ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

NELLY MAIGRET

Théorème de limite centrale fonctionnel pour une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris et positive

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, n° 4 (1978), p. 425-440
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_4_425_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIV, n° 4, 1978, p. 425-440.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Théorème de limite centrale fonctionnel pour une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris et positive

par

Nelly MAIGRET (*)
Département de Mathématiques, C. S. P.,
Avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est d'établir un théorème de limite centrale fonctionnel pour une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris et positive. On utilise l'équation de Poisson et des théorèmes de convergence sur les martingales.

ABSTRACT. — The aim of this article is to prove a functional central limit theorem for a positive recurrent Harris chain, using the Poisson equation and martingale convergence theorems.

Soit $X = \{ \Omega, \mathscr{A}, (P_x)_{x \in \mathscr{H}}, (X_n)_{n \in N} \}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états mesurable $(\mathscr{H}, \boldsymbol{\mathscr{H}})$, récurrente au sens de Harris et positive de probabilité invariante μ ([*9*], [*13*]). La tribu $\boldsymbol{\mathscr{H}}$ est supposée à base dénombrable. La probabilité de transition est notée Π, sa $n^{\text{ème}}$ itérée Π_n. On notera $\mathscr{P}$ l'ensemble des probabilités sur $(\mathscr{H}, \boldsymbol{\mathscr{H}})$, P_λ la distribution de la chaîne lorsque λ de $\mathscr{P}$ est la loi initiale, et E_λ l'espérance pour la probabilité P_λ(P_x et E_x désigneront P_λ et E_λ pour $\lambda = \delta_x$). Pour tout n de N, on note $\mu \otimes \Pi_n$ la mesure sur $(\mathscr{H}^{n+1}, \boldsymbol{\mathscr{H}}^{n+1})$ définie par

$$(\mu \otimes \Pi_n)(A) = \int 1_A(x_0, \ldots, x_n) d\mu(x_0) \Pi(x_0, dx_1) \ldots \Pi(x_{n-1}, dx_n).$$

(*) Équipe de Recherche Associée au C. N. R. S., n° 532, Statistique Appliquée.

Pour λ de $\mathscr{P}$, et F variable aléatoire (v. a.) sur $(\mathscr{H}^p, \boldsymbol{\mathscr{H}}^p)$ $(p \geqslant 1)$, $Q_n^{\lambda,F}$ est le processus

$$\left(\Omega, \mathscr{A}, P_\lambda, \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{[nt]-1} F(X_m, X_{m+1}, \ldots, X_{m+p-1}) \right\}_{t \in R^+} \right)$$

(où pour tout réel r, $[r]$ désigne la partie entière).

On étudie ici, la convergence en loi de la suite $\{ Q_n^{\lambda,F} \}_{n \in N}$ pour F v. a. sur $(\mathscr{H}^2, \boldsymbol{\mathscr{H}}^2)$. La convergence en loi des processus sera notée : $\overset{\mathscr{L}}{\to}$.

L'espace des temps étant $\mathbb{R}^+$, on désigne par W le mouvement brownien à une dimension ; aW est une martingale gaussienne continue de covariance $K(s, t) = a^2(s \wedge t)$ si a est non nul, et le processus dégénéré 0 si a est nul. Enfin pour p entier naturel non nul, V_p est l'espace vectoriel des v. a. sur $(\mathscr{H}^p, \boldsymbol{\mathscr{H}}^p)$, B_p est le sous-espace de V_p des v. a. bornées et $B^0(\mu \otimes \Pi_{p-1})$ celui des v. a. bornées et d'intégrale nulle par rapport à $\mu \otimes \Pi_{p-1}$, $L^n(\mu \otimes \Pi_{p-1})$ est le sous-espace de V_p des v. a. de puissance $n^{\text{ème}}$ intégrable $(n \in \mathbb{N}^*)$ et les v. a. de $L_0^n(\mu \otimes \Pi_{p-1})$ sont en plus d'intégrale nulle par rapport à $\mu \otimes \Pi_{p-1}$.

De nombreux théorèmes de limite centrale ont été établis pour différents types de processus. Les chaînes récurrentes Doeblin apériodiques en sont souvent un cas particulier ; les principaux résultats les concernant sont les suivants.

Un résultat de Billingsley [*2*]

Pour tout entier p, pour toute F de $L_0^2(\mu \otimes \Pi_p)$, pour toute λ telle que P_λ soit absolument continue par rapport à P_μ, on a

$$Q_n^{\lambda,F} \overset{\mathscr{L}}{\to} \sqrt{C(F)}.W$$

où

$$C(F) = E_\mu(F^2(X_0, \ldots, X_p)) + 2\sum_{n=1}^{\prime} E_\mu(F(X_0, \ldots, X_p)F(X_n, \ldots, X_{n+p}))$$

est une constante finie positive.

Popescu [*10*] a montré que pour toute F de $B^0(\mu)$

$$Q_n^{x,F} \overset{\mathscr{L}}{\to} \sqrt{C(F)}.W, \qquad \text{uniformément en } x,$$

où

$$C(F) = E_\mu(F^2(X_0)) + 2\sum_{n=1}^{\prime} E_\mu(F(X_0)F(X_n)).$$

On trouve aussi des résultats de ce type dans [*1*] [*14*] [*15*] et dans [*4*].

