ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

F. LEDRAPPIER

# En général, un semi-flot spécial est exact

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 14, nº 4 (1978), p. 465-478
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_4_465_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,* Section B :
Vol. XIV, n° 4, 1978, p. 465-478. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

# En général, un semi-flot spécial est exact

par

**F. LEDRAPPIER** (*)
Université Pierre et Marie Curie. Laboratoire de Calcul des Probabilités,
4, place Jussieu. Tour 56, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Considérons un endomorphisme ergodique d'un espace de Lebesgue, une fonction intégrable minorée par $\delta > 0$, et le semi-flot spécial associé. Nous donnons une condition sur T pour que l'ensemble des fonctions telles que le semi-flot est exact soit générique dans $L^1_\delta$.

SUMMARY. — We consider the construction of a semi-flow under a function above an endomorphism of a Lebesgue space. For many systems we prove that the set of functions for which the semi-flow is exact is a set of second category in $L^1_\delta$.

Soit T un endomorphisme ergodique d'un espace de Lebesgue $(X, \mathscr{A}, m)$. Soient $\delta > 0$, $L^1_\delta$ l'espace des fonctions F intégrables sur X, minorées par $\delta$. Nous considérons l'action de $\mathbb{R}_+$ obtenue par la construction du semi-flot spécial $(\Omega, \bar{\mathscr{A}}, \bar{m}, \theta)$ sous une fonction F au-dessus du $(X, \mathscr{A}, m, T)$, et nous voulons étudier la classe $\mathscr{F}$ des fonctions F de $L^1_\delta$ telles que la $\sigma$-algèbre asymptotique $\bigwedge_t \theta_t^{-1}\bar{\mathscr{A}}$ est grossière.

Si $\mathscr{A} = T^{-1}\mathscr{A}$ (mod 0) la classe $\mathscr{F}$ est vide. Au contraire si il existe une partition P, « assez » indépendante de $T^{-1}\mathscr{A}$ et telle que $\mathscr{A} = \sigma(T^{-n}P, n \geq 0)$, différentes conditions assurent que certaines fonctions appartiennent à $\mathscr{F}$ ([*2*], [*10*], [*3*]).

(*) Membre du Laboratoire associé au C. N. R. S., n° 224 « Processus Stochastiques et Applications ».

Nous ferons l'hypothèse suivante sur la décroissance des $T^{-n}\mathscr{A}$ :

Le système $(X, \mathscr{A}, m, T)$ satisfait la condition (C) si $\mathscr{A} \neq T^{-1}\mathscr{A}$ (mod 0) et s'il existe une suite $A_n$ croissante de partitions finies, engendrant $\mathscr{A}$ et vérifiant.

$$H(A_n \mid \sigma(T^{-p}A_n, p > 0)) - H(A_n \mid T^{-1}\mathscr{A}) \to 0 (n \to \infty)$$

cf. (Roklin [7]).

Nous avons alors le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — Sous la condition (C), la classe $\mathscr{F}$ des fonctions telles que la $\sigma$-algèbre $\bigwedge_t \theta_t^{-1}\mathscr{A}$ est grossière est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $L_\delta^1$.

La démonstration que la classe $\mathscr{F}$ est un $G_\delta$ repose sur une formule explicite de l'espérance conditionnelle par rapport à $\theta_t^{-1}\bar{\mathscr{A}}$ (cf. th. 2 § 1).

D. Ornstein et M. Smorodinsky ([5]) ont montré que le flot spécial bâti sous F est un K-flot pour un ensemble dense de fonctions F dans $L^1$. Nous avons besoin ici d'étendre ce résultat à un semi-flot, autrement dit de considérer les fonctions mesurables par rapport à une sous $\sigma$-algèbre décroissante (§ 4). Pour cela, il nous faut montrer un « théorème de Sinaï relativisé » (§ 3). Nous montrons ensuite que la classe $\mathscr{F}$ est dense grâce à la condition (C).

## 1. NOYAU ASSOCIÉ A UN SEMI-FLOT SPÉCIAL

Soit T un endomorphisme surjectif d'un espace de Lebesgue $(X, \mathscr{A}, m)$.

PROPOSITION 1. — Soit P( , ) un noyau de transition de $(X, \mathscr{A})$ sur $(X, \mathscr{A})$ vérifiant.

(*) pour tout A de $\mathscr{A}$ $\int P(x, A)dm(x) = m(A)$

(**) pour $m$ presque tout $x$ de X, pour tous A et B de $\mathscr{A}$

$$P(x, A \cap T^{-1}B) = 1_B(x)P(x, A)$$

Alors la famille $x \to P(Tx, .)$ est une famille de probabilités conditionnelles régulières pour la $\sigma$-algèbre $T^{-1}\mathscr{A}$.

*Démonstration.* — Il faut vérifier les propriétés suivantes :

*i*) pour tout $x$, $P(Tx, .)$ est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$

*ii*) pour tout A de $\mathscr{A}$, $x \to P(Tx, A)$ est $T^{-1}\mathscr{A}$ mesurable *iii*) pour tous A, B de $\mathscr{A}$, $m(A_\cap T^{-1}B) = \int_{T^{-1}B} P(Tx, A)dm(x)$

Les propriétés *i*) et *ii*) sont évidentes, la propriété *iii*) se déduit du calcul suivant :

$$\begin{aligned} m(A_\cap T^{-1}B) &= \int P(x, A_\cap T^{-1}B)dm(x) \quad \text{d'après } (*) \\ &= \int_B P(x, A)dm(x) \qquad \text{d'après } (**) \\ &\int_{T^{-1}B} P(Tx, A)dm(x) \quad \text{par invariance de } m \end{aligned}$$

Un noyau de transition satisfaisant $(*)$ et $(**)$ est dit associé à $(X, \mathscr{A}, m, T)$.

