée par Kakutani [*8*], puis par A. Connes [*2*], et d'une condition d'homologie (à cet isomorphisme près) des fonctions plafonds (§ 4). Elle permet ensuite de construire des flots isomorphes à un flot donné (§ 5).

Les exposés de Lazaro et Meyer [*11*] ont été fortement mis à contribution; la construction qu'ils donnent des flots spéciaux se révèle, à l'usage, extrêmement commode pour les démonstrations de mesurabilité et de conservation de la mesure; elle permet d'abandonner l'hypothèse, souvent gênante que la fonction plafond est bornée inférieurement par un réel positif; le théorème 3 ci-après est, en ce sens, plus fort que le théorème 1 de Gurevič [*6*], dont il est inspiré, et permet de rendre compte des isomorphismes des processus ponctuels considérés comme flots spéciaux au-dessus de leur mesure de Palm.

L'idée d'abandonner cette hypothèse sur un point particulier se trouve chez Hanen [*7*], p. 27.

Je remercie MM. Ledrappier et Neveu pour de fructueuses discussions.

2. NOTATIONS ET RAPPELS

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de Lebesgue de mesure σ-finie, τ un automorphisme sur cet espace (bijection bi-mesurable conservant la mesure) que nous supposerons conservatif, c'est-à-dire que pour tout élément A de $\mathscr{A}$, on a

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \tau^n A.$$

Le système dynamique $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \tau)$ sera noté en abrégé (Ω, τ) quand il n'y a pas d'ambiguïté. Soit f une application intégrable de Ω dans $\mathbb{R}^+ - \{ 0 \}$. Lazaro et Meyer [*11*] donnent du flot spécial $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{A}}, \tilde{\mu}, \tilde{T}_t)$, ou $(\tilde{\Omega}, T_t)$, la construction suivante :

Soit $\bar{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}$, muni de la σ-algèbre $\bar{\mathscr{A}}$ produit de $\mathscr{A}$ par les boréliens, et de la mesure $\bar{\mu} = \mu \otimes dt$, stable par le flot θ_t des translations. On définit

$$f_n(x) = f(x) + \dots + f_0\tau^n(x) \quad , \quad f_0(x) = 0,$$

$$f_{-n}(x) = -f_0\tau^{-1}(x) - \dots - f_0\tau^{-n}(x),$$

et

$$\bar{\Omega}_n = \{ (x, u) \in \bar{\Omega} : f_n(x) \leqq u < f_{n+1}(x) \}.$$

$\tilde{\Omega} = \bar{\Omega}_0$, munie des restrictions $\mathscr{A} = \bar{\mathscr{A}}/\tilde{\Omega}$ et $\tilde{\mu} = \bar{\mu}/\tilde{\Omega}$ (qui est de masse totale finie $\int f\,d\mu$), ainsi que du flot T_t :

$$\mathrm{T}_t(x, u) = (\tau^k x, u + t - f_k(x))$$

où k est tel que

$$f_k(x) \leqq u + t < f_{k+1}(x),$$

est isomorphe au quotient de $(\bar{\Omega}, \theta_t)$ pour la relation $\mathscr{R}$: $(x, u)\mathscr{R}(x', u')$ s'il existe k dans Z tel que

$$x' = \tau^k x \quad , \quad u' = u + f_k(x).$$

On notera que $f_i(\tau^k x) = f_{i+k}(x) - f_k(x)$.

On sait par ailleurs que tout flot spécial est un flot mesurable (Lazaro et Meyer [*11*], II, p. 6).

Si l'on se donne un second système dynamique (Ω', τ') et une fonction intégrable positive g, on construira de manière analogue le flot $(\tilde{\Omega}', \mathrm{T}'_t)$.

Soit ϕ un isomorphisme de (Ω, τ) dans (Ω', τ').