Sans propriété plus forte de récurrence pour la chaîne X que la récurrence Harris positive, on connaît des résultats non fonctionnels, qui donnent des précisions sur les vitesses de convergence ([*3*] [*5*]), dans le cas où l'espace d'états $\mathscr{H}$ est dénombrable. Notre travail est basé sur l'équation de Poisson ([*7*]). L'établissement d'une convergence fonctionnelle sera due à un théorème de convergence de Rebolledo [*12*] qui améliore un théorème de limite centrale de Brown pour les martingales. L'idée d'utiliser l'équation de Poisson a été empruntée à Mandl [*6*].

1. PRÉLIMINAIRES

Pour tout noyau K, pour toute mesure α signée sur $(\mathscr{H}, \boldsymbol{\mathscr{H}})$, pour toute g positive de V_2, pour tout $x \in \mathscr{H}$ on note

$$K(x, g) = \int K(x, dy)g(x, y) = Kg(x)$$

$$\alpha Kg = \int \alpha(dx)K(x, g)$$

On désignera par $\mathscr{B}_n$ la tribu des événements antérieurs à n:

$$\sigma(X_0, \ldots, X_n) = \mathscr{B}_n .$$

1.1. L'équation de Poisson

La solution de l'équation de Poisson d'une chaîne de Markov récurrente est basée sur le noyau W introduit par Neveu dans [7]. Ce noyau est positif et il existe une v. a. h strictement positive telle que $(h.\mu)W$ soit égale à μ : pour toute $f \in L^1(\mu)$, Wf est finie μ p. s. (cela résulte aussi de [*8*]). Le noyau $\Gamma = W + I$ est un noyau potentiel et pour toute f de $L_0^1(\mu)$,

$$(\Gamma f) - \Pi(\Gamma f) = f \qquad \mu \text{ p. s.}$$

Lorsque $|f|$ est spéciale (f est une charge), Γf est bornée ([7] [*13*]).

1.2. Un résultat de Rebolledo

Soit $\{ M_n ; n = 1, \ldots \}$ une martingale de carré intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ avec $M_0 = 0$, $M_n - M_{n-1} = \xi_n$. On considère $\{ \zeta_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de processus, dont l'espace des temps est $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, à trajectoires continues à droite, limitées à gauche ; $\zeta_n(t)$ croît en n et en t. Enfin, on suppose que pour tout (n, t), $\zeta_n(t)$ est un temps d'arrêt adapté à $(\mathscr{B}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et que $\zeta_n(0) = 0$.

On suppose qu'il existe une suite $\{ b_n \}$ de constantes positives tendant vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ telle que : pour tout t de $\mathbb{R}^+$ et tout $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{\zeta_n(t)} \mathrm{E}(\xi_k^2 1_{\{|\xi_k| > \varepsilon b_n\}}/\mathscr{B}_{k-1}) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0, \qquad \text{en probabilité sur } (\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$$

$$\frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{\zeta_n(t)} \mathrm{E}(\xi_k^2/\mathscr{B}_{k-1}) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \mathrm{A}(t), \qquad \text{en probabilité sur } (\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$$

où $t \to \mathrm{A}(t)$ est une fonction continue croissante, définie sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, nulle à l'origine.

Soit pour tout t de $\mathbb{R}^+$, n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{M}_n(t) = \dfrac{1}{b_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{\zeta_n(t)} \xi_k$.

Alors la suite des processus $\{ (\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P}, (\mathrm{M}_n(t))_{t\in\mathbb{R}^+}) \}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une martingale gaussienne continue, de covariance $\mathrm{K}(s, t) = \mathrm{A}(s \wedge t)$.

On note $\mathscr{D}([0, +\infty[)$ l'ensemble des fonctions de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$, continues à droite, limitées à gauche. Les processus $(\mathrm{Z}_n\,;\, n \in \mathbb{N})$ et Z ayant leurs trajectoires dans $\mathscr{D}([0, \infty[)$, on entend par convergence en loi de $\{ \mathrm{Z}_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ vers Z, la propriété suivante : la suite des lois des processus Z_n converge vers la loi de Z, étroitement, pour la topologie de Skorokhod [*16*]. On notera : $\mathrm{Y}_n \overset{\mathscr{D}}{\to} \mathrm{Y}$ pour signifier que la suite $\{ \mathrm{Y}_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}([0, \infty[)$ converge vers Y de $\mathscr{D}([0, \infty[)$ pour la topologie de Skorokhod. Rappelons que si la suite $\{ \mathrm{Y}_n \}$ d'éléments de $\mathscr{D}([0, \infty[)$ converge vers Y de $\mathscr{D}([0, \infty[)$, uniformément sur tous les compacts $[0, \mathrm{T}]$, T réel positif, alors Y_n converge vers Y pour la topologie de Skorokhod.

A partir de maintenant, on fait les hypothèses suivantes, désignées par (A) : F est un élément de $\mathrm{L}_0^2(\mu \otimes \Pi)$, tel que $(\mu \otimes \Pi)(\{ \mathrm{F} \neq 0 \}) > 0$. Alors $\Pi\mathrm{F}$ est un élément de $\mathrm{L}_0^2(\mu)$. L'équation de Poisson $(\mathrm{I} - \Pi)l = \Pi\mathrm{F}$ μ p. s. a donc une solution l de V_1. On suppose $l \in \mathrm{L}^2(\mu)$ et on note $\phi = \Pi\mathrm{F} + \Pi l - l$ (donc $\phi = 0$ μ p. s.).