Soit P un noyau associé à $(X, \mathscr{A}, m, T)$, le noyau $P^n$ défini par récurrence par : $P^n(x, .) = \int P^{n-1}(y, .)P(x, dy)$ est associé à $(X, \mathscr{A}, m, T^n)$.

Remarquons que la condition $(**)$ peut s'écrire pour toute fonction $f$ mesurable bornée sur $X \times X$, $m$ presque tout $x$ de X,

$$(**)' \qquad \int f(y, Ty)P(x, dy) = \int f(y, x)P(x, dy)$$

Soient $\delta > 0$ et F une fonction intégrable minorée par $\delta$. Nous notons $\Omega_F$ le sous-ensemble de $X \times \mathbb{R}$ formé des $(x, s)$ tels que $0 \leq s < F(x)$, $\bar{\mathscr{A}}_F$ la trace sur $\Omega_F$ de la $\sigma$-algèbre produit de $\mathscr{A}$ par les boréliens de $\mathbb{R}$, $\bar{m}_F$ la trace sur $\Omega_F$ de la mesure produit de $m$ sur $(X, \mathscr{A})$ par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Le semi-flot spécial bâti sous F au-dessus de $(X, \mathscr{A}, m, T)$ est l'action ${}_F\theta$ de $\mathbb{R}_+$ définie par :

$${}_F\theta_t(x, s) = \quad T^p x, s + t - \sum_{i=0}^{p-1} F(T^i x)$$

sur l'ensemble des $(x, s)$ où

$$\sum_{i=0}^{p-1} F(T^i x) \leq s + t < \sum_{i=0}^{p} F(T^i x)$$

Nous noterons $(\Omega, \bar{\mathscr{A}}, \bar{m}, \theta)$ quand il n'y aura pas d'ambiguité sur la fonction F.

Le but de ce paragraphe est de donner un noyau associé à $(\Omega, \bar{\mathscr{A}}, \bar{m}, \theta_t)$.

Nous avons :

THÉORÈME 2. — Soit $P(x, .)$ une probabilité de transition associé à

$(X, \mathscr{A}, m, T)$. Pour F donnée le noyau $Q_t(\ ,\ )$ suivant est associé à $(\Omega, \bar{\mathscr{A}}, \bar{m}, T\theta_t)$ pour $(x, s)$ dans $\Omega$ et $\bar{A}$ $\bar{\mathscr{A}}$ mesurable, $Q_t((x, s), \bar{A})$ est donné par :

$$(***) \qquad Q_t((x, s), \bar{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int 1_{\bar{A}}\left(y, s + \sum_{i=0}^{n-1} F(T^i y) - t\right) P^n(x, dy)$$

*Démonstration.* — Il faut vérifier les propriétés suivantes :

*i*) pour tout $\bar{A}$ de $\bar{\mathscr{A}}$, $(x, s) \to Q_t((x, s), \bar{A})$ est $\bar{\mathscr{A}}$ mesurable

*ii*) $Q_t[(x, s), .]$ est $\bar{m}$ presque partout une mesure bornée

*iii*) pour tout $\bar{A}$ de $\bar{\mathscr{A}}$, $\int Q_t((x, s), \bar{A}) d\bar{m}(x, s) = \bar{m}(\bar{A})$

*iv*) pour tous $\bar{A}$, $\bar{B}$ dans $\bar{\mathscr{A}}$, $(x, s)$ dans $\Omega$,

$$Q_t((x, s), \bar{A} \cap \theta_t^{-1} \bar{B}) = 1_{\bar{B}}(x, s) Q_t((x, s), \bar{A}).$$

La propriété *i*) est évidente, pour vérifier *ii*) comme $Q_t((x, s), .)$ est donné par la somme d'une série de mesures positives, il suffit de vérifier que $Q_t((x, s), \Omega) < \infty$. Or nous avons :

$$Q_t((x, s), \Omega) = \lim_{p \to \infty} \sum_{n=0}^{p} P^n\left(x, \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} F_0 T^i < t - s \leq \sum_{i=0}^{n-1} F_0 T^i \right\}\right).$$

En appliquant la propriété $(**)$ à $P^{p-n}$ nous pouvons écrire pour $n \leq p$, A dans $\mathscr{A}$, $m$ presque tout $x$ dans X :

$$\begin{aligned} P^p(x, T^{-(p-n)}A) &= \int P^n(x, dy) P^{p-n}(y, T^{-(p-n)}A) \\ &= \int P^n(x, dy) 1_A(y) P^{p-n}(y, X) \\ &= P^n(x, A). \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$Q_t((x, s), \Omega) = \lim_{p \to \infty} \sum_{n=0}^{p} P^p\left(x, \left\{ \sum_{j=p-n+1}^{p-1} F_0 T^j < t - s \leq \sum_{j=p-n}^{p-1} F_0 T^j \right\}\right)$$

Nous avons à prendre la somme des $P^p(x, .)$ mesures d'ensembles disjoints, nous obtenons : $Q_t((x, s), \Omega) \leq 1$, ce qui prouve *ii*).