DÉFINITION. — Une application Φ de $\tilde{\Omega}$ dans $\tilde{\Omega}'$, est dite *compatible* avec l'isomorphisme ϕ si pour tout élément (x, t) de $\tilde{\Omega}$, il existe un entier relatif k tel que :

$$\Phi(x, t) = (\tau'^k \circ \phi(x), t') \in \tilde{\Omega}'$$

ou, de manière équivalente,

$$\Phi(x, t) = \mathrm{T}'_{t-n(x,t)}(\phi(x), 0).$$

Nous appellerons isomorphisme de deux flots spéciaux une bijection bi-mesurable, conservant la mesure et échangeant les flots, entre N^c et N'^c, N et N' étant des parties négligeables de $\tilde{\Omega}$ et $\tilde{\Omega}'$, invariantes par le flot et mesurables.

3. CONDITIONS SUR LES BASES

Soit $(\tilde{\Omega}, \mathrm{T}_t)$ et $(\tilde{\Omega}', \mathrm{T}'_t)$ deux flots spéciaux isomorphes par Φ, de bases (Ω, τ) et (Ω', τ') définis respectivement sous les fonctions f et g.

On dira que $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$ est un sous-ensemble exhaustif de Ω (« sweep-out set », Krengel [*9*]), si

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \tau^n(\mathrm{A}) = \Omega \text{ p. s.}$$

Si nous utilisons la définition classique de l'automorphisme induit (Kakutani [8], ou Friedman [5], p. 13), nous dirons par extension que l'automorphisme τ_A induit par τ sur A est exhaustif si A est exhaustif.

Le résultat suivant a été énoncé par Kakutani [8] et retrouvé par A. Connes [2] par de tous autres moyens. J'en donne ici une démonstration.

THÉORÈME 1. — Si deux flots spéciaux sont isomorphes, leurs systèmes dynamiques de base ont des induits isomorphes, et l'isomorphisme des flots est compatible avec celui des bases.

Démonstration. — Posons :

$$A = \{ x \in \Omega ; \exists x' \in \Omega' \text{ tel que } \Phi^{-1}(x', 0) = (\tau^{-1}x, t) \}$$
$$A' = \{ x' \in \Omega' ; \exists x \in \Omega \text{ tel que } \Phi(x, 0) = (x', t') \}$$

1) Par définition, A' est la projection sur Ω' de l'ensemble mesurable $\Phi(E \times \{ 0 \})$, où E est la partie de Ω sur les points au-dessus de laquelle Φ est défini. A' est donc mesurable, et le même argument vaut pour A.

A est exhaustif pour τ : en effet, soit $x \in E$: $\Phi(x, 0) \in \tilde{\Omega}'$, et d'après les propriétés élémentaires des flots spéciaux (Lazaro et Meyer [*11*], II), il existe presque sûrement un point x' tel que

$$\Phi(x, 0) = T'_t(x', 0),$$

donc il existe un entier positif k tel que $\tau^{-k}x \in A$. Donc $\bigcup_{-\infty}^{+\infty} \tau^n A = \Omega$ p. s., et, comme A est mesurable, $\mu(A)$ est nécessairement non nulle.

2) Montrons maintenant que les induits τ_A et τ'_A sont isomorphes. A tout élément x de A, on fait correspondre l'unique élément $\phi(x)$ de A' tel que

$$\Phi^{-1}(\phi(x), 0) = (\tau^{-1}x, t),$$

ou bien

$$\Phi(x, 0) = (\phi(x), t')$$

ce qui entraîne que Φ sera compatible avec ϕ.

(*a*) ϕ est une bijection, car si l'on définit l'application ϕ' :

$$\Phi^{-1}(x', 0) = (\tau^{-1}\phi'(x'), t),$$

$\phi' \circ \phi$ est l'application identique de E.

(*b*) ϕ est mesurable : $\phi(x)$ peut se définir comme la projection sur Ω' de $\Phi(x, 0)$, donc comme produit d'applications mesurables; il en est de même de ϕ^{-1}.

(*c*) ϕ conserve la mesure. Soit sur A la fonction positive $u(x) = \text{proj}_{\mathbb{R}} \Phi(x, 0)$. Elle est mesurable et l'on a $T_t \{ \phi(x), 0 \} = T_{-u(x)}\Phi(x, t)$.

