ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PAOLO BALDI
PHILIPPE BOUGEROL
PIERRE CREPEL

Théorème central limite local sur les extensions compactes de $\mathbb{R}^d$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, nº 1 (1978), p. 99-111
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_1_99_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIV, n° 1, 1978, p. 99-111. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Théorème central limite local sur les extensions compactes de $\mathbb{R}^d$

par

Paolo BALDI (*), Philippe BOUGEROL (**) et Pierre CREPEL (***)

ABSTRACT. — The behaviour of $\int f d\mu^n$ is studied where μ is a probability measure on the group of euclidean motions and f is continuous with compact support. Three results on ratio limit theorem and recurrence, previously proved by Crepel, Guivarc'h, Lepage, become immediate consequences of this study. Noncommutative Fourier transform is the technical framework.

INTRODUCTION

Plusieurs auteurs [*8*] [*10*] se sont intéressés à l'étude du rapport $\dfrac{\int f d\mu^{n*}}{\int h d\mu^{n*}}$ lorsque f et h sont des fonctions continues à support compact et μ une probabilité sur le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$.

L'article qui suit se rapporte au même problème : il vise en particulier à donner sous des conditions assez larges, un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de $\int f d\mu^n$, pour ce même groupe.

(*) Istituto di Matematica « L. Tonelli », Via Derna 1, 56100 Pisa (Italie).
(**) U. E. R. de Mathématique de l'Université de Paris VII, 2, place Jussieu, 75230 Paris, Cedex 05.
(***) Département de Mathématique et Informatique de l'Université de Rennes, avenue du Général Leclerc, B. P. 25A, 35031 Rennes Cedex.

On dira qu'une probabilité μ sur un groupe G est :

— *adaptée :* si le plus petit sous-groupe fermé engendré par le support de μ est G tout entier,

— *apériodique :* si μ n'est pas portée par une classe d'un sous-groupe fermé distingué de G et si μ est adaptée,

— *étalée :* s'il existe une puissance de convolution de μ, soit μ^{n_0}, qui ne soit pas étrangère à la mesure de Haar sur G.

Notons $O(d) \times_\sigma \mathbb{R}^d$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^d$. Dans la suite G désignera un sous-groupe du précédent, de la forme $K \times_\sigma \mathbb{R}^d$, où K est un sous-groupe fermé de $O(d)$, agissant de façon irréductible sur $\mathbb{R}^d$.

On dira qu'une probabilité μ sur $G = K \times_\sigma \mathbb{R}^d$ est *vectoriellement apériodique* si, $\left(\mu = \int_K \mu_k d\bar{\mu}(k)\right.$ étant une désintégration de μ de base K et $\{ k \} \times B_k$ étant le support de μ_k), l'ensemble des $k \in K$ tels que le sous-espace affine engendré par B_k soit de dimension d, n'est pas $\bar{\mu}$-négligeable.

THÉORÈME CENTRAL LIMITE (rappel) cf. [*15*] [*6*] [*14*] [*2*]

0.1. *Soit* (U_n, Y_n) *une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées à valeurs dans* $G = K \times_\sigma \mathbb{R}^d$ *telles que*

a) $E \| Y_1 \|^2 < \infty$

b) *la loi de* U_1 *est adaptée sur* K.

Alors si l'on pose :

$$\sigma^2 = d^{-1} \{ E \| Y_1 \|^2 + 2 \operatorname{tr} [(I - EU_1)^{-1} . EY_1 . E(Y_1^t U_1)] \},$$

la suite $\dfrac{Y_1 + U_1 Y_2 + \ldots + U_1 U_2 \ldots U_{n-1} Y_n}{\sqrt{n}}$ *converge en loi vers* $n(0, \sigma^2 I)$, *c'est-à-dire la loi normale centrée de covariance* $\sigma^2 I$.

0.2. *Si, de plus, la loi de* U_1 *est apériodique sur* K, *alors le couple*

$$\left(U_1 \ldots U_n, \frac{Y_1 + \ldots + U_1 \ldots U_{n-1} Y_n}{\sqrt{n}} \right)$$

tend en loi vers le produit de la mesure de Haar sur K *et de la loi normale* $n(0, \sigma^2 I)$ *sur* $\mathbb{R}^d$.

A. REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES $O(d) \times_\sigma \mathbb{R}^d$

Nous ne cherchons pas dans ce paragraphe à faire une étude complète des représentations unitaires des groupes $O(d) \times_\sigma \mathbb{R}^d$ mais établissons les outils qui nous seront nécessaires par la suite.