2. UN RÉSULTAT AUXILIAIRE

Soit $\lambda \in \mathscr{P}$. Sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P}_\lambda)$, définissons pour tout m de $\mathbb{N}$, la v. a. U_m par

$$\mathrm{U}_m = \mathrm{F}(\mathrm{X}_m, \mathrm{X}_{m+1}) + l(\mathrm{X}_{m+1}) - l(\mathrm{X}_m) - \phi(\mathrm{X}_m)$$

et posons

$$M_n = \sum_{m=0}^{n-1} U_m$$

$$s_{n,\lambda}^2 = E_\lambda(M_n^2)$$

LEMME 2.1. — 1. M_n *est une martingale de carré intégrable*

— *sur* $(\Omega, \mathscr{A}, P_\mu)$.

— *sur* $(\Omega, \mathscr{A}, P_x)$ *pour* μ *presque tout* x.

2. *Pour toute* λ *de* $\mathscr{P}$ *et pour tout* ε *strictement positif, pour tout* t *de* $\mathbb{R}^+$

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{[nt]-1} E_\lambda(U_m^2 1_{\{|U_m| > \varepsilon n\}}/\mathscr{B}_m) \underset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \textit{en probabilité sur } (\Omega, \mathscr{A}, P_\lambda)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{[nt]-1} E_\lambda(U_m^2/\mathscr{B}_m) \underset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} C(F, l)t, \qquad \textit{en probabilité sur } (\Omega, \mathscr{A}, P_\lambda),$$

où

$$C(F, l) = \int d\mu(x)\Pi(x, dy)F^2(x, y) + 2\int d\mu(x)\Pi(x, dy)F(x, y)l(y)$$

est une constante positive ou nulle finie.

. Montrons l'assertion 1.

— M_n est bien sûr $\mathscr{B}_n$ mesurable.

— μ étant la probabilité invariante, on a pour tout m

$$E_\mu(U_m^2) = \int d\mu(x)\Pi(x, dy)(F(x, y) + l(y) - l(x) - \phi(x))^2$$

$$= \int d\mu(x)\Pi(x, dy)(F(x, y) + l(y) - l(x))^2$$

$$E_\mu(U_m^2) = \int d\mu(x)\Pi(x, dy)F^2(x, y) + \int d\mu(x)\Pi(x, dy)(l((y) - l(x))^2$$

$$+ 2\int d\mu(x)\Pi(x, dy)F(x, y)(l(y) - l(x))$$

$$\int d\mu(x)\Pi(x, dy)(l(y) - l(x))^2 = 2\int d\mu(x)l^2(x) - 2\int d\mu(x)l(x)\Pi(x, l)$$

$$
\begin{aligned}
2\int d\mu(x)\Pi(x, dy)\mathrm{F}(x, y)(l(y) - l(x)) &= 2\int d\mu(x)\Pi(x, dy)\mathrm{F}(x, y)l(y) \\
&\qquad - 2\int d\mu(x)\Pi(x, dy)\mathrm{F}(x, y)l(x) \\
&= 2\int d\mu(x)\Pi(x, dy)\mathrm{F}(x, y)l(y) - 2\int d\mu(x)\Pi(x, \mathrm{F})l(x) \\
&= 2\int d\mu(x)\Pi(x, dy)\mathrm{F}(x, y)l(y) - 2\int d\mu(x)(l(x) - \Pi(x, l))l(x)
\end{aligned}
$$

Par conséquent, pour tout m de N,

$$\mathrm{E}_\mu(\mathrm{U}_m^2) = \quad d\mu(x)\Pi(x, dy)\mathrm{F}^2(x, y) + 2 \quad d\mu(x)\Pi(x, dy)\mathrm{F}(x, y)l(y),$$

$\mathrm{E}_\mu(\mathrm{U}_m^2)$ est fini, puisque F est élément de $\mathrm{L}^2(\mu \otimes \Pi)$ et l élément de $\mathrm{L}^2(\mu)$. On note $\mathrm{C}(\mathrm{F}, l) = \mathrm{E}_\mu(\mathrm{U}_m^2)$. La v. a. U_m est P_μ intégrable pour tout m et

$$\mathrm{E}_\mu(\mathrm{U}_m/\mathscr{B}_m) = \Pi(\mathrm{X}_m, \mathrm{F}) + \Pi(\mathrm{X}_m, l) - l(\mathrm{X}_m) - \phi(\mathrm{X}_m) = 0\,.$$

Finalement, M_n est une martingale de carré intégrable sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P}_\mu)$. Pour μ presque tout x, $\mathrm{E}_x(\mathrm{U}_m^2)$ est aussi fini pour tout m et $\mathrm{E}_x(\mathrm{U}_m/\mathscr{B}_m) = 0$. M_n est une martingale de carré intégrable sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P}_x)$ pour μ presque tout x.