Pour toute fonction positive $h \leqq \min(f, g \circ \phi)$, le sous-ensemble de $\tilde{A}$, $B = \{ (x, t) : x \in A, t \leqq h(x) \}$ a pour mesure $\int_A h(x)\mu(dx)$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\Phi(B) &= \Phi((x, t) : x \in A, t \leqq h(x)) \\ &= \bigcup_{t \leqq h\circ\phi^{-1}(x')} T_{t+u\circ\phi^{-1}(x')} \{ (x', 0) : x' \in A' \} \\ &= T_{u\circ\phi^{-1}(x')}\Big(\bigcup_{t \leqq h\circ\phi^{-1}(x')} T_t \{ (x', 0) : x' \in A' \}\Big)\end{aligned}$$

et, comme $h \leqq g \circ \phi$, ce dernier terme est

$$\Phi(B) = T_{u\circ\phi^{-1}(x')} \{ (x', 0) : x' \in A', t \leqq h \circ \phi^{-1}(x') \}$$

$u \circ \phi^{-1}$ étant mesurable, on a :

$$\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}'(\Phi(B)) = \tilde{\mu}'(T_{-u\circ\phi^{-1}(x')} \circ \Phi(B)).$$

Or le dernier terme vaut :

$$\tilde{\mu}'((x', 0) : x' \in A', t \leqq h \circ \phi^{-1}(x')) = \int_{A'} h \circ \phi^{-1}(x')\mu'(dx').$$

Donc

$$\int_A h(x)\mu(dx) = \int_{A'} h \circ \phi^{-1}(x')\mu(dx') ;$$

du fait que f et g sont strictement positives, l'égalité se généralise immédiatement à toute fonction h intégrable, et en particulier aux indicateurs d'ensembles. ϕ conserve bien la mesure.

(*d*) Enfin, $\phi \circ \tau_A = \tau'_{A'} \circ \phi$. Soit k et k' les plus petits entiers positifs tels que, respectivement, $\tau^k x \in A$ et $\tau'^{k'} \circ \phi(x) \in A'$: par définition de l'induit, $\tau^k x = \tau_A x$ et $\tau'^{k'}(\phi(x)) = \tau'_A \circ \phi(x)$; et par ailleurs, si $\phi(\tau^k x)$ n'était pas égal à $\tau'^{k'}x'$, d'après la définition de ϕ, il existerait $k_0 < k$, positif (ou bien $k_0 < k'$), tel que $\tau^k x \in A$ (resp. $\tau'^{k'}(\phi(x)) \in A'$). Donc $\phi(\tau^k x) = \tau'^{k'} \circ \phi(x)$, ce qui établit le résultat.

Soit $m(x)$ le nombre de sauts nécessaires, partant d'un point de A, pour revenir dans A :

$$m(x) = \min \{ m > 0; \tau^m x \in A \} \quad , \quad x \in A.$$

τ est récurrent donc, A étant de mesure positive, on sait que n est fini p. s. A f, on associe la fonction positive f_A ainsi définie :

$$f_A(x) = f_{n(x)}(x) \quad , \quad x \in A$$

(que nous appellerons fonction induite de f par τ sur A).

Le résultat suivant est classique (cf. Chacon [*3*]).

THÉORÈME 2. — Si A est exhaustif pour τ, le flot spécial $(\tilde{A}, \theta_t)$ construit sur (A, τ_A) sous la fonction f_A est isomorphe au flot $(\tilde{\Omega}, T_t)$ sous f.

Démonstration. — Soit $\eta(x) = \min \{ n \in \mathbb{N}; \tau^{-n}x \in A \}$. C'est une application mesurable de Ω dans $\mathbb{N}$. Posons

$$\Psi(x, t) = (\tau^{-\eta(x)}(x), f_{\eta(x)} \circ \tau^{-\eta(x)}(x) + t).$$

Cette application de $\tilde{\Omega}$ dans $\tilde{A}$ peut se décomposer comme suit : soit β_k^{-1} l'isomorphisme canonique de $\tilde{\Omega}$ dans $\overline{\Omega}_k$; $\beta_n^{-1}(v = n)$ est inclus dans $\tilde{A}$, et Ψ peut s'écrire

$$\Psi_{|\{v(x)=n\}} = \beta_n^{-1}.$$

A partir de là, il est facile de vérifier que Ψ est un isomorphisme.