1. Définition

Soit G un sous-groupe de $O(d) \times_\sigma \mathbb{R}^d$ de la forme $K \times_\sigma \mathbb{R}^d$ où K est un sous-groupe fermé de $O(d)$. Soit m_K la mesure de Haar normalisée de K et m_G la mesure de Haar de G. Pour tout élément ζ de $\mathbb{R}^d$ et tout élément g de G on définit l'opérateur linéaire $T_g^\zeta : L^2(K, m_K) \to L^2(K, m_K)$ par :
Si $g = (k, x) \in K \times \mathbb{R}^d$, $\varphi \in L^2(K, m_K)$, $u \in K$

$$(T_g^\zeta \varphi)(u) = \varphi(k^{-1}u) \exp i \langle \zeta, u^{-1}x \rangle$$

On pose alors, si f est un élément de $L^1(G, m_G)$ et μ une probabilité sur G muni de sa tribu borélienne :

$$(T_f^\zeta \varphi)(u) = \int T_g^\zeta(u) f(g) dm_G \, ; \qquad (T_\mu^\zeta \varphi)(u) = \int T_g^\zeta \varphi(u) d\mu(g)$$

Alors, pour tout élément ζ de $\mathbb{R}^d$, $\{ T_g^\zeta, g \in G \}$ définit une représentation unitaire de G, i. e. pour tout couple (g, g') de G^2.
. T_g^ζ *est un opérateur unitaire sur* $L^2(K)$.
. $T_{gg'}^\zeta = T_g^\zeta T_{g'}^\zeta$.
Si μ et ν sont deux probabilités sur G, si $\check{\mu}$ désigne l'image de μ par l'application qui à g associe g^{-1}, si pour tout opérateur A, A désigne l'adjoint de A, alors*

$$\| T_\mu^\zeta \| \leq 1, \qquad T_{\mu * \nu}^\zeta = T_\mu^\zeta T_\nu^\zeta, \qquad T_{\check{\mu}}^\zeta = (T_\mu^\zeta)^*$$

2. Lemme fondamental

Le lemme suivant sera l'un des outils principaux pour toute la suite.

LEMME 1. — *Soit G un sous-groupe de $O(d) \times_\sigma \mathbb{R}^d$ de la forme $K \times_\sigma \mathbb{R}^d$ où K est un sous-groupe fermé de $O(d)$, $\{ T_g^\zeta, g \in G, \zeta \in \mathbb{R}^d \}$ le système de représentations unitaires introduit au 1.*

Si μ est une probabilité sur G vectoriellement apériodique alors : il existe une constante a strictement positive et un voisinage U de l'origine dans $\mathbb{R}^d$ tels que :

$$\forall \zeta \in U, \qquad \| T_\mu^\zeta \| \leq \exp(-a \| \zeta \|^2)$$

Démonstration. — Soit $\mu = \int_U \mu_k d\bar{\mu}(k)$ une désintégration de μ de base K. Puisque μ_k est une probabilité portée par $\{ k \} \times \mathbb{R}^d$ il existe une probabilité η_k sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\mu_k = \delta_k \otimes \eta_k$ (δ_k désigne la masse de Dirac au point k de K). On notera $\hat{\eta}_k(t)$ la quantité $\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} d\eta_k(x)$ c'est-à-dire la transformée de Fourier de η_k au point t de $\mathbb{R}^d$.

Si φ est un élément de $L^2(K)$ et ζ un élément de $\mathbb{R}^d$ on a :

$$\| T_\mu^\zeta \varphi \|_{L^2}^2 = \int_K \left| \int_G e^{i\langle \zeta, u^{-1}x\rangle} \varphi(k^{-1}u) d\mu(k, x) \right|^2 du$$

$$= \int_K \left| \int_K \left\{ \int_G e^{i\langle \zeta, u^{-1}x\rangle} \varphi(k^{-1}u) d\mu_k(k, x) \right\} d\bar{\mu}(k) \right|^2 du$$

$$= \int_K \left| \int_K \left\{ \varphi(k^{-1}u) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \zeta, u^{-1}x\rangle} d\eta_k(x) \right\} d\bar{\mu}(k) \right|^2 du$$

$$\leq \int_K \left\{ \int_K |\hat{\eta}_k(u\zeta)|^2 d\bar{\mu}(k) \right\} \left\{ \int_K |\varphi(k^{-1}u)|^2 d\bar{\mu}(k) \right\} du$$

$$\leq \|\varphi\|_{L^2}^2 \operatorname{Sup}_{u\in K} \int_K |\hat{\eta}_k(u\zeta)|^2 d\bar{\mu}(k)$$

donc

$$\| T_\mu^\zeta \|^2 \leq \operatorname{Sup}_{u\in K} \int_K |\hat{\eta}_k(u\zeta)|^2 d\bar{\mu}(k) \quad (1)$$

Rappelons alors que si ν est une probabilité sur $\mathbb{R}^d$ telle que le plus petit sous-espace vectoriel engendré par le support de ν est $\mathbb{R}^d$ il existe une constante $c > 0$, et un voisinage V de 0 tels que

$$\operatorname{Re}(1 - \hat{\nu}(t)) \geq c \| t \|^2 \qquad \text{sur V}$$

(Revuz (*13*], III, prop. 5.6).

