Annales de l'I. H. P., section B

J. Neveu

Sur l'espérance conditionnelle par rapport à un mouvement brownien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, nº 2 (1976), p. 105-109

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_2_105_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XII, n° 2, 1976, p. 105-109. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur l'espérance conditionnelle par rapport à un mouvement brownien

par

J. NEVEU (*)

RÉSUMÉ. — L'objet de cette note est de retrouver par une méthode d'intégration stochastique en même temps que de généraliser un résultat récent de Nelson (corollaire 2 ci-dessous) concernant les espérances conditionnelles de variables gaussiennes qu'il ne semble curieusement pas possible de prouver par une méthode plus élémentaire.

SUMMARY. — The method of stochastic integration allows us to give a new proof and also to generalize a recent result due to Nelson on conditional expectations of gaussian variables that does not seem to admit an elementary proof.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité et soit $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_t, t \in R_+)$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathscr{A}$. Soient $(\xi_t, t \in R_+)$ et $(\eta_t, t \in R_+)$ deux mouvements browniens relativement à $\mathscr{B}$; ceci signifie que ξ et η sont deux fonctions aléatoires à trajectoires continues, telles que ξ_t (resp. η_t) soit $\mathscr{B}_t$-mesurable pour tout $t \in R_+$ et que $\xi_t - \xi_s$ (resp. $\eta_t - \eta_s$) soit indépendante de $\mathscr{B}_s$ pour tous $s < t$ dans R_+. Dans la théorie des martingales, on montre que cela revient à supposer que ξ et η sont deux $\mathscr{B}$-martingales de carrés intégrables à trajectoires continues telles que $(\xi_t^2 - t, t \in R_+)$ et $(\eta_t^2 - t, t \in R_+)$ soient aussi des $\mathscr{B}$-martingales. De plus il existe une fonction aléatoire réelle $\mathscr{B}$-progressivement mesurable $(\rho_t, t \in R_+)$ à valeurs dans $[-1, +1]$, unique à une dtdP équivalence près sur $R_+ \times \Omega$, telle

(*) Membre du Laboratoire Associé au C. N. R. S. (n° 224) « Processus stochastiques et applications ».

que $\left(\xi_t\eta_t - \int_0^t \rho_s ds,\ t \in \mathrm{R}_+\right)$ soit une $\mathscr{B}$-martingale intégrable ; on pourra appeler cette fonction aléatoire la corrélation instantanée des deux mouvements browniens.

Désignons par $\mathscr{I}_t(t \in \mathrm{R}_+)$ et $\mathscr{I}$, resp. $\mathscr{G}_t(t \in \mathrm{R}_+)$ et $\mathscr{G}$ les sous-tribus de $\mathscr{B}_t(t \in \mathrm{R}_+)$ et $\mathscr{A}$ engendrées par les variables aléatoires ξ_s ($s \leq t$ ou $s \in \mathrm{R}_+$), resp. η_s ($s \leqslant t$ ou $s \in \mathrm{R}_+$). Notons que les propriétés d'indépendance du mouvement brownien ξ relativement à $\mathscr{B}$ entraînent l'égalité des espérances conditionnelles $\mathrm{E}^{\mathscr{B}_t}$ et $\mathrm{E}^{\mathscr{I}_t}$ sur $\mathrm{L}^1(\mathscr{I})$ pour tout $t \in \mathrm{R}_+$, si $\mathrm{L}^1(\mathscr{I})$ désigne le sous-vectoriel fermé de $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ formé par les classes d'équivalence de variables aléatoires $\mathscr{I}$-mesurables intégrables. De même $\mathrm{E}^{\mathscr{B}_t} = \mathrm{E}^{\mathscr{G}_t}$ sur $\mathrm{L}^1(\mathscr{G})$ pour tout $t \in \mathrm{R}_+$.