Grace aux théorèmes 1 et 2, on peut toujours se ramener à un isomorphisme de flots spéciaux compatible avec un isomorphisme des bases.

Si la définition d'un automorphisme induit sur toute partie mesurable nécessite la conservativité de τ, en revanche, on peut définir un induit sur un sous-ensemble, pourvu qu'on y revienne au bout d'un temps fini, sans que τ soit nécessairement conservatif. D'où la nécessité du lemme suivant, lorsque nous construirons un automorphisme ayant un induit donné.

LEMME 1. — Soit μ une mesure σ-finie sur $(\Omega, \mathscr{A})$, τ un automorphisme de cet espace mesuré, A un sous-ensemble exhaustif pour τ.

1) τ_A est conservatif si et seulement si τ est conservatif;

2) Soit τ conservatif; τ_A est apériodique si et seulement si τ est apériodique.

Ebauche de démonstration :

1) Si τ_A est conservatif, pour $E \in \mathscr{A}$, soit

$$E_i = \{ x \in E; \eta(x) = i \}.$$

On montre que :

$$E_i \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \tau^k E_i \text{ (p. s).}$$

La réciproque résulte de la conservativité de τ, appliquée aux parties mesurables de A.

2) La démonstration est donnée par Krengel [*9*], p. 164.

4. CONDITION D'ISOMORPHISME DE DEUX FLOTS SPÉCIAUX AU-DESSUS DE DEUX BASES ISOMORPHES

Si $\Phi : (\tilde{\Omega}, T_t) \to (\tilde{\Omega}', T'_t)$ est un isomorphisme et si $\phi : (\Omega, \tau) \to (\Omega', \tau')$ est celui qu'on obtient à partir de Φ par la méthode employée dans la démonstration du théorème 1, il est facile de voir qu'il existe une fonction u mesurable sur $(A, \mathscr{A}_A)$ telle que :

$$(2) \qquad g_{A'} \circ \phi - f_A = u - u \circ \tau_A \text{ p. s.}$$

(c'est exactement la fonction u définie dans la seconde partie de cette démonstration). En fait, on peut montrer un résultat plus fort : il en est de même quel que soit l'isomorphisme ϕ entre les deux bases, pourvu qu'existe entre les flots définis resp. au-dessus de f et de g un isomorphisme compatible avec ϕ; et de plus, la condition (2) est suffisante.

Dans le cas où les bases de deux flots sont les mêmes, et où ϕ est l'isomorphisme identité, la formule (2) devient

$$(2') \qquad g - f = u - u \circ \tau.$$

Nous dirons dans ce cas que f et g sont homologues pour l'automorphisme τ.

Voici maintenant un résultat qui étend le théorème 1 de Gurevič [*6*].

THÉORÈME 3. — Soit $\phi : (\Omega, \tau) \to (\Omega', \tau')$ un isomorphisme au sens large de deux systèmes dynamiques, $(\tilde{\Omega}, T_t)$ et $(\tilde{\Omega}', T'_t)$ les flots spéciaux construits respectivement sous les fonctions f et g. S'il existe une application mesurable u de Ω dans $\mathbb{R}$, telle que f et g vérifient

$$(2) \qquad f - g \circ \phi = -u + u \circ \tau \qquad (\mu\text{-p. s.}),$$

il existe (hors d'un ensemble $\tilde{\mu}$-négligeable) une application Φ de $\tilde{\Omega}$ dans $\tilde{\Omega}'$, compatible avec ϕ et qui est un isomorphisme des flots.