Si η est une probabilité sur $\mathbb{R}^d$ dont le support n'est contenu dans aucun hyperplan affine on peut appliquer ce résultat à $\nu = \check{\eta} * \eta$ pour obtenir que

$$1 - |\hat{\eta}(t)|^2 \geq c \| t \|^2 \qquad \text{sur V}$$

Posons alors, si $V_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \| x \| \leq \frac{1}{n} \right\}$, pour m et n entiers

$$A_{m,n} = \left\{ k \in K \text{ t. q. } |\eta_k(t)|^2 \leq 1 - \frac{1}{m} \| t \|^2, \quad \forall t \in V_n \right\}$$

Puisque μ est vectoriellement apériodique $\bar{\mu}\left(\bigcup_{m,n} A_{m,n} \right)$ est non nul. On peut donc choisir deux entiers m_0 et n_0 tels que $\bar{\mu}(A_{m_0,n_0})$ est non nul. On a alors, en utilisant (1), si $\zeta \in V_{n_0}$

$$\| T_\mu^\zeta \|^2 \leq \int_{A^c_{m_0,n_0}} d\bar{\mu}(k) + \operatorname{Sup}_u \int_{A_{m_0,n_0}} |\hat{\eta}_k(u\zeta)|^2 d\bar{\mu}(k)$$

$$\leq 1 - \frac{\bar{\mu}(A_{m_0,n_0})}{m} \| \zeta \|^2 \leq \exp\left(- \frac{\bar{\mu}(A_{m_0,n_0})}{m} \| \zeta \|^2 \right)$$

ce qui démontre le lemme. ■

Nous aurons aussi besoin d'inégalités sur $\| T_\mu^\zeta \|$ précisant le lemme 1 dans un cas particulier :

LEMME 2. — *Si μ est une probabilité sur $G = K \times_\sigma \mathbb{R}^d$ non étrangère à la mesure de Haar de* G, *alors*

(i) *Pour tout compact* C *de $\mathbb{R}^d$ ne contenant pas l'origine,* $\sup_{\zeta \in C} \| T_\mu^\zeta \|$ *est strictement inférieur à un.*

(ii) *Il existe un voisinage* U *de l'origine dans $\mathbb{R}^d$ et une constante a strictement positive tels que :*

$$\forall \zeta \in U, \qquad \| T_\mu^\zeta \| \leq \exp(- a \| \zeta \|^2)$$

Démonstration. — On reprend les notations du lemme 1. Si $\{ k \} \times B_k$ est le support de μ_k et si m est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$, $m(B_k)$ ne peut pas être nul $\bar{\mu}$ presque sûrement. Sinon si $A = \{ k \text{ t. q. } m(B_k) = 0 \}$, $\bigcup_k \{ k \} \times B_k$ étant un borélien, A est un borélien par le théorème de Fubini, la mesure de Haar de $\bigcup_{k \in A} \{ k \} \times B_k$ est nulle, alors que $\bigcup_{k \in A} \{ k \} \times B_k$ porte μ ce qui est absurde.

Il est donc clair que μ est vectoriellement apériodique ce qui établit (*ii*) d'après le lemme 1.

Pour montrer le (*i*) remarquons que si $m(B_k)$ n'est pas nul la probabilité $\eta_k * \check{\eta}_k$ est adaptée à $\mathbb{R}^d$ donc $| \hat{\eta}_k(t) |$ ne peut valoir un que si t est nul. Puisque $\hat{\eta}_k(t)$ est une fonction continue de t, si C est un compact de $\mathbb{R}^d$ ne contenant pas l'origine et invariant par rotation

$$\begin{aligned} \operatorname*{Sup}_{y \in C} \operatorname*{Sup}_{u \in K} \int | \hat{\eta}_k(uy) |^2 d\bar{\mu}(k) &\leq \operatorname*{Sup}_{y \in C} \int_{A^c} | \hat{\eta}_k(y) |^2 d\bar{\mu}(k) + \bar{\mu}(A) \\ &\leq \int_{A^c} \operatorname*{Sup}_{y \in C} | \hat{\eta}_k(y) |^2 d\bar{\mu}(k) + \bar{\mu}(A) < 1 \end{aligned}$$

la relation (1) du lemme 1 montre alors (*i*). ■

B. FORMULE DE PLANCHEREL

Bien que l'on puisse déduire la proposition 3 du théorème 4.4 de [*9*], nous préférons en donner une démonstration élémentaire.

Nous utiliserons, sans les rappeler, les résultats sur les représentations des groupes compacts exposés, par exemple, dans le chapitre II de (Pukanszky [*12*]).