Pour vérifier *iii*), il suffit de montrer pour tout A de $\mathscr{A}$, $u > 0$, en notant : $A_u = \{ (x, s), x \in A, 0 \leq s < u, s < F(x) \}$,

$$\int Q_t((x, s), A_u) d\bar{m}(x, s) = \bar{m}(A_u).$$

Nous avons :

$$\int Q_t((x, s), A_u)d\bar{m}(x, s)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_x dm(x)\left(\int_0^{F(x)} ds\left(\int 1_{A_u}\left(y, s - t + \sum_{i=0}^{n-1} F(T^i y)\right)P^n(x, dy)\right)\right)$$

soit, en posant $B(n, s, t, u) = \left\{ y \mid 0 \leq s - t + \sum_{i=0}^{n-1} F(T^i y) < u_\wedge F(y) \right\}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_X dm(x)\int_A\left(\int_0^{F(x)} 1_B(y)ds\right)P^n(x, dy).$$

En utilisant $(**)'$ et $(*)$ pour chaque $P^n$ cette expression devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_A\left(\int_0^{F(T^n y)} 1_{B(n,s,t,u)}(y)ds\right)dm(y)$$

et il est facile de vérifier que :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{F(T^n y)} 1_{B(n,s,t,u)}(y)ds = u_\wedge F(y)$$

ce qui montre la formule demandée. Enfin la vérification de *iv*) est immédiate. Remarquons que si $\delta < 1$ et F est à valeurs entières, nous obtenons un noyau associé à la tour bâtie sous F au-dessus de $(X, \mathscr{A}, m, T)$.

## 2. LA CLASSE $\mathscr{F}$ EST UN G$\delta$

PROPOSITION 2. — Soit T un endomorphisme d'un espace de Lebesgue $(X, \mathscr{A}, m)$. La classe $\mathscr{F}$ des fonctions F telles que la $\sigma$-algèbre $\bigwedge_t {}_F\theta_t^{-1}\bar{\mathscr{A}}_F$ est grossière est une intersection dénombrable d'ouverts dans $L^1_\delta$.

*Démonstration.* — Remarquons d'abord qu'il existe une probabilité de transition, essentiellement unique associée à $(X, \mathscr{A}, m, T)$.

En effet soit R(, .) une famille de probabilités conditionnelles régulières pour la $\sigma$-algèbre $T^{-1}\mathscr{A}$ vérifiant donc presque partout :

$$R(x, A_\cap T^{-1}B) = 1_{T^{-1}B}(x)R(x, A)$$

L'application $x \to R(x, .)$ est $T^{-1}\mathscr{A}$ mesurable donc de la forme $P(Tx, .)$ pour une certaine probabilité de transition P( , ). La probabilité

P( , ) ainsi définie est associée à T. Nous allons déduire du théorème 2 des noyaux associés aux transformations ${}_{\mathrm{F}}\theta_t$ et estimer, d'après la proposition 1, les probabilités conditionnelles de tout $\bar{\mathrm{A}}$ de $\bar{\mathscr{A}}$ par rapport à $\theta_t^{-1}\bar{\mathscr{A}}$. Pour A dans $\mathscr{A}$, $q$ réel notons :

$\mathrm{A}_q = \{ (x, s) \mid x \in \mathrm{A}, 0 \leq s < q \}$. Soient A, A′ dans $\mathscr{A}$, $q$, $q'$, $t$ réels positifs, F dans $\mathrm{L}^1_\delta$. Notons D(A, A′, $q$, $q'$, $t$, F) la quantité :

$$\mathrm{D}(\mathrm{A}, \mathrm{A}', q, q', t, \mathrm{F}) = \int_{\mathrm{A}'_{q'}} \mathrm{Q}_t({}_{\mathrm{F}}\theta_t(x, s), \mathrm{A}_q) d\bar{m}_{\mathrm{F}}(x, s)$$

où Q est défini par la formule (***).

LEMME 1. — Fixons A, A′, $q$, $q'$, $t$. L'application F $\rightarrow$ D(A, A′, $q$, $q'$, $t$, F) est continue sur $\mathrm{L}^1_\delta$.

*Démonstration.* — Nous avons :

$$\mathrm{D}(\mathrm{A}, \mathrm{A}', q, q', t, \mathrm{F}) = \sum_{n,p \geq 0} \int_{\mathrm{A}'} dm(x) \left( \int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}^n(\mathrm{T}^p x, dy) b_{n,p}(x, y, t, \mathrm{F}) \right)$$

où $b_{n,p}(x, y, t, \mathrm{F})$ est la longueur de l'ensemble des $s$ compris entre 0 et $q'_\wedge \mathrm{F}(x)$ et tels que :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \mathrm{F}(\mathrm{T}^i x) \leq s + t < \sum_{i=0}^{p} \mathrm{F}(\mathrm{T}^i x)$$

et

$$0 \leq s - \sum_{i=0}^{p-1} \mathrm{F}(\mathrm{T}^i x) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{F}(\mathrm{T}^i y) < \mathrm{F}(y)_\wedge q$$

Si $p > \frac{t}{\delta} + 1$ ou si $p \leq \frac{t}{\delta} + 1$ et $n \geq \frac{t}{\delta} + 2$, il est immédiat que $b_{n,p} = 0$.