. Montrons les assertions 2 et 3 du lemme : soit λ de $\mathscr{P}$. Soient t et ε des réels strictement positifs. On a pour tout $a > 0$

$$\overline{\lim_n}\, \frac{1}{[nt]} \sum_{m=0}^{[nt]-1} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{U}_m^2 1_{\{|\mathrm{U}_m| > \varepsilon n\}}/\mathscr{B}_m) \leqslant \lim_n \frac{1}{[nt]} \sum_{m=0}^{[nt]-1} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{U}_m^2 1_{\{|\mathrm{U}_m| > \varepsilon a\}}/\mathscr{B}_m)$$

Mais puisque $(\mathrm{F}(x, y) + l(y) - l(x))^2$ est $\mu \otimes \Pi$ intégrable pour tout $\eta > 0$ il existe a_0 tel que

$$\int d\mu(x)\Pi(x, dy)(\mathrm{F}(x, y) + l(y) - l(x))^2 1_{\{|\mathrm{F}(x,y) + l(y) - l(x)| > \varepsilon a_0\}} \leqslant \eta\,.$$

De plus, puisque la chaîne est récurrente, pour tout x, pour tout réel a

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{[nt]} \sum_{m=0}^{[nt]-1} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{U}_m^2 1_{\{|\mathrm{U}_m| > \varepsilon a\}}/\mathscr{B}_m) \\
&\quad = \int d\mu(x)\Pi(x, dy)(\mathrm{F}(x, y) + l(y) - l(x))^2 1_{\{|\mathrm{F}(x,y) + l(y) - l(x)| > \varepsilon a\}} \qquad \mathrm{P}_\lambda \text{ p. s.}
\end{aligned}
$$

Donc

$$\lim_n \frac{1}{[nt]} \sum_{m=0}^{[nt]-1} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{U}_m^2 1_{\{|\mathrm{U}_m|>\varepsilon n\}}/\mathscr{B}_m) = 0 \qquad \mathrm{P}_\lambda \text{ p. s.}$$

$$\lim_n \frac{1}{[nt]} \sum_{m=0}^{[nt]-1} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{U}_m^2 1_{\{|\mathrm{U}_m|>\varepsilon n\}}/\mathscr{B}_m) = 0 \qquad \mathrm{P}_\lambda \text{ p. s.}$$

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{[nt]-1} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{U}_m^2 1_{\{|\mathrm{U}_m|>\varepsilon n\}}/\mathscr{B}_m) = 0 \qquad \mathrm{P}_\lambda \text{ p. s.}$$

ce qui entraîne l'assertion 2 du lemme. On a aussi

$$\lim_n \frac{1}{[nt]} \sum_{m=0}^{[nt]-1} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{U}_m^2/\mathscr{B}_m) = \mathrm{C}(\mathrm{F}, l) \qquad \mathrm{P}_\lambda \text{ p. s.}$$

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{[nt]-1} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{U}_m^2/\mathscr{B}_m) = \mathrm{C}(\mathrm{F}, l) \times t \qquad \mathrm{P}_\lambda \text{ p. s.}$$

Ce qui finit de démontrer le lemme. ■

Remarquons que C(F, l) peut être nulle (exemple dû a Cogburn [4]). Soit la chaîne de Markov d'espace d'état $\mathbb{Z}$, de probabilité de transition Π définie en posant pour $n > 0$,

$$\Pi(0, n) = \frac{1}{2^{n+1}}, \qquad \Pi(n, -n) = \Pi(-n, 0) = 1\,.$$

La chaîne admet alors la mesure invariante μ :

$$\mu(0) = \frac{1}{2}, \qquad \mu(\pm n) = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Soit F la v. a. identité sur $\mathbb{Z}$. La v. a. l définie pour tout n positif par

$$l(n) = 0\,, \qquad l(-n) = -n\,, \qquad l(0) = 0$$

est une solution de l'équation de Poisson.

On le vérifie immédiatement en remarquant que pour tout n positif,

$$\Pi(n, l) = \sum_p l(p)\Pi(n, p) = l(-n)$$

$$\Pi(-n, l) = \sum_p l(p)\Pi(-n, p) = l(0)$$

$$\Pi(0, l) = 0\,.$$

Par définition, $C(F, l)$ est nul si et seulement si

$$F(x) + l(y) - l(x) = 0 \qquad \mu \otimes \Pi \text{ p. s.}$$

Montrons ici, que pour tout x de $\mathbb{Z}$,

$$F(x) + l(y) - l(x) = 0 \qquad \Pi(x, .) \text{ p. s.}$$

— pour tout n positif, $\Pi(n, -n) = 1$ et $F(n) + l(-n) - l(n) = 0$

— pour tout n négatif, $\Pi(n, 0) = 1$ et $F(n) + l(0) - l(n) = 0$

— enfin, $\Pi(0, N) = 1$ et $F(0) + \sum_{n \in N} l(n)\Pi(0, n) - l(0) = 0$.

Donc, $C(F, l)$ est nulle. ■

Appliquons maintenant le théorème de Rebolledo à la martingale M_n sur $(\Omega, \mathscr{A}, P_\mu)$, et sur $(\Omega, \mathscr{A}, P_x)$ pour μ presque tout x.

($\zeta(n, t) = [nt]$, et $A(t) = C(F, l)t$ vérifient bien les conditions demandées).

THÉORÈME 2.1. — *Dans le cadre de ce chapitre, pour* F *vérifiant l'hypothèse* (*A*)

* *le processus* $M_n^x = \left(\Omega, \mathscr{A}, P_x, \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} M_n(t) \right\}_{t \in R^+} \right)$ *converge en loi vers le processus* $\sqrt{C(F, l)}W$, *pour* μ *presque tout* x.

* *le processus* $M_n^\mu = \left(\Omega, \mathscr{A}, P_\mu, \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} M_n(t) \right\}_{t \in R^+} \right)$ *converge en loi vers le processus* $\sqrt{C(F, l)}W$.