Démonstration. — 1) L'application $\Phi(x, t) = T'_{t+n(x)}(\phi(x), 0)$ est une bijection (hors d'un ensemble négligeable). La démonstration en est purement technique, la voici cependant à titre d'exemple; soit :

$$\Phi'(x', t') = T_{t' - u\circ\phi^{-1}(x')}(\phi^{-1}(x'), 0),$$
$$\Phi(x, t) \ = (\tau'^k \circ \phi(x), t + u(x) - g_k \circ \phi(x))$$

où k est tel que $g_k \circ \phi(x) \leqq t + u(x) \leqq g_{k+1} \circ \phi(x)$, et par conséquent

(3) $\Phi' \circ \Phi(x, t) = (\tau^j \circ \phi^{-1} \circ \tau'^k \circ \phi(x), t+u(x)-g_k(x)-u \circ \phi^{-1} \circ \tau'^k \circ \phi(x)$
$-f_j \circ \tau'^k \circ \phi(x))$

ce qui se simplifie en

(4) $\Phi' \circ \Phi(x, t) = (\tau^{j+k}x, t + u(x) - g_k \circ \phi(x) - u_0 \tau^k x - f_j \circ \tau^k x)$

où j est tel que

(5) $$f_j \circ \tau^k x \leqq t + u(x) - g_k(x) - u_0 \tau^k x < f_{j+1} \circ \tau^k x.$$

Or la relation (2) implique

$$f_k - g_k \circ \phi = - u + u \circ \tau^k \quad \text{(p. s.)},$$

ce qui, reporté dans (5), donne la condition sur j :

(6) $$f_j \circ \tau^k x \leqq t - f_k(x) < f_{j+1} \circ \tau^k x.$$

Mais, par définition, $0 \leqq t < f(x)$ et, par application de la relation (1),

(7) $$- f_k(x) \leqq t - f_k(x) < f(x) - f_k(x).$$

En combinant (6) et (7), il vient : $j = - k$ et, reporté dans (4), cela implique que

$$\Phi' \circ \Phi(x, t) = (x, t) \qquad \text{p. s.}$$

Par ailleurs, Φ commute avec le flot : pour (x, a) donné, $T_t(x, a)$ se décompose en un nombre fini d'applications de la forme $T_{f(y)}(y, \alpha)$, ou de la forme $T_\beta(y, \alpha)$ avec $0 \leqq \alpha + \beta \leqq f(y)$, que Φ transforme chacune en la translation correspondante de T'; la démonstration est dans l'esprit de celle qui précède.

On a donc obtenu une application de $\tilde{\Omega}$ dans $\tilde{\Omega}'$, compatible avec ϕ, bijective et échangeant les flots. Grace à la mesurabilité des flots spéciaux, Φ et son inverse sont mesurables.

2) Reste à montrer que Φ conserve la mesure.

Soit E une partie mesurable de $\tilde{\Omega}$, que nous considérerons aussi comme sous-ensemble de $\bar{\Omega}$. Soit

$$E_k = \{ (x, t) \in E ; \; g_k \circ \phi(x) \leqq t + u(x) < g_{k+1} \circ \phi(x) \}.$$

La famille $(E_k, - \infty < k < + \infty)$ constitue une partition mesurable de E. En se plaçant dans $\bar{\Omega}$, $\theta_{u(x)}(x, t) \in \bar{\Omega}_k$ quand $(x, t) \in E_k$, et $\bar{\mu}(\theta_u E_k) = \tilde{\mu}(E_k)$, car la mesure de Lebesgue du segment de fibre au-dessus du point ω est conservée par la translation $\theta_u(x)$.

L'application $\bar{\phi}$ de $\bar{\Omega}$ dans $\bar{\Omega}'$: $\bar{\phi}(x, t) = (\phi(x), t)$, produit cartésien de ϕ par l'identité, est un isomorphisme et par définition de E_k, $\bar{\phi} \circ \theta_{-u}(E_k) \in \bar{\Omega}'_k$;

enfin l'application β'_k de $\overline{\Omega}'_k$ dans $\tilde{\Omega}'$: $\beta'_k(y, v) = (\tau'^k y, v - g_k y)$ est un isomorphisme. Comme $\Phi\,|_{E_k} = \beta_k \circ \overline{\phi} \circ \theta_u$, et que Φ est une bijection,

$$\mu'(\Phi\,|_{E_k}) = \tilde{\mu}(E_k).$$

On a donc dès maintenant le résultat suivant, en associant les théorèmes 2 et 3 : si les bases de deux flots spéciaux ont des induits exhaustifs isomorphes, il suffit pour que les flots soient eux-mêmes isomorphes que les fonctions induites des fonctions plafond vérifient la relation (2).