Pour les autres valeurs de $n$, $p$ soient F et G deux fonctions de $\mathrm{L}^1_\delta$. La différence $| b_{n,p}(x, y, t, \mathrm{F}) - b_{n,p}(x, y, t, \mathrm{G}) |$ est majorée par la mesure de l'ensemble des $s$, $0 \leq s < q'$, tels que l'une au moins des différences :

$$s - \mathrm{F}(x), \quad s + t - \sum_{i=0}^{p-1} \mathrm{F}(\mathrm{T}^i x), \quad s + t - \sum_{i=0}^{p} \mathrm{F}(\mathrm{T}^i x),$$

$$s - \sum_{i=0}^{p-1} \mathrm{F}(\mathrm{T}^i x) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{F}(\mathrm{T}^i y), \quad s - \sum_{i=0}^{p-1} \mathrm{F}(\mathrm{T}^i x) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{F}(\mathrm{T}^i y) - \mathrm{F}(y)_\wedge q,$$

change de signe si on change F en G. La mesure de cet ensemble est majorée par :

$$|F(x) - G(x)| + 3\left|\sum_{i=0}^{p-1} F(T^i x) - \sum_{i=0}^{p-1} G(T^i x)\right| + \left|\sum_{i=0}^{p} F(T^i x) - \sum_{i=0}^{p} G(T^i x)\right|$$

$$+ 2\left|\sum_{i=0}^{n-1} F(T^i y) - \sum_{i=0}^{n-1} G(T^i y)\right| + |F(y) - G(y)|$$

En sommant sur $n$, $p$ et en intégrant il vient :

$$|D(A, A', q, q', t, F) - D(A, A', q, q', t, G)|$$

$$\leq \sum_{n \leq \frac{t}{\delta}+2} \sum_{p \leq \frac{t}{\delta}+1} \int dm(x)\left(\int P^n(T^p x, dy)\, |b_{n,p}(x, y, t, F) - b_{n,p}(x, y, t, G)|\right)$$

$$\leq \sum_{n,p \leq \frac{t}{\delta}+2} (4p + 2n + 3) \int |F - G|\, dm .$$

D'où le lemme.

LEMME 2. — Fixons A, A′, $q$, $q'$. L'application

$$F \to \frac{\bar{m}_F ({}^A q)\, \bar{m}_F ({}^{A'} q')}{\int F\, dm} \text{ est continue sur } L^1_\delta .$$

*Démonstration.* — Immédiate.

D'après la proposition 1 et le théorème 2 d'autre part nous avons pour tout A, A′, $q$, $q'$, $t$, F :

$$D(A, A', q, q', t, F) = \int_{A'_{q'}} E_{\bar{m}_F}^{{}_t{}_F\theta_t^{-1}\bar{\mathscr{A}}_F} 1_{A_q}(x, s)\, d\bar{m}_F(x, s) .$$

Notons $\mathbb{B}_F$ la $\sigma$-algèbre $\bigwedge_t {}_F\theta_t^{-1}\bar{\mathscr{A}}_F$. Quand $n$ tend vers l'infini D(A, A′, $q$, $q'$, $n$, F) converge vers $\int_{A'_{q'}} E_{\bar{m}_F}^{\mathbb{B}_F} 1_{A_q}(x, s)\, d\bar{m}_F(x, s)$.

Appelons $\mathscr{C}$(A, A′, $q$, $q'$) l'ensemble des fonctions F de $L^1_\delta$ telles que :

$$\int_{A'_{q'}} E_{\bar{m}_F}^{\mathbb{B}_F} 1_{A_q}(x, s)\, d\bar{m}_F(x, s) = \frac{\bar{m}_F ({}^A q)\, \bar{m}_F ({}^{A'} q')}{\int F\, dm}$$

L'ensemble $\mathscr{C}$(A A′, $q$, $q'$) est l'ensemble où s'annule la limite d'une suite de fonctions continues (lemme 1 et 2), c'est une intersection dénombrable d'ouverts de $L^1_\delta$. Soit $\mathscr{A}_\sigma$ une algèbre dénombrable engendrant $\mathscr{A}$. La classe $\mathscr{F}$ coïncide avec :

$$\bigcap_{A \in \mathscr{A}_\sigma} \bigcap_{A' \in \mathscr{A}_\sigma} \bigcap_{qq' \in Q_+} \mathscr{C}(A, A', q, q').$$

La classe $\mathscr{F}$ est bien une intersection dénombrable d'ouverts.

## 3. THÉORÈME DE SINAÏ RELATIVISÉ

Soient $\pi$ un vecteur de probabilité. L'entropie $H(\pi)$ est la quantité $H(\pi) = -\Sigma\pi(i)\log\pi(i)$.

Soient T un (endo)morphisme d'un espace de Lebesgue $(X, \mathscr{A}, m)$, $P = \{p_1, \ldots, p_q\}$ une partition mesurable de X, $\mathscr{C}$ une sous $\sigma$-algèbre T invariante de $\mathscr{A}$. Notons $\pi_p^{\mathscr{C}}(x)$ le vecteur (aléatoire) de probabilité défini par : $\pi_{p_i}^{\mathscr{C}}(x) = E_m^{\sigma(\mathscr{C}, T^jP, j<0)} 1_{P_i}(x)$, $1 \leq i < q$. L'entropie moyenne conditionnelle de la partition P par rapport à la $\sigma$-algèbre $\mathscr{C}$ est la quantité :

$$h(P \mid \mathscr{C}) = \int H(\pi_p^{\mathscr{C}}(x))dm(x)$$

Nous établirons le résultat suivant ( « théorème de Sinaï relativisé » (cf. [*8*], [*4*] et [*9*])).

THÉORÈME 3. — Soit T un automorphisme ergodique de l'espace de Lebesgue $(X, \mathscr{B}, \mu)$, $\mathscr{A}$ une sous $\sigma$-algèbre décroissante telle que : $\bigvee_n T^n\mathscr{A} = \mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ une sous $\sigma^-$ algèbre T invariante.

Soit $\pi$ un vecteur de probabilité $\pi = \pi_1, \ldots, \pi_p$, avec $H(\pi) \leq \sup\{h(P \mid \mathscr{C})$, P partition finie de X $\}$. Il existe une partition $\beta$, $\mathscr{A}$ mesurable distribuée comme $\pi$, telle que les partitions $T^i\beta (i \in \mathbb{N})$ sont indépendantes et engendrent une $\sigma$-algèbre indépendante de $\mathscr{C}$.