Considérons alors l'opérateur $\mathrm{T} : \mathrm{L}^1(\mathscr{I}) \to \mathrm{L}^1(\mathscr{G})$ égal à la restriction au premier espace de l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}^{\mathscr{G}}$. D'après les propriétés classiques des espérances conditionnelles, l'opérateur T est aussi par restriction une application linéaire de norme 1 de $\mathrm{L}^p(\mathscr{I})$ dans $\mathrm{L}^p(\mathscr{G})$ pour tout $p \in [1, \infty]$. L'objet de la proposition suivante est d'améliorer ce résultat en introduisant une hypothèse sur la corrélation des deux mouvements browniens.

PROPOSITION 1. — *Si* $|\rho_t(\omega)| \leq r$ $[dtd\mathrm{P}]$ *presque partout sur* $\mathrm{R}_+ \times \Omega$ *pour un réel* $r \in [0, 1]$ *et si* $p, q \in [1, \infty]$ *sont deux réels tels que* $p - 1 \geq r^2(q-1)$ *alors l'opérateur* T *définit par restriction une application linéaire de norme* 1 *de l'espace* $\mathrm{L}^p(\mathscr{I})$ *dans* $\mathrm{L}^q(\mathscr{G})$.

Démonstration. — Il n'y a à considérer que le cas où $p, q \in]1, \infty[$. Compte tenu de la densité de $\mathrm{L}^\infty(\mathscr{I})$ dans $\mathrm{L}^p(\mathscr{I})$ pour tout p, il suffit de démontrer que $\|\mathrm{T}(\mathrm{X})\|_q \leq \|\mathrm{X}\|_p$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^\infty(\mathscr{I})$ et comme T est un opérateur linéaire positif (de sorte que $|\mathrm{T}(\mathrm{X})| \leq \mathrm{T}(|\mathrm{X}|)$) il suffit déjà de démontrer l'inégalité précédente lorsque $\mathrm{X} \in \mathrm{L}_+^\infty(\mathscr{I})$. A cet effet, il suffira encore d'après la théorie de la dualité des espaces L^q, d'établir que

$$\mathrm{E}[\mathrm{T}(\mathrm{X}).\mathrm{Y}] \leq \|\mathrm{X}\|_p \, \|\mathrm{Y}\|_{q'}$$

pour tous $\mathrm{X} \in \mathrm{L}_+^\infty(\mathscr{I})$, $\mathrm{Y} \in \mathrm{L}_+^\infty(\mathscr{G})$ en désignant par q' l'indice conjugué de q défini par $(q' - 1)(q - 1) = 1$ (i. e. par $1/q + 1/q' = 1$). Enfin il suffira même d'établir cette égalité lorsque $a \leq \mathrm{X} \leq b$ et $a \leq \mathrm{Y} \leq b$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathscr{I})$ et $\mathrm{L}^\infty(\mathscr{G})$ resp., pour deux constantes a, b quelconques telles que $0 < a < b < \infty$. Notons aussi que $\mathrm{E}[\mathrm{T}(\mathrm{X})\mathrm{Y}] = \mathrm{E}(\mathrm{XY})$ d'après la définition de projecteur orthogonal de T.

Étant donné $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^\infty(\mathscr{I})$ telle que $a \leq \mathrm{X} \leq b$ $(0 < a < b < \infty)$, formons la $\mathcal{F}$-martingale $M_t = E^{\mathcal{F}_t}(X^p)$ $(t \in R_+)$. Il en existe une version à trajectoires continues représentable par une intégrale stochastique :

$$M_t = M_0 + \int_0^t \phi_s d\xi_s \qquad (t \in R_+)$$

avec $M_0 = E(X^p)$, pour une fonction aléatoire ϕ progressivement mesurable relativement à $\mathcal{F}$ et de carré intégrable par rapport à $dtdP$ sur $R_+ \times \Omega$. Observons que $a^p \leq M_t \leq b^p$ $(t \in R_+)$ p. s. et que $(M_t, t \in R_+)$ est aussi une $\mathcal{B}$-martingale puisque $E^{\mathcal{B}_t} = E^{\mathcal{F}_t}$ sur $L^2(\mathcal{F})$. Semblablement si on donne $Y \in L^\infty(\mathcal{G})$ telle que $a \leq Y \leq b$, il existe une version continue de la $\mathcal{G}$-martingale $(N_t = E^{\mathcal{G}_t}(Y^{q'}), t \in R_+)$ représentable par une intégrable stochastique