La condition que vous venons d'énoncer est également nécessaire quand τ est apériodique (on sait grace au lemme 1 qu'il est équivalent de supposer τ_A apériodique).

THÉORÈME 4. — Soient (Ω, τ) et (Ω', τ') deux systèmes dynamiques apériodiques, $\phi : (\Omega, \tau) \to (\Omega', \tau')$ un isomorphisme. S'il existe une application Φ compatible avec ϕ, presque sûrement définie de $\tilde{\Omega}$ dans $\tilde{\Omega}'$, qui transforme T_t en T'_t, il existe une fonction mesurable u sur Ω, telle que

$$f - g \circ \phi = u - u \circ \tau \qquad \text{(p. s.)}.$$

Démonstration. — Φ, compatible avec ϕ, est de la forme :

$$\Phi(x, t) = T'_{t+u(x,t)}(\phi(x), 0)).$$

Soit $x \in \Omega$: 1) Soient a et b deux réels positifs, inférieurs à $f(x)$. Hors d'un ensemble $\tilde{\mu}$-négligeable,

$$\Phi(x, b) = \Phi \circ T_{b-a}(x, a) = T'_{b-a}\Phi(x, a).$$

Donc :

$$T'_{b+u(x,b)}(\phi(x), 0) = T'_{b+u(x,a)}(\phi(x), 0)$$

ou

$$(\phi(x), 0) = T'_{-u(x,b)+u(x,a)}(x, 0). \tag{8}$$

Le second membre s'écrit

$$(\tau'^k \circ \phi(x), u(x, a) - u(x, b) - g_k(x))$$

pour une certaine valeur de k. τ' est comme τ apériodique, donc (8) entraîne que

$$k = 0 \quad \text{et} \quad u(x, b) = u(x, a) = u(x)$$

sur le segment $[0, f(x)[$ pour μ-presque tout x.

2) Par ailleurs,

$$\Phi(\tau x, 0) = \Phi \circ T_{f(x)}(x, 0) = T'_{f(x)} \circ \Phi(x, 0) \quad \tilde{\mu} \text{ p. s.}$$

ce qui s'écrit encore

$$(\tau'^{j+1} \circ \phi(x), u' \circ \tau x + g_j \circ \phi \circ \tau x) = (\tau'^{k} \circ \phi(x), f(x) + u(x) + g_k \circ \phi(x))$$

donc $k = j + 1$, et

$$u \circ \tau x + g_k \circ \phi(x) - g \circ \phi(x) = f(x) + u(x) + g_k \circ \phi(x)$$

soit

$$f(x) - g \circ \phi(x) = u(\tau x) - u(x) \qquad \mu\text{-p. s.}$$

3) On notera que u est mesurable sur $(\Omega, \mathscr{A})$. En effet, la restriction de Φ à l'ensemble $\Omega \times \{ 0 \}$:

$$\Phi(., 0) = (\tau^{k(.)}., t'(.) = u(.) - g_{k(.)}(.))$$

reste une application mesurable de cet ensemble dans une partie de Ω', c'est-à-dire que $\tau^{k(.)}(.)$ est une application mesurable de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans lui-même, et $t'(.)$ de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans $\mathbb{R}$.

La mesurabilité de $\tau^{k(.)}(.)$ entraîne celle de k :

$$\{ x : k(x) = i \} = \{ x : \tau^{-i}\tau^{k(x)}(x) = x \},$$

qui est l'ensemble des invariants d'un endomorphisme sur un espace de Lebesgue, est mesurable.

Par conséquent,

$$u(.) = t'(.) + g_{k(.)}(.)$$

est mesurable.

Remarques. — 1) Soit $\mathscr{I}$ la sous σ-algèbre de $\mathscr{A}$ des événements invariants par τ. Si les flots $(\tilde{\Omega}, T_t)$ et $(\tilde{\Omega}', T'_t)$ sont isomorphes de manière compatible avec ϕ, on montre facilement, que τ soit apériodique ou non, que

$$\text{(9)} \qquad E(f \mid \mathscr{I}) = E(g \circ \phi \mid \mathscr{I}).$$

Or, si τ n'est apériodique que sur une partie négligeable de Ω, cette condition est suffisante; en effet, sur l'ensemble invariant où τ est périodique de période n,

$$E(f \mid \mathscr{I}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f \circ \tau^i$$

vérifie avec f la relation (2'); or, (2') est une relation d'équivalence compatible avec l'addition des fonctions, et il suffit d'appliquer le théorème 3 pour obtenir l'isomorphisme des flots.