Si la $\sigma$-algèbre $\mathscr{C}$ est grossière, le théorème 3 est un théorème de Sinaï [*8*]. Si on ne demande pas à la partition d'être $\mathscr{A}$ mesurable, le résultat est dû à Ornstein [*4*]. Remarquons également que ce théorème 3 est utile pour généraliser le théorème de Sinaï au cas d'entropie infinie. Pour le démontrer, nous adapterons la démonstration d'Ornstein et Weiss du théorème de Sinaï (cf. [*6*]).

*Démonstration.* — Avec les notations précédentes, notons :

$$d(\pi, \pi') = \sum_i |\pi_i - \pi'_i|$$

la distance usuelle sur les vecteurs de probabilités et

$$D(\pi, P \mid \mathscr{C}) = \int d(\pi, \pi_p^{\mathscr{C}}(x))dm(x).$$

L'espace Z des partitions finies ordonnées est muni de la distance

$$| P - P' | = \sum_i m(P_i \Delta P'_i).$$

LEMME 3. — La fonction $D(\pi, P \mid \mathscr{C})$ est semi-continue inférieurement sur Z.

En effet (cf. [6] lemme 4) la fonction $D(\pi, P \mid \mathscr{C})$ est limite croissante de fonctions continues.

LEMME 4. — Soit $P_n$ une suite convergente vers P, de partitions à $p$ éléments telles que $D(\pi, P_n \mid \mathscr{C}) \to 0 (n \to \infty)$. Alors $D(\pi, P \mid \mathscr{C}) = 0$. Nous allons donc construire, en suivant [6], une suite convergente de partitions $P_n \mathscr{A}$ mesurables telles que $D(\pi, P_n \mid \mathscr{C})$ tende vers 0.

LEMME 5. — (Thouvenot [9]). Soit $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ ergodique, $\mathscr{C}$ une sous $\sigma$-algèbre T invariante, $\pi$ un vecteur de probabilité avec

$$H(\pi) \leq \sup \{ h(P \mid \mathscr{C}) \mid P \in Z \}.$$

Il existe une partition $\beta$ distribuée comme $\pi$, telle que les $T^i\beta$ soient indépendants et engendrent une $\sigma$-algèbre indépendante de $\mathscr{C}$.

LEMME 6. — ([6] lemme 6). Soit $\pi$ un vecteur de probabilité $H(\pi) > 0$. Il existe une suite $\pi_i$ avec :

*i)* $H(\pi_1) < H(\pi_2) < \ldots < H(\pi)$

*ii)* $d(\pi_i, \pi) \to 0 \ (i \to \infty)$

*iii)* Si $d(\pi', \pi_{i+1}) \leq 2d(\pi_i, \pi_{i+1})$, alors $H(\pi') < H(\pi)$

*iv)* $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} d(\pi_i, \pi_{i+1}) < \infty$

LEMME 7. — Soient $\pi = \{ \pi(1), \ldots, \pi(p) \}$ un vecteur de probabilité fixé, P une partition avec $p$ atomes, $\mathscr{A}$ mesurable et telle que :

$$h(P \mid \mathscr{C}) \leq \sup_{Q \in Z} h(Q \mid \mathscr{C}) - c, \qquad \delta \text{ tel que } H(\delta, 1 - \delta) < c.$$

Supposons que l'ensemble des $x$ tels que pour certains indices $i(x)$,

$j(x)$ on ait : $\pi^{\mathscr{C}}_{p_i}(x) - \pi(i) > \delta$, $\pi^{\mathscr{C}}_{p_j}(x) - \pi(j) < -\delta$ est de mesure plus grande que $\delta$, alors il existe $\bar{\mathrm{P}}$ dans $\mathscr{A}$ avec

*i*) $\mathrm{D}(\pi, \bar{\mathrm{P}} \mid \mathscr{C}) \leq \mathrm{D}(\pi, \mathrm{P} \mid \mathscr{C}) - \delta^2$

*ii*) $\mid \mathrm{P} - \bar{\mathrm{P}} \mid \leq 4(\mathrm{D}(\pi, \mathrm{P} \mid \mathscr{C}) - \mathrm{D}(\pi, \bar{\mathrm{P}} \mid \mathscr{C}))$.

*Démonstration.* — (cf. [*6*] lemme 9). Soit $\mathscr{D}$ la $\sigma$-algèbre invariante engendrée par $\mathscr{C}$ et P.

Soit Q une partition $\mathrm{Q} = \{ \mathrm{C}, \mathrm{X} \backslash \mathrm{C} \}$ telle que $\mu(\mathrm{Q}) = \delta$, les $\mathrm{T}^i\mathrm{Q}$ sont indépendants et engendrent une $\sigma$-algèbre indépendante de $\mathscr{D}$ (lemme 5). Soit, pour tout couple $(i, j)$, $\mathrm{B}_{i_j}$ l'ensemble où $i(x) = i$ et $j(x) = j$. $\mathrm{B}_{i_j}$ est $\mathscr{D}$ mesurable.