$$N_t = N_0 + \int_0^t \psi_s d\eta_s \qquad (t \in R_+)$$

pour une fonction aléatoire ψ progressivement mesurable relativement à $\mathcal{G}$ et de carré intégrable relativement à $dtdP$; de plus $a^{q'} \leq N_t \leq b^{q'}$ et N est aussi une $\mathcal{B}$-martingale.

Appliquons la formule de dérivation stochastique de Ito aux deux $\mathcal{B}$-martingales M et N et à la fonction $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ $(\alpha = 1/p, \beta = 1/q')$ qui est une fonction de classe C^2 sur le compact $[a^p, b^p] \times [a^{q'}, b^{q'}]$ où (M_t, N_t) prend ses valeurs $(t \in R_+)$. Il vient ainsi

$$d(M_t^\alpha N_t^\beta) = (\alpha M_t^{\alpha-1} N_t^\beta dM_t + \beta M_t^\alpha N_t^{\beta-1} dN_t) + \frac{1}{2} M_t^\alpha N_t^\beta A_t dt$$

où

$$A_t = \alpha(\alpha-1)\left(\frac{\phi_t}{M_t}\right)^2 + 2\alpha\beta \frac{\phi_t}{M_t} \cdot \frac{\psi_t}{N_t} \rho_t + \beta(\beta-1)\left(\frac{\psi_t}{N_t}\right)^2 .$$

Le premier terme du second membre de la formule précédente est une martingale bornée dans L^2 car il en est ainsi de M resp. N et car les fonctions aléatoires $\alpha M_t^{\alpha-1} N_t^\beta$ resp. $\beta M_t^\alpha N_t^{\beta-1}$ sont bornées sur $R_+ \times \Omega$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & E(XY) - \|X\|_p \|Y\|_{q'} \\ &= E(M_\infty^\alpha N_\infty^\beta) - E(M_0^\alpha N_0^\beta) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dt E[M_t^\alpha N_t^\beta A_t] \end{aligned}$$

Or si $\alpha(\alpha-1) . \beta(\beta-1) \geq (\alpha\beta\rho_t)^2 [dtdP]$ presque partout, l'expression $A_t(\omega)$ est p. p. du même signe que $\alpha(\alpha-1)$, c'est-à-dire négative ; nous avons donc démontré que lorsque $\rho_t^2 \leq (1-1/\alpha)(1-1/\beta)$ c'est-à-dire lorsque

$\rho_t^2 \leq (p-1)(q'-1)$ presque partout l'inégalité $E(XY) - \| X \|_p \| Y \|_{q'} \leqslant 0$ a lieu. ■

Le corollaire suivant se trouve dans [2]

COROLLAIRE 2. — *Soit (ξ, η) un vecteur gaussien centré bi-dimensionnel tel que $E(\xi^2) = 1 = E(\eta^2)$ et $E(\xi\eta) = \rho$ et soit $g(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$ la densité gaussienne réduite sur R. Si p, q sont deux réels dans $[1, \infty[$, l'opérateur linéaire U de $L^1(R, gdx)$ dans lui-même défini par l'espérance conditionnelle*

$$Uf \circ \eta = E[f \circ \xi \mid \eta] \qquad (f \in L^1(R, gdx))$$

envoie continûment $L^p(gdx)$ dans $L^q(gdx)$ si et seulement si $p - 1 \geq \rho^2(q-1)$. Lorsque cette condition est satisfaite la norme $\| U \|_{L^p, L^q}$ vaut 1.