3. LE PRINCIPAL THÉORÈME DE CONVERGENCE

3.1. On peut écrire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P_\lambda)$ pour toute λ de $\mathscr{P}$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} M_n(w, t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{[nt]-1} F(X_m(w), X_{m+1}(w)) + \frac{1}{\sqrt{n}} \{ l(X_{[nt]}(w)) - l(X_0(w)) \} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{[nt]-1} \phi(X_m(w))$$

Posons

$$Y_n(w, t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \{ l(X_{[nt]}(w)) - l(X_0(w)) \}$$

$$Z_n(w, t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{[nt]-1} \phi(X_m(w))$$

Remarquons que lorsque h est un élément de $L^1(\mu)$, pour tout m, pour P_μ presque tout w, $h(X_m(w))$ est fini. Puisque l et ϕ appartiennent à $L^1(\mu)$, on en déduit que $Y_n(w, .)$ et $Z_n(w, .)$ sont des éléments de $\mathscr{D}([0, \infty[)$ pour P_μ presque tout w.

Soit $E = \{ \phi = 0 \}$. Puisque la chaîne est récurrente, pour tout $\lambda \in \mathscr{P}$ $P_\lambda (\overline{\lim_n} (X_n \in E))$ est égal à 1. Finalement, $\sum_{m=0}^{\infty} |\phi(X_m)|$ est finie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P_\mu)$ d'où

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{\infty} |\phi(X_m)| \underset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad P_\mu \text{ p. s.}$$

Pour T réel positif quelconque, P_μ p. s.,

$$\sup_{t\in[0,T]} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{[nt]-1} |\phi(X_m)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{[nT]-1} |\phi(X_m)|$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{[nt]-1} |\phi(X_m)| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} Z_n(., t) = 0$$

Puisque T est quelconque, pour P_μ presque tout w, $Z_n(w, .) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathscr{L}} 0$ et par conséquent pour μ presque tout x, pour P_x presque tout w, $Z_n(w, .) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathscr{L}} 0$.

Avant de montrer un résultat analogue pour Y_n, montrons deux autres résultats intermédiaires

RÉSULTAT 3.1.1. — *Soit h un élément de $L^2(\mu)$. Alors*

$$\overline{\lim_n} \left| \frac{h(X_n)}{\sqrt{n}} \right| = 0 \qquad P_\mu \text{ p. s.}$$

Démonstration. — Il suffit de voir que pour tout $a > 0$

$$P_\mu\left(\overline{\lim_n} \left\{ \left| \frac{h(X_n)}{\sqrt{n}} \right| > a \right\} \right) = 0,$$

ce qui sera montré si

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P_\mu\left(\left| \frac{h(X_n)}{\sqrt{n}} \right| > a \right) < \infty$$

Or, pour tout a strictement positif, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P_\mu\left\{\left|\frac{h(X_n)}{\sqrt{n}}\right| > a\right\} = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_\mu\left\{\frac{h^2(X_n)}{a^2} > n\right\}$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left\{\frac{h^2}{a^2} > n\right\}$$
$$\leqslant \frac{1}{a^2}\int h^2 d\mu < \infty \qquad \blacksquare$$

RÉSULTAT 3.1.2. — *Soit h de $L^2(\mu)$. Alors*

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{k\leqslant n} |h(X_k)| \xrightarrow{P_\mu \text{ p.s.}} 0$$

Démonstration. — Supposons h positive pour la démonstration.

On définit sur $(\Omega, \mathscr{A})$ une suite de temps d'arrêt adaptés aux tribus $\{\mathscr{B}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ par $\zeta_0 = 1$; $\zeta_{i+1} = \inf\{n ; n > \zeta_i, \sup_{k\leqslant n} h(X_k) = h(X_n)\}$ si un tel inf existe et est fini, sinon on pose $\zeta_{i+1} = \infty$.

Soit $w \in \Omega$.

1^er^ CAS. — Pour $j \in \mathbb{N}$, $\zeta_{j-1}(w) < \infty$ et $\zeta_j(w) = \infty$, alors pour tout $n > \zeta_{j-1}(w)$

$$S_n(w) = \frac{h(X_{\zeta_{j-1}(w)}(w))}{\sqrt{n}}$$

2^e^ CAS. — Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\zeta_j(w) < \infty$, alors quel que soit $i \in \mathbb{N}$ et $n \in [\zeta_i(w), \zeta_{i+1}(w)[$

$$S_n(w) = \frac{h(X_{\zeta_i(w)}(w))}{\sqrt{n}}$$

D'où

$$\overline{\lim_n}\, S_n(w) \leqslant \overline{\lim_i}\, \frac{h(X_{\zeta_i(w)}(w))}{\sqrt{\zeta_i(w)}} \leqslant \overline{\lim_n}\, \frac{h(X_n(w))}{\sqrt{n}},$$

donc

$$\overline{\lim_n}\, S_n(w) \leqslant \overline{\lim_n}\, \frac{h(X_n(w))}{\sqrt{n}}.$$

Du résultat 3.1.1, on déduit le résultat 3.1.2

$$\lim_n S_n = 0 \qquad P_\mu \text{ p. s.} \qquad \blacksquare$$

Nous pouvons montrer maintenant que pour P_μ presque tout w, $Y_n(w, .)$ converge vers 0 dans $\mathscr{D}([0, \infty[)$.