Posons :

$$\mathrm{P}'_i \cap \mathrm{B}_{i_j} = (\mathrm{P}_i \cap \mathrm{B}_{i_j}) \backslash (\mathrm{P}_i \cap \mathrm{B}_{i_j} \cap \mathrm{C})$$
$$\mathrm{P}'_j \cap \mathrm{B}_{i_j} = (\mathrm{P}_j \cap \mathrm{B}_{i_j}) \cup (\mathrm{P}_i \cap \mathrm{B}_{i_j} \cap \mathrm{C})$$

Nous avons immédiatement sur $\mathrm{B}_{i_j}$ :

$$\mathrm{E}_\mu^{\sigma(\mathscr{C}, \mathrm{T}^k\mathrm{P}\, k<0)} 1_{p'_i} = \pi^{\mathscr{C}}_{p_i}(x) - \delta$$
$$\mathrm{E}_\mu^{\sigma(\mathscr{C}, \mathrm{T}^k\mathrm{P}\, k<0)} 1_{p'_j} = \pi^{\mathscr{C}}_{p_j}(x) + \delta$$

et

$$\mid \mathrm{P} - \mathrm{P}' \mid = \sum_e \mu(\mathrm{P}_e \Delta \mathrm{P}'_e) =$$
$$\sum_e \int \mathrm{E}^{\sigma(\mathscr{C}, \mathrm{T}^k\mathrm{P}\, k<0)} \mid 1_{\mathrm{P}_e} - 1_{\mathrm{P}'_e} \mid d\mu = 2\delta \sum_{ij} \mu(\mathrm{B}_{ij})$$

De même :

$$\int d(\pi, \{ \mathrm{E}_\mu^{\sigma(\mathscr{C}, \mathrm{T}^k\mathrm{P}\, k<0)} 1_{\mathrm{P}'_i} \}) d\mu = \mathrm{D}(\pi, \mathrm{P} \mid \mathscr{C}) - 2\delta \sum_{ij} \mu(\mathrm{B}_{i_j}) .$$

Par indépendance des $\mathrm{T}^k\mathrm{Q}$, $k < 0$ et le fait que $\sigma(\mathscr{C}, \mathrm{T}^k\mathrm{P}', k < 0)$ est moins fine que $\sigma(\mathscr{C}, \mathrm{T}^k\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}, k < 0)$, nous avons construit P′ avec :

$$\mathrm{D}(\pi, \mathrm{P} \mid \mathscr{C}) - \mathrm{D}(\pi, \mathrm{P}' \mid \mathscr{C}) \geq \mid \mathrm{P} - \mathrm{P}' \mid \geq 2\delta^2 .$$

Choisissons enfin $\eta$ tel que $\eta > \delta^2$ et si $\mid \bar{\mathrm{P}} - \mathrm{P}' \mid < \eta$ alors

$$\mathrm{D}(\pi, \bar{\mathrm{P}} \mid \mathscr{C}) \leq \mathrm{D}(\pi, \mathrm{P}' \mid \mathscr{C}) + \delta^2 \qquad \text{(lemme 3)} .$$

Les propriétés de P′ ne changent pas si on change Q en $\mathrm{T}^{-m}\mathrm{Q}$. Choisissons $m$ assez grand pour qu'il existe $\bar{\mathrm{Q}}$ $\mathscr{A}$ mesurable avec $\mid \bar{\mathrm{Q}} - \mathrm{T}^{-m}\mathrm{Q} \mid < \eta$ et faisons la construction précédente avec $\bar{\mathrm{Q}}$ au lieu de Q. Nous obtenons $\mathrm{D}(\pi, \mathrm{P} \mid \mathscr{C}) - \mathrm{D}(\pi, \bar{\mathrm{P}} \mid \mathscr{C}) \geq \delta^2$ et

$$\mid \mathrm{P} - \bar{\mathrm{P}} \mid \leq \mathrm{D}(\pi, \mathrm{P} \mid \mathscr{C}) - \mathrm{D}(\pi, \bar{\mathrm{P}} \mid \mathscr{C}) + \delta^2 + \eta$$
$$\leq (\mathrm{D}(\pi, \mathrm{P} \mid \mathscr{C}) - \mathrm{D}(\pi, \bar{\mathrm{P}} \mid \mathscr{C})) . \qquad \text{Q. E. D.}$$

LEMME 8. — Soient $\delta_2$, $C > 0$ tels que si $d(\pi^1, \pi_2) < \delta_2$,

$$H(\pi^1) \leq \sup_{Q \in Z} h(Q \mid \mathscr{C}) - C .$$

Pour tout $\delta_1 > 0$, il existe $\delta$ tel que si P est une partition avec $p$ éléments $\mathscr{A}$ mesurable et telle que : $\delta_1 \leq D(\pi_2, P \mid \mathscr{C}) < \delta_2$, alors peut trouver $\bar{P}$ $\mathscr{A}$ mesurable satisfaisant :

*i*) $D(\pi_2, \bar{P} \mid \mathscr{C}) \leq D(\pi_2, P \mid \mathscr{C}) - \delta$

*ii*) $\mid P - \bar{P} \mid \leq 4(\mid D(\pi_2, P \mid \mathscr{C}) - D(\pi_2, \bar{P} \mid \mathscr{C}))$.

*Démonstration.* — (cf. [*6*] lemme 8).

Il suffit de vérifier que la partition P et le vecteur $\pi_2$ satisfont aux hypothèses du lemme 7 avec $\bar{\delta}$ suffisamment petit, et de prendre $\delta = \bar{\delta}^2$.

LEMME 9. — Il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que si $D(\pi_1, P_1 \mid \mathscr{C}) < \varepsilon_1$ pour une partition $P_1\mathscr{A}$ mesurable à $p$ éléments, pour tout $\varepsilon_2 > 0$, il existe $P_2$ A mesurable à $p$ éléments avec :

*i*) $D(\pi_2, P_2 \mid \mathscr{C}) < \varepsilon_2$

*ii*) $\mid P_1 - P_2 \mid \leq 4d(\pi_1, \pi_2)$.