Par contre, dans le cas général, (9) n'entraîne pas (2'). La remarque suivante fournit des contre-exemples.

2) Le théorème suivant est bien connu des ergodiciens quoique non publié à ma connaissance. Sa partie directe, la plus intéressante, s'obtient par un simple calcul, la réciproque est une application immédiate du théorème 3.

THÉORÈME 5. — Si (Ω, τ) est un système dynamique ergodique, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) le flot $(\tilde{\Omega}, T_t)$ sous la fonction f n'est pas faiblement mélangeant;

b) $f(x)$ vérifie la relation (2') avec une fonction $an(x)$, a réel, $n(x)$ à valeurs entières.

Les théorèmes 3 et 4 permettent de l'interpréter comme suit : tout flot spécial ergodique ayant des valeurs propres est isomorphe à un flot spécial sur la même base, sous une fonction plafond à valeurs dans un ensemble en progression arithmétique.

3) Dans les notations du § 3, les fonctions f et $\bar{f}_A = \begin{cases} f_A \text{ sur } A \\ 0 \text{ sur } A^c \end{cases}$ sont homologues, c'est-à-dire qu'elles vérifient la relation (2').

5. CONSTRUCTION DE FLOTS SPÉCIAUX ISOMORPHES A UN FLOT SPÉCIAL DONNÉ

Grace aux résultats obtenus, nous allons pouvoir construire à partir d'un flot spécial donné des flots spéciaux qui lui sont isomorphes.

Soit (Ω, τ) un système dynamique, f une fonction positive intégrable, $(\tilde{\Omega}, T_t)$ construit sous f; on choisit une partie exhaustive A, et on construit $(\tilde{A}, \theta_t)$ sur (A, τ_A) sous la fonction f_A, puis $(\tilde{A}', \theta'_t)$ sur une base isomorphe à (A, τ_A) et sous une fonction g_A, vérifiant avec f_A la relation (2). Il nous faut maintenant obtenir, à partir d'un système dynamique donné, d'autres systèmes dont celui-ci soit l'induit.

A. Construction de systèmes dynamiques ayant un induit donné

Cette construction par la méthode des piles est classique; Chacon [*3*] en donne l'ébauche.

On se donne un système dynamique (Ω, τ) et une application mesurable $n(x)$ de Ω dans l'ensemble des entiers positifs ou nuls. Soit

$$A_i = \{ x : n(x) \geqq i \} \quad , \quad i = 0, \ldots, n, \ldots$$

et soit A'_i une copie de A_i, dont les éléments seront notés x_i, x étant l'élément de Ω dont x_i est la copie. Chacun des ensembles A'_i est muni de la σ-algèbre $\mathscr{A}_i$ induite par $\mathscr{A}$, et de la mesure μ_i restriction de μ à A_i : $(A'_0, \mathscr{A}_0, \mu_0)$ est en particulier une copie de $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Sur $(A'_0 + A'_1 + \dots A'_k + \dots, \mathscr{A}_0 \oplus \dots \oplus \mathscr{A}_k \oplus \dots, \mu_0 \oplus \dots \mu_k \oplus \dots)$ que l'on notera $(\widehat{A}_n, \widehat{\mathscr{A}}_n, \widehat{\mu}_n)$, où $\widehat{\mu}_n$ est elle aussi σ-finie, nous définirons l'application $\widehat{\tau}$ comme suit :

$$\widehat{\tau}_n(x_i) = \begin{cases} x_{i+1} & \text{si} \quad x \in A_{i+1} \\ (\tau x)_0 & \text{si} \quad x \in A_i \backslash A_{i+1} \end{cases}$$

Il est facile de démontrer que $\widehat{\tau}_n$ est un automorphisme, et que $\widehat{\tau}_{n A'_0}$ est isomorphe à τ par l'application $x_0 \rightsquigarrow x$. Grace à la première partie du lemme 1, si τ est conservatif, $\widehat{\tau}_n$ l'est aussi.