Pour T réel positif quelconque,

$$\sup_{t\in[0,T]} \frac{1}{\sqrt{n}} \mid l(X_{[nt]}) \mid = \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{k\leq nT} \mid l(X_k) \mid .$$

Puisque l est élément de $L_2(\mu)$, le résultat 3.1.2 permet de conclure :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \frac{1}{\sqrt{n}} \{ l(X_{[nt]}) - l(X_0) \} = 0 \qquad P_\mu \text{ p. s.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} Y_n(.,t) = 0 \qquad P_\mu \text{ p. s.}$$

Puisque T est quelconque, pour P_μ presque tout w, $Y_n(w, .) \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$ et pour μ presque tout x, pour P_x presque tout w,

$$Y_n(w, .) \xrightarrow{\mathscr{D}} 0 .$$

Notons alors pour toute λ de $\mathscr{P}$, $Q_n^{\lambda,F}$ le processus

$$\left(\Omega, \mathscr{A}, P_\lambda, \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{[nt]-1} F(X_m, X_{m+1}) \right\}_{t\in R^+} \right).$$

En regroupant les résultats précédents, le théorème 2.1 permet de déduire :

1° pour μ presque tout x, $Q_n^{x,F} \underset{n\uparrow\infty}{\xrightarrow{\mathscr{L}}} \sqrt{C(F, l)}W$

2° $Q_n^{\mu,F} \underset{n\uparrow\infty}{\xrightarrow{\mathscr{L}}} \sqrt{C(F, l)}W$.

Remarque. — Ceci nous permet de conclure *a posteriori* que $C(F, l)$ ne dépend pas de la solution l de carré intégrable choisie, résultat que l'on constate directement à partir de l'expression $C(F, l)$ dans le cas où $\mid \Pi F \mid$ est spéciale car les solutions de l'équation de Poisson ne diffèrent alors que d'une constante. Nous noterons $C(F)$.

THÉORÈME 3.1. — $X = (\Omega, \mathscr{A}, (P_x)_{x\in\mathscr{H}}, (X_n)_{n\in N})$ *est une chaîne de Markov sur un espace d'états mesurable* $(\mathscr{H}, \boldsymbol{\mathscr{H}})$, *où la tribu* $\boldsymbol{\mathscr{H}}$ *est à base dénombrable.* X *est récurrente Harris positive, de probabilité invariante* μ, *et de transition* Π.

F *est un élément de* $L_0^2(\mu \otimes \Pi)$, *tel qu'une solution* l *de l'équation de Poisson associée à* ΠF *soit un élément de* $L^2(\mu)$.

On désigne pour toute λ *de* $\mathscr{P}$, *pour tout* n *de* N *par* $Q_n^{\lambda,F}$ *le processus*

$$\left(\Omega, \mathscr{A}, P_\lambda, \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{[nt]-1} F(X_m, X_{m+1}) \right\}_{t\in R^+} \right).$$

Alors $Q_n^{x,F} \underset{n\uparrow\infty}{\xrightarrow{\mathscr{L}}} \sqrt{C(F)}W$ *pour* μ *presque tout* x *et* $Q_n^{\mu,F} \underset{n\uparrow\infty}{\xrightarrow{\mathscr{L}}} \sqrt{C(F)}W$.

3.2. Un complément au théorème 3.1

Notons $\mathscr{P}_b(\mu) = \{ \lambda \in \mathscr{P} ; \lambda = h\mu, h$ bornée)

THÉORÈME 3.2. — *Sous les mêmes hypothèses que le théorème* 3.1, *pour toute* λ *de* $\mathscr{P}_b(\mu)$.

$$Q_n^{\lambda,F} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathscr{L}} \sqrt{C(F)}W$$

Démonstration. — En effet, soit λ de $\mathscr{P}_b(\mu)$, de densité h bornée par M. Alors U_m est une martingale de carré intégrale sur $(\Omega, \mathscr{A}, P_\lambda)$ car

$$E_\lambda(U_m^2) = E_\mu(hU_m^2) \leqslant ME_\mu(U_m^2) < \infty$$

$$E_\lambda(U_m/\mathscr{B}_m) = \Pi(X_m, F) + \Pi(X_m, l) - l(X_m) - \phi(X_m) = 0$$

On en déduit

$$\frac{1}{\sqrt{n}} M_n^{\lambda,F} \overset{\mathscr{L}}{\to} \sqrt{C(F)}W$$

La convergence P_μ presque sûre entraînant la convergence P_λ presque sûre, les termes résiduels convergent vers 0 dans $\mathscr{D}$, P_λ presque sûrement, ce qui entraîne le résultat

$$Q_n^{\lambda,F} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathscr{L}} \sqrt{C(F)}W. \quad \blacksquare$$

4. EXEMPLES

4.1. Soit F appartenant à $L_0^2(\mu \otimes \Pi)$, telle que $|\Pi F|$ soit spéciale. Une solution de l'équation de Poisson associée à ΠF est une v. a. l, bornée sur $\mathscr{H}$ et on a partout

$$l - \Pi l = \Pi F$$
$$\phi = l - \Pi l - \Pi F = 0$$

Si F est bornée, alors

1° U_m est borné pour tout m, donc pour tout x, $E_x(U_m^2)$ est fini, et l'assertion 1 du lemme 2.1 s'énonce : M_n est une martingale de carré intégrable sur $(\Omega, \mathscr{A}, P_\lambda)$ pour toute λ de $\mathscr{P}$. Ce qui permet de déduire pour toute λ de $\mathscr{P}$,

$$M_n^\lambda \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathscr{L}} \sqrt{C(F)}W$$

2° ϕ étant identiquement nulle, et l bornée, on voit immédiatement que pour toute λ de $\mathscr{P}$

$$Y_n(w, .) \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathscr{D}}{\longrightarrow}} 0 \qquad P_\lambda \text{ p. s.}$$

Le terme Z_n est nul.