Soit $(U^{(n)}, n \in \mathbb{N})$ un système complet de représentations unitaires irréductibles non équivalentes du groupe compact K. Si $U^{(n)}$ est à valeurs dans les isomorphismes linéaires de $\mathbb{C}^{d_n}$ notons $(e_{i,j}^{(n)}(g))_{1\leq i,j\leq d_n}$ une matrice représentative de $U^{(n)}(g)$ dans une base fixée de $\mathbb{C}^{d_n}$, si g est un élément de K.

Puisque $U^{(n)}(kk')$ est égal à $U^{(n)}(k)U^{(n)}(k')$ et $U^{(n)}(k^{-1})$ est égal à $\{U^{(n)}(k)\}^*$, si k et k' sont des éléments de K on a

$$(1)\qquad e_{i,j}^{(n)}(kk') = \sum_{m=1}^{d_n} e_{i,m}^{(n)}(k)e_{m,j}^{(n)}(k') \qquad \forall 1 \leq i,\ j \leq d_n$$

$$(2)\qquad e_{i,j}^{(n)}(k^{-1}) = \overline{e_{j,i}^{(n)}(k)}$$

On appellera polynôme trigonométrique sur K toute combinaison linéaire finie des $\{e_{i,j}^{(n)}\}$. D'après le théorème de Peter-Weyl, le système $\{\sqrt{d_n}\,e_{i,j}^{(n)}\}_{n,i,j}$ forme une base orthonormale de $L^2(K)$ (K étant muni de sa mesure de Haar) et toute fonction sur G continue est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Rappelons alors que si $\{f_n,\ n\in\mathbb{N})$ est une base orthogonale de $L^2(K)$ et si A est un opérateur de $L^2(K)$ tel que la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle Af_n, f_n\rangle|$ converge, on dit que A est traçable et on définit la trace de A par

$$\operatorname{tr} A = \sum_{n=0}^{\infty} \langle Af_n, f_n\rangle$$

(Ces définitions sont indépendantes de la base choisie).

Voici la « formule de Plancherel » qui sera utile au paragraphe C.

PROPOSITION 3. — *Soit f une application de G dans $\mathbb{R}$ du type $f(k, x) = g(k)h(x)$ (si k est un élément de K et x un élément de $\mathbb{R}^d$) où g est un polynôme trigonométrique sur K et h une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}^d$ de transformée de Fourier $\hat{h}$ à support compact.*

Si μ est une probabilité sur G, pour tout ζ de $\mathbb{R}^d$, $T_{\check{\mu}}^{\zeta}T_f^{\zeta}$ est un opérateur traçable sur $L^2(K)$ et

$$\int f\,d\mu = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{tr}(T_{\check{\mu}}^{\zeta}T_f^{\zeta})d\zeta$$

($\check{\mu}$ désigne l'image de μ par $g \to g^{-1}$).

Démonstration. — Par linéarité il suffit de considérer le cas où $g(k) = e_{i,j}^{(n)}(k)$.

Remarquons d'abord que si ϕ est un élément de $L^2(K)$,

$$\text{(3)} \qquad T_f^\zeta \phi(u) = \hat{h}(u.\zeta) \int_K g(k)\phi(k^{-1}u)dk \qquad \text{pour tout } u \text{ de } K.$$

donc

$$T_f^\zeta e_{i_0,j_0}^{(n_0)}(u) = \hat{h}(u\zeta) \int e_{i,j}^{(n)}(k) e_{i_0,j_0}^{(n_0)}(k^{-1}u)dk$$

soit, à l'aide de (1) et (2)

$$\text{(4)} \qquad T_f^\zeta e_{i_0,j_0}^{(n_0)}(u) = \sum_{m=1}^{d_{n_0}} \hat{h}(u\zeta) e_{m,j_0}^{(n_0)} \langle e_{i,j}^{(n)}, e_{m,i_0}^{(n_0)} \rangle$$

En particulier, $T_f^\zeta e_{i_0,j_0}^{(n_0)}$ est identiquement nul sauf pour un nombre fini de (n_0, i_0, j_0) ce qui prouve que $T_{\check{\mu}}^\zeta T_f^\zeta$ est un opérateur traçable. Calculons sa trace :

$$T_{\check{\mu}*f}^\zeta e_{i_0,j_0}^{(n_0)}(u) = \int_G e^{i\langle \zeta, u^{-1}x\rangle} (\check{\mu} * f)(k, x) e_{i_0,j_0}^{(n_0)}(k^{-1}u)dkdx$$
$$= \int_G e^{i\langle \zeta, u^{-1}x\rangle} e_{i_0,j_0}^{(n_0)}(k^{-1}u) \left\{ \int_G g(k'k)h(x' + k'x)\mu(dk', dx') \right\} dkdx$$

donc

$$T_{\check{\mu}}^\zeta T_f^\zeta e_{i_0,j_0}^{(n_0)}(u) = \sum_{m=1}^{d_{n_0}} \int_{G\times\mathbb{R}^d} e^{i\langle \zeta, u^{-1}x\rangle} h(x' + k'x) e_{m,j_0}^{(n_0)}(u)$$
$$\left\{ \int_K g(k'k)\overline{e_{m,i_0}^{(n_0)}}(k)dk \right\} d\mu(k', x')dx$$