*Démonstration.* — (cf. [*6*] lemme 7).

Prenons $\varepsilon_1 = d(\pi_1, \pi_2)$. D'après le lemme 6 *iii*) $\delta_2 = 2d(\pi_2, \pi_1)$ satisfait aux hypothèses du lemme 8 et

$$D(\pi_2, P_1 \mid \mathscr{C}) \leq D(\pi_1, P_1 \mid \mathscr{C}) + d(\pi_1, \pi_2) < \delta_2 .$$

En choisissant $\delta_1 = \varepsilon_2$, le lemme 8 montre que nous pouvons obtenir $D(\pi_2, P_2 \mid \mathscr{C}) \leq \varepsilon_2$ et avoir $\mid P_1 - P_2 \mid \leq 4D(\pi_2, P_1 \mid \mathscr{C}) \leq 4d(\pi_1, \pi_2)$.

Nous pouvons maintenant montrer le théorème. Soit $\pi_i$ donné par le lemme 6 et $\varepsilon_i = d(\pi_i, \pi_{i+1})$. Nous commençons par construire $P_0$ telle que $D(\pi_1, P_0 \mid \mathscr{C}) = 0$ (lemme 5) puis nous prenons $P_1$ $\mathscr{A}$ mesurable suffisamment proche de $T^{-m}P_0$ pour que $D(\pi_1, P_1 \mid \mathscr{C}) < \varepsilon_1$. Le lemme 9 nous donne alors une suite convergente de partitions $P_n$ $\mathscr{A}$ mesurable et telle que $D(\pi, P_n \mid \mathscr{C})$ tende vers 0.

D'après le lemme 4, la partition $\beta$ limite des $P_n$ est la partition cherchée.

## 4. LA CLASSE $\mathscr{F}$ EST DENSE

Nous rappelons d'abord les propriétés suivantes :

Notons $\pi(X, \mathscr{A}, m, T)$ la $\sigma$-algèbre engendrée par les partitions finies d'entropie moyenne nulle.

**Proposition** 3. — (Roklin [7] p. 38). Si le système $(X, \mathscr{A}, m, T)$ satisfait (C), alors les $\sigma$-algèbres $\bigwedge_n T^{-n}\mathscr{A}$ et $\pi(X, \mathscr{A}, m, T)$ coïncident.

**Proposition** 4. — (Blanchard [*1*] proposition 2-1). Considérons un système $(X, \mathscr{A}, m, T)$ satisfaisant (C), F une fonction intégrable sur $(X, \mathscr{A}, m)$ et $(\Omega, \bar{\mathscr{A}}, \bar{m}, \theta)$ le semi-flot spécial bâti sous F au-dessus de $(X, \mathscr{A}, m, T)$. Le système $(\Omega, \bar{\mathscr{A}}, \bar{m}, \theta_t)$ satisfait la condition (C).

Un flot $(\Omega, \mathscr{A}, m, \theta)$ est appelé un K-flot si la $\sigma$-algèbre $\pi(X, \mathscr{A}, m, \theta_t)$ est grossière.

Le théorème 1 se montre en utilisant les propositions 2, 3, 4 et la proposition 5 ci-dessous :

**Proposition** 5. — Soit T un automorphisme de l'espace de Lebesgue $(X, \mathscr{B}, \mu)$ $\mathscr{A}$ une sous $\sigma$-algèbre propre croissante de $\mathscr{B}$ telle que $\bigvee_n T^n\mathscr{A} = \mathscr{B}$. La classe des fonctions F$\mathscr{A}$ mesurables, intégrables, minorées par $\delta$ telles que le flot spécial bâti sous F est un K-flot, est *dense* dans $L^1_\delta(\mathscr{A}, \mu)$.

Si $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ la proposition 5 est due à Ornstein et Smorodinsky [5]). Nous allons d'ailleurs suivre leur démonstration en construisant F dans $\mathscr{A}$.

Les outils sont les lemmes suivants de [5] :

**Lemme** 10. — ([5] lemme 2). Soit T une transformation ergodique d'entropie positive. Soient P, Q deux partitions finies telles que : $h(P) < h(P_\vee Q)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition finie $\bar{Q}$ avec $|Q - \bar{Q}| < \varepsilon$, $h(P_\vee \bar{Q}) < h(P_\vee Q)$.

**Lemme** 11. — ([5] lemme 5). Soit $T_0$ un automorphisme ergodique de l'espace $(X_0, \mathscr{B}_0, \mu_0)$. Soient P une partition finie génératrice de $X_0$ et $f$ une fonction positive P mesurable. Soit $(X_1, \mathscr{B}_1, \mu_1, T_1)$ le schéma de Bernoulli engendré par des variables aléatoires $\xi_i$, $i$ entier, indépendantes équidistribuées telles que $\xi_0$ est non arithmétique et bornée. Soit U le flot spécial bâti au-dessus du système produit

$$(X_0 \times X_1, \mathscr{B}_0 \times \mathscr{B}_1, \mu_0 \times \mu_1, T_0 \times T_1)$$

sous la fonction $g$, $g(x_0, x_1) = f(x_0) + \xi_0(x_1)$. Le flot U est un K-flot.

**Lemme** 12. — Soient T un automorphisme ergodique de $(X, \mathscr{B}, \mu)$, $\mathscr{A}$ une sous $\sigma$-algèbre propre de $\mathscr{B}$ croissante et telle que $\bigvee_n T^n\mathscr{A} = \mathscr{B}$, $\varepsilon > 0$. Il existe F $\mathscr{A}$ mesurable $1 \leq F \leq 1 + \varepsilon$, telle que le flot bâti sous F au-dessus de $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ est un K-flot.