Démonstration. — Soit $((\xi_t, \xi_t') ; t \in R_+)$ un mouvement brownien bi-dimensionnel défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et soit $(\mathscr{B}_t, t \in R_+)$ la famille croissante des tribus que ce processus engendre (tribus propres). Étant donné un réel ρ dans $[-1, +1]$, posons

$$\eta_t = \rho\xi_t + (1-\rho^2)^{1/2}\xi_t' \qquad (t \in R_+) ;$$

alors $(\xi_t, t \in R_+)$ et $(\eta_t, t \in R_+)$ sont deux mouvements browniens relativement à $(\mathscr{B}_t, t \in R_+)$ et la fonction aléatoire $(\xi_t\eta_t - \rho t, t \in R_+)$ est une $\mathscr{B}$-martingale de sorte que la proposition précédente s'applique ; d'autre part (ξ_1, η_1) est un vecteur gaussien centré tel que $E(\xi_1^2) = 1 = E(\eta_1^2)$, $E(\xi_1\eta_1) = \rho$.

Comme la variable aléatoire ξ_1 et la tribu $\mathscr{G}$ engendrée par $(\eta_t, t \in R_+)$ sont indépendantes conditionnellement en η_1, nous avons

$$Uf \circ \eta_1 = E[f \circ \xi_1/\eta_1] = E[f \circ \xi_1 \mid \mathscr{G}] = T(f \circ \xi_1)$$

et il résulte donc de la proposition précédente que

$$\| Uf \|_{L^q(g.dx)} = \| Uf \circ \eta_1 \|_{L^q(P)} \leq \| f \circ \xi_1 \|_{L^p(P)} = \| f \|_{L^p(g.dx)}$$

si $f \in L^p(gdx)$ et $p - 1 \geq \rho^2(q-1)$.

Inversement supposons que $p - 1 < \rho^2(q-1)$. Pour tout réel λ, soit e_λ la fonction exponentielle $e_\lambda(x) = \exp(\lambda x - \lambda^2/2)$. Alors $E(e_\lambda \circ \xi_1) = 1$ pour tout $\lambda \in R$ et la formule $[e_\lambda]^p = e_{\lambda p} \exp[p(p-1)\lambda^2/2]$ entraîne que

$$\| e_\lambda \|_{L^p(g.dx)} = \| e_\lambda \circ \xi_1 \|_{L^p(P)} = \exp[(p-1)\lambda^2/2] .$$

D'autre part on vérifie sans peine que $Ue_\lambda = e_{\lambda\rho}$ pour tout $\lambda \in R$ et il s'ensuit que

$$\frac{\| Ue_\lambda \|_q}{\| e_\lambda \|_p} = \exp \frac{1}{2}[(q-1)(\lambda\rho)^2 - (p-1)\lambda^2] \qquad (\lambda \in R) .$$

Mais si $\rho^2(q-1) > p-1$, l'expression précédente tend vers $+\infty$ lorsque $\lambda^2 \to \infty$ et ceci montre que U ne peut être un opérateur borné de L^p dans L^q. ■

Remarque. — La formule suivante explicite l'opérateur U du corollaire précédent :

$$Uf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\rho x + \sqrt{1-\rho^2}y)g(y)dy$$

et on s'attendrait donc à pouvoir démontrer que $\| Uf \|_q \leq \| f \|_p$ si $p - 1 \geq \rho^2(q-1)$ par une utilisation convenable des inégalités de Hölder. Je n'ai pu arriver ainsi qu'à démontrer que $U : L^p \to L^q$ est un opérateur borné sous la condition précédente mais pas que U est de norme 1.

Je remercie MM. S. MARTIN et C. PERAY dont le travail de troisième cycle m'a incité à démontrer la proposition 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. V. SKOROKHOD, *Studies in the theory of random processes*. Addison Welsey, 1965.
[2] E. NELSON, Quantum fields and Markov fields. *Amer. Math. J.*, 1971.

(Manuscrit reçu le 12 mai 1976)