Le système $\{ \sqrt{d_n} e_{i,j}^{(n)}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq d_n \}$ étant une base orthonormale de $L^2(K)$ on peut écrire :

$$\operatorname{tr} T_{\check{\mu}}^\zeta T_f^\zeta = \sum_{n_0,i_0,j_0} d_{n_0} \langle T_{\check{\mu}}^\zeta T_f^\zeta e_{i_0,j_0}^{(n_0)}, e_{i_0,j_0}^{(n_0)} \rangle$$
$$= \sum_{n_0,i_0,j_0} \sum_{m=1}^{d_{n_0}} d_{n_0} \int e^{i\langle \zeta, u^{-1}x\rangle} h(x' + k'x) \overline{e_{i_0,j_0}^{(n_0)}(u)} e_{m,j_0}^{(n_0)}(u)$$
$$\left\{ \int_K g(k'k)\overline{e_{m,i_0}^{(n_0)}}(k)dk \right\} d\mu(k', x')dxdu$$

(La série n'ayant en fait qu'un nombre fini de termes non nuls).

Remarquons alors que les relations (1) et (2) montrent que :

$$\sum_{j_0=1}^{d_{n_0}} e_{m,j_0}^{(n_0)}(u)\overline{e_{i_0,j_0}^{(n_0)}}(u) = \delta_{m,i_0} \qquad \text{(symbole de Kronecker)}$$

et que :

$$\sum_{n_0, i_0} d_{n_0} \int g(k'k)\overline{e^{(n_0)}_{i_0,i_0}}(k)dk = g(k')$$

En utilisant ces deux égalités on voit donc que

$$\operatorname{tr} \mathrm{T}^{\zeta}_{\check{\mu}}\mathrm{T}^{\zeta}_{f} = \int e^{i\langle u^{-1}x,\zeta\rangle} h(x' + k'x)g(k')d\mu(k', x')dudx$$
$$= \int (\check{\mu} * f)(e, x)e^{i\langle u\zeta, x\rangle}dxdu$$

soit

$$\operatorname{tr} \mathrm{T}^{\zeta}_{\check{\mu}}\mathrm{T}^{\zeta}_{f} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle\zeta,x\rangle} \left\{ \int_{\mathrm{K}} (\check{\mu} * f)(e, ux)du \right\} dx$$

La fonction $\hat{h}$ étant par hypothèse à support compact la relation (4) montre que, tr $\mathrm{T}^{\zeta}_{\check{\mu}}\mathrm{T}^{\zeta}_{f}$ est une fonction de ζ à support compact. Étant continue elle est intégrable et on peut appliquer le théorème d'inversion de Fourier pour obtenir :

$$\int_{\mathrm{K}} (\check{\mu} * f)(e, ux)du = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\zeta\rangle} \operatorname{tr} \mathrm{T}^{\zeta}_{\check{\mu}}\mathrm{T}^{\zeta}_{f} d\zeta .$$

pour tout x de $\mathbb{R}^d$. En prenant x nul on obtient la proposition. ■

C. THÉORÈME CENTRAL LIMITE LOCAL

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mathrm{G} = \mathrm{K} \times_{\sigma} \mathbb{R}^d$ *un sous-groupe de* $\mathrm{O}(d) \times_{\sigma} \mathbb{R}^d$ *tel que* K *soit un sous-groupe compact de* $\mathrm{O}(d)$ *opérant de façon irréductible sur* $\mathbb{R}^d$. *Soit* μ *une probabilité sur* G *ayant un moment d'ordre deux* (*i. e.* $\int_{\mathrm{G}} |x|^2 d\mu(k, x) < +\infty$) *étalée apériodique et* σ^2 *le nombre introduit dans le théorème* 0.1. *Si* f *est une fonction continue à support compact sur* G *et* dg *la mesure de Haar normalisée sur* G,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ n^{d/2}(2\pi)^{d/2}\sigma^d \int f d\mu^n \right\} = \int_{\mathrm{G}} f(g)dg$$

Remarque. — Un résultat de ce type est appelé « théorème central limite local ». En effet, si $(\mathrm{U}_n, \mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans G indépendantes de loi μ, si $(\mathrm{V}_n, \mathrm{X}_n) = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{U}_i, \mathrm{Y}_i)$ le théorème central limite étudie la limite de $E\left(f\left(V_n, \frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)\right)$ (si f est un élément de $\mathcal{K}(G)$) et le théorème local étudie la limite de $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r E(f(V_n, X_n))$.