THÉORÈME 4.1. — X *est une chaîne de Markov sur* $(\mathscr{H}, \boldsymbol{\mathscr{H}})$, *où* $\boldsymbol{\mathscr{H}}$ *est à base dénombrable, récurrente Harris positive de probabilité invariante* μ, *de transition* $\mathbb{T}$. *Soit* F *un élément de* $L_0^2(\mu \otimes \Pi)$ *tel que* $|\Pi F|$ *soit bornée et spéciale. Alors pour toute* λ *de* $\mathscr{P}$,

$$Q_n^{\lambda,F} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} \sqrt{C(F)}W\,.$$

COROLLAIRE 4.1. — X *vérifie les mêmes que dans le théorème précédent. Si* F *est un élément de* $\mathscr{B}^0(\mu)$, *tel que* $|F|$ *soit spéciale, alors pour toute* λ *de* $\mathscr{P}$

$$Q_n^{\lambda,F} \underset{n\uparrow\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} \sqrt{C(F)}W$$

4.2. Recherche « directe » de cas où l est de carré intégrable

1° Cet exemple est de nouveau emprunté à Cogburn [*4 b*]. La chaîne de transition Π est ici apériodique.

. On suppose qu'il existe un ensemble fortement récurrent A, c'est-à-dire que pour tout $B \in \boldsymbol{\mathscr{H}}$ chargé par μ

$$\sup_{x\in A} E_x(T_B) < \infty$$

où

$$T_B = \inf\{\, n\,;\, X_n \in B \,\}$$

On suppose aussi la fonction E. (T_A) de carré intégrable pour μ. Alors, il existe une v. a. β de carré intégrable pour μ, telle que pour tout x

$$\sup_n \left\| \sum_{p\leqslant n} \Pi_p(x, .) - \mu(.) \right\|_u \leqslant \beta(x)$$

($\|\ \|_u$ est la norme uniforme sur l'ensemble des probabilités sur $\mathscr{H}$) ce qui entraîne pour toute v. a. F de $B^0(\mu \otimes \Pi)$;

$$\sup_n \left| \sum_{p\leqslant n} \Pi_p(., F) \right| \leqslant \beta(.).\ \sup |F(.)|\,.$$

En suivant alors la démonstration du théorème 5.3 de [*4 b*], la suite $\sum_{p<n} \Pi_p(., \mathrm{F})$ tend vers l dans $\mathrm{L}^2(\mu)$ et presque sûrement, où l est une solution de l'équation de Poisson.

Sous les deux hypothèses faites, pour tout F de $\mathrm{B}^0(\mu \otimes \Pi)$,

$$\mathrm{Q}_n^{x,\mathrm{F}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \sqrt{\mathrm{C}(\mathrm{F})}\mathrm{W}\,,$$

pour μ presque tout x et

$$\mathrm{Q}_n^{\mu,\mathrm{F}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \sqrt{\mathrm{C}(\mathrm{F})}\mathrm{W}\,.$$

De plus ici,

$$\mathrm{C}(\mathrm{F}) = \mathrm{E}_\mu \ \mathrm{F}^2(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)\mathrm{F}(\mathrm{X}_n, \mathrm{X}_{n+1})$$

2° On suppose que la chaîne est récurrente Dœblin.

* *Supposons que pour tout* x : $\Pi(x, .) \geqslant h(x)\nu(.)$ où ν est une mesure non nulle sur $\mathscr{H}$ et h une v. a. telle que $\mu(h > 0) \neq 0$. Posons

$$\mathrm{Q}(x, .) = \Pi(x, .) - h(x)\nu(.)\,.$$

On suppose ici Π apériodique.

Soit q une v. a. mesurable sur $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$, telle que

$$0 \leqslant q \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\mathrm{Q}(x, .)}{d\Pi(x, .)} = q(x, .)$$

Soit F une v. a. de $\mathrm{L}_0^1(\mu \otimes \Pi)$, on pose $f = \Pi\mathrm{F}$.

Une solution de l'équation de Poisson est

$$l = \Pi\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Q}_n f + f$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_n f(x) &= \mathrm{E}_x(q(x, \mathrm{X}_1) \ldots q(\mathrm{X}_{n-1}, \mathrm{X}_n) f(\mathrm{X}_n)) \\ &= \mathrm{E}_x\left(\exp\left(\sum_{p=0}^{n-1} q(\mathrm{X}_p, \mathrm{X}_{p+1})\right) f(\mathrm{X}_n)\right) \end{aligned}$$

Soit i positif tel que $-i \geqslant \int \mathrm{Log}\, q d\mu \otimes \Pi$ et l'ensemble A_n tel que :

$$\mathrm{A}_n = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \mathrm{Log}\, q(\mathrm{X}_p, \mathrm{X}_{p+1}) \geqslant -i \right\}$$

La chaîne étant récurrente Dœblin apériodique, un théorème de larges déviations que nous avons obtenu [à paraître] permet d'affirmer

$$\exists a > 0, \quad \exists \rho, \quad 0 < \rho < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_x P_x(A_n) \leqslant a\rho^n .$$