B. **Construction d'un flot spécial**

Appliquons la construction précédente à $(A', \tau'_{A'})$, de la manière suivante: soit $h_0 = 0, h_1, h_2, \dots$, une suite infinie de fonctions mesurables, intégrables, positives sur A', croissant vers $+\infty$ en presque tout point et $n(x)$ l'indice (fini) de la dernière d'entre elles à être inférieure à $f(x)$ au point x.

On construit $(\widehat{A}'_n, \widehat{\tau}'_{A^n}) = (\Omega', \tau')$ et on définit

$$g(x_i) = \begin{cases} h_{i+1}(x) - h_i(x) & \text{si} \quad x \in A_{i+1} \\ g_{A'}(x) - h_i(x) & \text{si} \quad x \in A_i \backslash A_{i+1} \end{cases}$$

$g_{A'}$ est bien la fonction induite de g par τ' sur $A' = A'_0$, telle qu'elle est définie au § 3. D'après le théorème 2, le flot construit sur $(A', \tau'_{A'})$ sous $g_{A'}$, est donc isomorphe au flot construit sur (Ω', τ') sous g.

Sur la notion d'homologie. — Dans l'esprit de ce qui précède, on remarquera la propriété suivante : soit Φ un isomorphisme de $(\tilde{\Omega}, T_t)$ dans $(\tilde{\Omega}', T'_t)$; il permet d'introduire sur $(\Omega \oplus \Omega', \mathscr{A} \oplus \mathscr{A}', \mu \oplus \mu')$ un automorphisme τ_Φ, à partir de l'ordre de succession des points $(x, 0)$ et $\Phi^{-1}(x', 0)$ sur une orbite du flot T_t.

τ et τ' apparaissent comme les induits de τ_Φ sur des parties de $\Omega \otimes \Omega'$, ce qu'avait noté Kakutani [8]. Les fonctions $\tilde{f} = \begin{cases} f \text{ sur } \Omega \\ 0 \text{ sur } \Omega' \end{cases}$ et $\tilde{g}$, définie de manière analogue, sont alors homologues pour l'automorphisme τ_Φ.

L'homologie des fonctions f et g, sur l'espace $\Omega \oplus \Omega'$ et pour un automorphisme ayant τ et τ' pour induits, est donc nécessaire et suffisante pour que les flots spéciaux correspondants soient isomorphes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. AMBROSE et S. KAKUTANI, Structure and continuity of measurable flows. *Duke Math. J.*, t. **9**, 1942, p. 25-42.

[2] A. CONNES, Communication personnelle.

[3] R. V. CHACON, Change of velocity in flows. *J. Math. and Mech.*, t. **16**, 5, 1966, p. 417-421.

[4] A. CONNES et M. TAKESAKI, Flots des poids sur les facteurs de type III. *CRAS Paris*, t. **278**, A, 1974, p. 945.

[5] N. A. FRIEDMAN, *Introduction to Ergodic Theory*. Van Nostrand Reinhold, 1970.

[6] B. M. GUREVIČ, Construction of increasing partitions for special flows. *Theory of Prob. and its Applications*, t. X, 4, 1965, p. 627.

[7] A. HANEN, Processus ponctuels stationnaires et flots spéciaux. *Annales de l'I. H. Poincaré*, t. **7**, 1971, p. 23-30.

[8] S. KAKUTANI, Induced measure-preserving transformations. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, t. **19**, 1943, p. 635.

[9] U. KRENGEL, Entropy of Conservative Transformations. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie u. v. Gebiete*, t. **7**, 1967, p. 161-181.

[10] W. KRIEGER, On Ergodic Flows and the Isomorphism of Factors. *A paraître*.

[11] J. DE SAM LAZARO et P. A. MEYER, Questions de théorie des flots (Sém. Prob. Univ. Strasbourg, 71-72). *A paraître : Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie u. v. Geb.*

(Manuscrit reçu le 7 février 1975)