Démonstration. — On commence par démontrer le théorème pour les fonctions f du type considéré dans la proposition 3. On peut alors écrire :

$$n^{d/2} \int f \, d\mu^n = n^{d/2}(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{tr} \{ (T^\zeta_{\check{\mu}})^n T^\zeta_f \} \, d\zeta$$

Soit U le voisinage de 0 introduit au lemme 2 appliqué à une puissance μ^{n_0} de μ non étrangère à la mesure de Haar. Puisque, grâce à la relation (4) de la démonstration de la proposition 3, la somme

$$\operatorname{tr} (T^\zeta_{\check{\mu}})^n T^\zeta_f = \sum_{m,i,j} \langle T^\zeta_f e^{(m)}_{i,j'}, (T^\zeta_\mu)^n e^{(m)}_{i,j} \rangle$$

n'a qu'un nombre fini de termes non nuls il existe une constante k indépendante de n telle que $| \operatorname{tr} (T^\zeta_{\check{\mu}})^n T^\zeta_f |$ soit inférieur à $k \, || T^\zeta_\mu ||^n \, || T^\zeta_f ||$. Puisque, toujours après le (4) de la proposition 3, $\operatorname{tr} (T^\zeta_{\check{\mu}})^n T^\zeta_f$ est une fonction de ζ à support compact indépendant de n, le (i) du lemme 2 appliqué à μ^{n_0} montre que

$$\lim_{n \to +\infty} n^{d/2} \int_{U^c} \operatorname{tr} \{ (T^\zeta_{\check{\mu}})^n T^\zeta_f \} \, d\zeta = 0$$

On doit donc étudier

$$(1) \qquad \lim_{n \to \infty} n^{d/2} \int_U \operatorname{tr} \{ (T^\zeta_{\check{\mu}})^n T^\zeta_f \} \, d\zeta = \lim_{n \to \infty} \int_{U\sqrt{n}} \operatorname{tr} \{ (T^{\zeta/\sqrt{n}}_{\check{\mu}})^n T^{\zeta/\sqrt{n}}_f \} \, d\zeta$$

Pour cela remarquons d'abord que si φ est un élément de $L^2(K)$

$$\begin{aligned}(T^{\zeta/\sqrt{n}}_\mu)^n \varphi(u) = T^{\zeta/\sqrt{n}}_{\mu^{*n}} \varphi(u) &= \int e^{i\langle \zeta/\sqrt{n}, u^{-1}x \rangle} \varphi(k^{-1}u) d\mu^{*n}(k, x) \\ &= \int e^{i\langle \zeta, u^{-1}x \rangle} \varphi(k^{-1}u) d\nu_n(k, x) = T^\zeta_{\nu_n} \varphi(u)\end{aligned}$$

si ν_n est l'image de μ^{*n} par l'application $(k, x) \rightarrow \left(k, \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$.

D'après le théorème 0.2, ν_n converge vaguement vers ν, produit de la mesure de Haar de K et de la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2 Id)$. Donc (cf. Grenander [7]) $T^\zeta_{\nu_n}$ converge fortement vers T^ζ_ν pour tout élément ζ de $\mathbb{R}^d$.

Si dans le système $\{ e_{i,j}^{(n)}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq j \}$ on choisit pour $e^{(0)}$ la fonction identiquement égale à un on voit donc que $((T_\mu^{\zeta/\sqrt{n}})^n e_{i_0,j_0}^{n_0}$ tend dans $L^2(K)$ vers la fonction qui au point u vaut :

$$\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \int e^{i\langle \zeta, u^{-1}x \rangle} e_{i_0,j_0}^{n_0}(k^{-1}u) e^{-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}} dx dk$$

qui est nulle si n_0 est différent de 0 et vaut $e^{-\frac{\sigma^2\|\zeta\|^2}{2}}$ sinon.

La suite intervenant dans le calcul de la trace de $(T_\mu^{\zeta/\sqrt{n}})^n T_f^{\zeta/\sqrt{n}}$ ayant un nombre fini de termes on voit donc que

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{tr} (T_\mu^{\zeta/\sqrt{n}})^n T_f^{\zeta/\sqrt{n}} = e^{-\frac{\sigma^2\|\zeta\|^2}{2}} \langle 1, T_f^0 1 \rangle = e^{-\frac{\sigma^2\|\zeta\|^2}{2}} \int f(g) dg$$

Pour calculer la limite de l'intégrale (1) il suffit de vérifier que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Nous avons déjà remarqué qu'il existe une constante k telle que

$$| \operatorname{tr} (T_\mu^{\zeta/\sqrt{n}})^n T_f^{\zeta/\sqrt{n}} | \leq k \| T_\mu^{\zeta/\sqrt{n}} \|^n \| T_f^{\zeta/\sqrt{n}} \| \leq k \| f \|_{L^1} \| T_\mu^{\zeta/\sqrt{n}} \|^n$$