*Démonstration* (cf. [5] Théorème 2). — Remarquons d'abord que le système est d'entropie non nulle car il existe une $\sigma$-algèbre strictement croissante. Soit $A_n$ une suite dense dans $\mathscr{A}$. Par application répétée du lemme 10 et du théorème 3, nous construisons une suite d'ensembles $A'_n$, $D_n \mathscr{A}$ mesurables tels que la suite $A'_n$ est dense, $0 < \mu(D_n) < \frac{1}{2^n}$, les ensembles $T^i D_n$ sont indépendants et engendrent une $\sigma$-algèbre indépendante de

$$\sigma\left(T^j D_k \ k < n, \quad T^j A'_k \ k \leq n\right).$$

Choisissons $\varepsilon'$ irrationnel $\varepsilon' < \varepsilon$, et posons $F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(1 + \varepsilon')^{1_{D_n}}$.

Le flot est alors un K-flot d'après le lemme 11.

*Démonstration de la proposition 5.* — Soit F une fonction de $L^1_\delta$, $\varepsilon > 0$. Nous allons construire $F' \mathscr{A}$ mesurable avec $\int |F' - F| < \varepsilon$, $F' \geq \delta$ et telle que le flot spécial bâti sous $F'$ soit un K-flot. Choisissons d'abord $G \geq \delta$ mesurable prenant des valeurs proportionnelles à un nombre $d > 0$ et telle que $\int |G - F| < \varepsilon/2$. Considérons la tour $(X_G, \mathscr{B}_G, m_G, T_G)$ bâtie sous G au-dessus de $(X, \mathscr{A}, m)$ et soit $\mathscr{A}_G$ la sous $\sigma$-algèbre de $\mathscr{B}_G$ engendrée par les fonctions $f(x)b(n)$, $f \mathscr{A}$ mesurable.

La $\sigma$-algèbre $\mathscr{A}_G$ est décroissante par $T_G$ et vérifie $\bigvee_n T^n_G \mathscr{A}_G = \mathscr{B}_G$.

Soit $G'$ une fonction $\mathscr{A}_G$-mesurable, satisfaisant $1 \leq G' \leq 1 + \varepsilon/2d$ et telle que le flot spécial bâti sous $G'$ au-dessus de $(X_G, \mathscr{B}_G, m_G, T)$ soit un K-flot. La fonction $F' = G + d(G' - 1)$ est la fonction cherchée.

En appliquant la proposition 5 à l'extension naturelle d'un endomorphisme, nous obtenons :

COROLLAIRE. — Soit T un endomorphisme de l'espace de Lebesgue $(X, \mathscr{A}, m)$ tel que $\mathscr{A} \neq T^{-1}\mathscr{A}$ (mod. 0). La classe des fonctions F intégrables, minorées par $\delta$ et telles que la $\sigma$-algèbre $\pi(\Omega, \bar{\mathscr{A}}, \bar{m}, \theta)$ est grossière est dense dans $L^1_\delta(\mathscr{A}, m)$.

D'après les propositions 3 et 4, la classe $\mathscr{F}$ coïncide avec la classe des fonctions F de $L^1_\delta$ telles que la $\sigma$-algèbre $\pi(\Omega, \bar{\mathscr{A}}, \bar{m}, \theta)$ est grossière. Cette classe est dense d'après le corollaire et ceci achève la démonstration du théorème 1.

Remarquons également que en jouant sur $\mu(D_n)$ dans le lemme 12, il est possible de construire une tour aussi petite que l'on veut qui soit K-système. Le théorème 1 est encore vrai pour la classe des fonctions $\mathscr{F}$ à valeurs entières, l'espace $\Omega(X \times N)$ et la mesure $\bar{m}$ produit de $m$ sur X et de la mesure de comptage sur X, c'est-à-dire pour les tours de X.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] F. BLANCHARD, Partitions extrêmales des flots d'entropie finie. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, t. **36**, 1976, p. 129-136.
[2] B. M. GUREVIC, Some existence conditions for K-decompositions for special flows. *Trans. Moscow Math. Soc.*, t. **17**, 1967, p. 99-120.
[3] M. RATNER, Bernoulli flows over maps of the interval (preprint).
[4] D. ORNSTEIN, Two Bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic. *Advances in Math.*, t. **5**, 1970, p. 339-349.
[5] D. S. ORNSTEIN and M. SMORODINSKY, Ergodic flows of positive entropy can be time changed to become K-flows. *Israël Journal of Maths*, t. **26**, 1977, p. 75-83.
[6] D. S. ORNSTEIN and B. WEISS, Unilateral codings of Bernoulli systems. *Israël Journal of Maths*, t. **21**, 1975, p. 159-166.
[7] V. A. ROKLIN, Lectures on the entropy theory of measure preserving transformations. *Russian Maths Surveys*, t. **22**, 1967, p. 1-52.
[8] Ya G. SINAI, Weak isomorphism of transformations with invariant measure. *Math. S. B.*, t. **63**, 1964, p. 23-42 ; *A. M. S. Translations*, t. **57**, 1966, p. 123-143.
[9] J.-P. THOUVENOT, Quelques propriétés des systèmes dynamiques qui se décomposent en un produit de deux systèmes dont l'un est un schéma de Bernoulli. *Israël Journal of Maths*, t. **21**, 1975, p. 177-207.
[10] H. TOTOKI, On a class of special flows. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, t. **15**, 1970, p. 157-167.

*(Manuscrit reçu le 12 juin 1978)*