Alors

$$Q_n f(x) \leqslant e^{-ni} E_x(f(X_n)) + E_x(1_{A_n} f(X_n))$$

Notons $\| \ \|_2$ la norme dans $L_2(\mu)$; on a

$$\begin{aligned} \| Q_n(f) \| &\leqslant e^{-ni} \| \Pi_n f \|_2 + \left\{ \int d\mu(x) \{ E_x(1_{A_n} f(X_n)) \}^2 \right\}^{1/2} \\ &\leqslant e^{-ni} \| \Pi_n f \|_2 + \left\{ \int d\mu(x) P_x(A_n) E_x(f^2(X_n)) \right\}^{1/2} \\ &\leqslant e^{-ni} \| \Pi_n f \|_2 + \sqrt{a\rho^n} \left\{ \int d\mu(x) \Pi_n f^2(x) \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Mais

$$\| \Pi_n f \|_2 = \left(\int d\mu(x) (\Pi_n f)^2(x) \right)^{1/2} \leqslant \left(\int d\mu(x) (\Pi_n f^2)(x) \right)^{1/2} = \| f \|_2 ,$$

d'où

$$\| Q_n(f) \|_2 \leqslant e^{-ni} \| f \|_2 + \sqrt{a\rho^n} \| f \|_2$$

et il existe deux constantes b et c, $b > 0$, $0 < c < 1$ telles que

$$\| Q_n f \|_2 < bc^n \| f \|_2$$

$$\left\| \sum_{n \geqslant 0} Q_n | f | \right\|_2 \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \| Q_n(| f |) \|_2 \leqslant \frac{b}{1-c} \| f \|_2 .$$

Donc, si F est élément de $L_0^2(\mu \otimes \Pi)$, l est élément de $L^2(\mu)$.

* Si la chaîne est récurrente Dœblin, la chaîne associée à la transition $\Pi^{(\alpha)} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n \Pi_{n+1}$, pour $\alpha < 1$, est récurrente Dœblin apériodique. Cette chaîne satisfait la condition précédente et une solution de l'équation de Poisson peut être construite à partir de $\Pi^{(\alpha)}$. Si F est dans $L_0^2(\mu \otimes \Pi)$, cette solution est dans $L^2(\mu)$.

Le théorème 3.1 s'applique aux chaînes récurrentes Dœblin pour les v. a. de $L_0^2(\mu \otimes \Pi)$; il généralise donc les résultats de Billingsley.

RÉFÉRENCES

[1] ALESKEVISCUS, Some limit theorems for sums of random variables defined on a homogenous regular Markov chain (Russian). *Litovsk. Math. Sb.*, t. **6**, 1966, p. 297-311.

[2] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*. John Wiley, 1968.

[3] E. BOLTHAUSEN, On rates of convergence in a randon central limit theorem and in the central limit for Markov chains. *Warscheinlichkeitstheorie verw-gebiete*, t. **38**, 1977, p. 279-286.

[4 a] R. COGBURN, *The central limit theorem for Markov processes. Six Berkeley symposium in probabilities*, 1972.

[4 b] COGBURN, A uniform theory for sums of Markov chain transition probabilities. *Ann. Prob.*, vol. **3**, n° 2, 1975, p. 191-214.

[5] L. LANDERS, ROGG, On the rate of convergence in the central limit theorem for Markov chains. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw-gebiete*, t. **35**, 1976, p. 57-63.

[6] MANDL, Estimation and control in Markov chains. *Advanced applied probabilities*, t. **6**, 1974, p. 40-60.

[7] NEVEU, Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris. *Ann. Inst. Fourier*, t. **22** (2), p. 85-130.

[8] NUMELIN, a) *A splitting technique for ϕ recurrent Markov chains ;* b) *On the Poisson equation for ϕ recurrent Markov chains* (à paraître).

[9] OREY, *Limit theorems for Markov chains transition probabilities.* Van Nostrand, 1971.

[10] G. H. POPESCU, A functional central limit theorem for a class of Markov chains. *Revue roumaine, math. pures et appliquées*, t. **21**, n° 6, 1976, p. 737-750. Bucarest.

[11] B. L. S. PRAKASA RAO, *a*) On the rate of convergence of estimations for Markov processes. *Wahrscheinlichkeitstheorie verw-gebiete*, t. **26**, 1973, p. 141-152 ; *b*) Remark on the rate of convergence in the random central limit theorem for mixing sequences. *Wahrscheinlichkeitstheorie verw-gebiete*, t. **31**, 1975, p. 157-160. Springer Verlag.

[12] R. REBOLLEDO, *a*) Remarque sur la convergence en loi des martingales vers des martingales continues II. *C. R. Acad. Sci. Paris* (séance du 12 septembre 1977) ; *b*) La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi de processus. *A paraître.*

[13] D. REVUZ, *Markov chains*, North Holland, 1975.

[14] SAULIS, STATULJAVICUS, An asymptotic expansion for the probabilities of large deviations of sums of random variables that are connected in a Markov chain. *Litovsk. Math. Sb*, t. **10**, 1960, p. 359-366.

[15] STATULJAVICUS, Limit theorems for sums of random variables that are connected in a Markov chain. I, II, III. *Litovsk. Math. Sb*, t. **9**, 1969, p. 345-362 ; t. **9**, 1969, p. 635-672 ; t. **10**, 1970, p. 161-169.

[16] STONE, Weak convergence of stochastic processes defined on semi infinite intervals. *Proc. A. M. S.*, vol. **14**, 1963.

(Manuscrit reçu le 26 avril 1978)