D'autre part, si ζ est un élément de $\sqrt{n}U$ le lemme 2 appliqué à μ^{n_0} montre que $\| T_{\mu^{n_0}}^{\zeta/\sqrt{n}} \|^m$ est inférieur à $\exp\left(-\frac{m}{n} a \| \zeta \|^2 \right)$. Il existe donc un $b > 0$ tel que

$$\| (T_\mu^{\zeta/\sqrt{n}})^n \| \leq \exp - b \| \zeta \|^2 \qquad \text{si } \zeta \in U\sqrt{n}$$

et $| 1_{\sqrt{n}U}(\zeta) \operatorname{tr} (T_\mu^{\zeta/\sqrt{n}})^n T_f^{\zeta/\sqrt{n}} |$ est inférieur à $\exp\{ -ab \| \zeta \|^2 \} \times \| f \|_{L^1}$.

Cette fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}(2\pi)^d \lim_{n \to \infty} n^{d/2} \int f d\mu^{*n} &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \to \infty} 1_{\sqrt{n}U}(\zeta) \operatorname{tr} (T^{\zeta/\sqrt{n}})^n T_f^{\zeta/\sqrt{n}} d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\sigma^2\|\zeta\|^2}{2}} \left\{ \int f(g) dg \right\} d\zeta = \frac{(2\pi)^{d/2}}{\sigma^d} \int f(g) dg\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré le théorème dans le cas où $f(k, x) = g(k)h(x)$, g étant un polynôme trigonométrique sur K et h une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$ dont le transformée de Fourier est à support compact. Il faut maintenant le généraliser aux fonctions continues à support compact.

Fixons d'abord la fonction g et considérons la mesure sur $\mathbb{R}^d$, p_n définie par $p_n(A) = n^{d/2} \int g(k) 1_A(x) d\mu^n(k, x)$.

Nous venons de montrer que si $p_\infty(A) = \sigma^{-d}(2\pi)^{-d/2} \int g(k) 1_A(x) dk dx$, pour toute fonction intégrable h dont la transformée de Fourier est à support compact $\int_{\mathbb{R}^d} h dp_n$ tend vers $\int_{\mathbb{R}^d} h dp_\infty$.

Le théorème 10.7 de Breiman [4] montre alors que la suite p_n converge vaguement vers p donc que le théorème est vrai si h est dans $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$.

Pour terminer considérons une fonction f continue sur G à support dans un compact $\mathscr{C}$. Il est clair qu'alors il existe une suite f_n convergeant uniformément vers f où f_n est une combinaison linéaire finie de fonctions du type $g \otimes h$, g étant un polynôme trigonométrique et h étant une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ à support dans $\mathscr{C}$. En utilisant cet argument on montre immédiatement que le théorème est vrai pour toutes les fonctions de $\mathcal{K}(G)$. ■

THÉORÈME 2. — *Si* G *est comme dans le théorème 1 et si* μ *est une probabilité étalée adaptée sur* G *possédant un moment d'ordre deux, il existe une constante* $\sigma > 0$ *telle que, pour toute fonction continue à support compact sur* $\mathbb{R}^d$, *on a*

$$\lim n^{d/2}(2\pi)^{d/2}\sigma^d \int_G f(x) d\mu^{*n}(k, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

Démonstration. — Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 1 en supposant que g est identiquement égal à un et de remarquer qu'alors (en utilisant par exemple la relation (4) de la démonstration de la proposition 3) :

$$\operatorname{tr} (T_{\check{\mu}}^{\zeta/\sqrt{n}})^n T_f^{\zeta/\sqrt{n}} = \langle T_f^{\zeta/\sqrt{n}} 1, T_{\mu^{*n}}^{\zeta/\sqrt{n}} 1 \rangle = \int_K \overline{\hat{\bar{\nu}}_n(u\zeta/\sqrt{n})} h(u\zeta/\sqrt{n}) du$$

si on note $\bar{\nu}_n$ la projection de μ^{*n} sur $\mathbb{R}^d$. Le théorème 0.1 montre qu'alors $\operatorname{tr} (T_{\check{\mu}}^{\zeta/\sqrt{n}})^n T_f^{\zeta/\sqrt{n}}$ converge en tout point vers $e^{-\frac{\sigma^2 \|\zeta\|^2}{2}} \int f(x) dx$.

Le reste de la démonstration est le même. ■

D. CONSÉQUENCES

COROLLAIRE 1. — *Soit* G *un groupe localement compact admettant un quotient par un sous-groupe compact distingué isomorphe à* $SO(2) \times_\sigma \mathbb{R}^2$ *ou* $\{1, -1\} \times_\sigma \mathbb{R}$. *Alors, sur* G, *toute probabilité adaptée étalée ayant un moment d'ordre deux est récurrente.*

Remarque. — Ce résultat a été démontré sans hypothèse d'étalement par P. Crépel [5]. Sur $\{1, -1\} \times_\sigma \mathbb{R}$ il suffit même que μ, adaptée, ait un moment d'ordre un. La démonstration de ce corollaire est évidemment une conséquence immédiate du théorème 1. Les méthodes de [*5*] étaient différentes.

Dans une direction complètement différente on obtient immédiatement le théorème d'équirépartition suivant qui généralise des résultats de Y. Guivarc'h [*8*] et E. Lepage [*10*].

COROLLAIRE 2. — *Soit* $G = K \times_\sigma \mathbb{R}^d$ *un sous-groupe de* $O(d) \times_\sigma \mathbb{R}^d$ *où* K *est un sous-groupe compact de* $\mathbb{R}^d$ *opérant de façon irréductible sur* $\mathbb{R}^d$.

(i) *Si* μ *est une probabilité apériodique, ayant un moment d'ordre 2, étalée sur* G *alors si* φ *et* Ψ *sont deux fonctions continues à support compact sur* G

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int \varphi d\mu^{*n}}{\int \Psi d\mu^{*n}} = \frac{\int_G \varphi(g)dg}{\int_G \Psi(g)dg} \quad \textit{dès que} \int_G \Psi(g)dg \textit{ est non nul}.$$

(ii) *Si* μ *est une probabilité adaptée ayant un moment d'ordre deux, étalée, si* φ *et* Ψ *sont deux fonctions continues à support compact sur* $\mathbb{R}^d$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_G \varphi(x)d\mu^{*n}(k, x)}{\int_G \Psi(x)d\mu^{*n}(k, x)} = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx}{\int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x)dx} \quad \textit{dès que} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x)dx \textit{ est non nul}.$$

Remarques. — Cet article précise une note [*1*] où les résultats étaient annoncés. V. M. Maximov nous a fait savoir qu'il avait obtenu des résultats du même type [*11*] : il suppose que la loi de U_1 est à support fini et que Y_1 a un moment d'ordre 3, mais il précise les diverses conditions d'apériodicité ; les démonstrations ne sont pas données dans sa note, mais les méthodes employées sont entièrement différentes.

— Dans le cas où l'on ne suppose pas que Y a un moment d'ordre 2, on peut obtenir des inégalités pour les estimations de $\int f d\mu^n$. Cf. [*3*].

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] P. BALDI, P. BOUGEROL, P. CREPEL, Théorème central limite local sur les déplacements de R^d. *C. R. Acad. Sci.*, t. **283**, 1976, p. A-53.

[*2*] P. BOUGEROL, Promenades aléatoires sur les groupes localement compacts, extensions compactes de groupes abéliens. *Thèse de 3^e^ cycle*, Université de Paris VII, 1976.

[3] P. BOUGEROL, Fonctions de concentration sur les extensions compactes de groupes abéliens. *C. R. Acad. Sci.*, t. **283**, 1976, p. A-527.

[4] L. BREIMAN, *Probability*, Addison-Wesley, 1968.

[5] P. CREPEL, Marches aléatoires sur le groupe des déplacements du plan. *C. R. Acad. Sci.*, t. **278**, 1er avril 1974, p. 961-964.

[6] L. G. GOROSTIZA, The central limit theorem for random motions of d-dimensional euclidean space. *Annals of Probability*, vol. **1**, n° 4, 1973, p. 603-612.

[7] U. GRENANDER, *Probabilities on algebraic structures*, Wiley, 1963.

[8] Y. GUIVARC'H, Équirépartition dans les espaces homogènes. *Lecture Notes*, Springer Verlag, n° 532, 1976.

[9] A. KLEPPNER, R. LIPSMAN, The plancherel formula for groups extensions. *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, 4 série, t. **5**, 1972, p. 459-516.

[10] E. LEPAGE, Théorèmes quotients pour certaines marches aléatoires. *C. R. Acad. Sci.*, t. **279**, série A, n° 2, 1974.

[11] V. M. MAXIMOV, Distributions ponctuelles uniformes et théorèmes locaux pour des mouvements aléatoires. *Dokl. Akad. Nauk.*, t. **232**, n° 2, 1977, p. 284-287.

[12] L. PUKANSKY, *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, 1967.

[13] D. REVUZ, *Markov Chains*, North-Holland, 1975.

[14] B. ROYNETTE, Théorème central limite pour le groupe des déplacements de R^d. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect. B, vol. **X**, n° 4, 1974.

[15] V. N. TUTUBALIN, The central limit theorem for random motions of a Euclidean Space. *Select. Transl. in Math. Stat. and Proba.*, vol. **2**, 1973.