ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. COCOZZA
M. ROUSSIGNOL

Unicité d'un processus de naissance et mort sur la droite réelle

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, nº 1 (1979), p. 93-106
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_1_93_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XV, n° 1, 1979, p. 93-105. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Unicité d'un processus de naissance et mort sur la droite réelle

par

C. COCOZZA

et

M. ROUSSIGNOL
Laboratoire de Probabilités, Tour 56,
Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75221 Paris Cedex 05

ABSTRACT. — The purpose of this article is to give a theorem of existence and uniqueness of a birth and death process on the real line. We first define a coupling which assume that two processes are as close as possible. Then we use an iteration method to prove the uniqueness theorem under hypothesis which are Lipschitz-like conditions. Examples of application of the theorem are given.

I. INTRODUCTION

Dans l'étude d'un processus de naissance et mort sur la droite réelle associé à un générateur de la forme :

$$Lf(\eta) = \int b(x, \eta)[f(\eta \cup x) - f(\eta)]dx + \sum_{x \in \eta} d(x, \eta)[f(\eta \backslash x) - f(\eta)],$$

le premier problème à résoudre est celui de l'existence et de l'unicité du processus markovien admettant L comme générateur infinitésimal. Dans [*2*], Holley et Stroock ont jeté les bases de cette étude. Ils ont montré que sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$, il existe un seul processus markovien de générateur L si les coefficients b et d sont bornés. Sur $\mathbb{R}$ tout entier, ils ont obtenu l'existence d'un processus markovien de générateur L si les coefficients b et d sont bornés et satisfont des conditions naturelles de continuité. Malheureusement, ils n'ont prouvé l'unicité que dans un cas particulier : lorsque les coefficients b et d ne dépendent que des particules les plus proches. Dans [*1*], C. Cocozza et C. Kipnis ont montré également l'existence et l'unicité du processus avec interaction selon les plus proches particules d'une manière plus directe, en raisonnant trajectoire par trajectoire. Nous donnons ici, dans le cas général, un théorème d'unicité obtenu par une méthode de contraction et donc avec des hypothèses du type Lipschitz.

Nous utiliserons les notations suivantes :

— E est l'ensemble des configurations de particules, soit l'espace des mesures ponctuelles simples sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence simple.

— Ω est l'espace des évolutions temporelles des configurations de particules, soit l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+$ dans E continues à droite et limitées à gauche; nous le munissons de la topologie de Skorokhod.

On note η_t l'application coordonnée en t, $\mathfrak{F}_t = \sigma(\eta_s(\Gamma), \Gamma \subset \mathbb{R}, \Gamma$ borélien, $s \leq t)$, $\mathfrak{F} = \bigvee_t \mathfrak{F}_t$.

— $\mathscr{D}(E)$ est l'ensemble des fonctions bornées, continues de E dans $\mathbb{R}$, qui ne dépendent des η dans E que par l'intermédiaire de la restriction de η à un compact de $\mathbb{R}$ et telles que $\sup_{\eta \in E} \int \eta(dx) \mid f(\eta \backslash x) - f(\eta) \mid < +\infty$. Soient $b(.,.)$ et $d(.,.)$ deux applications de $\mathbb{R} \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ satisfaisant les hypothèses :

$$
(H_0) \left\{ \begin{array}{l}
.\ \sup_{x,\eta} b(x, \eta) < +\infty \quad ; \quad \sup_{x,\eta} d(x, \eta) < +\infty \\
.\ \forall \mu \in E \quad \text{si} \quad \mu_n \to \mu \quad \text{alors} \quad b(., \mu_n) \to b(., \mu) \\
.\ \forall (\mu, y) \in E \times \mathbb{R}, (\mu_n, y_n) \in E \times \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad \mu(y) = 1, \mu_n(y_n) = 1, \\
\qquad \mu_n \to \mu,\ y_n \to y \quad \text{alors} \quad d(y_n, \mu_n) \to d(y, \mu).
\end{array} \right.
$$

Si f appartient à $\mathscr{D}(E)$, on pose :

$$
Lf(\eta) = \int b(x, \eta)[f(\eta \cup x) - f(\eta)]dx + \int d(x, \eta)[f(\eta \backslash x) - f(\eta)]\eta(dx)
$$

où $\eta \cup x$ (resp. $\eta \backslash x$) est la mesure ponctuelle $\eta + \varepsilon_x$ lorsque $\eta(x) = 0$ (resp. $\eta - \varepsilon_x$ lorsque $\eta(x) = 1$).

Étant donné une configuration η^0, nous cherchons à résoudre le problème des martingales associé à L et d'état initial η^0, c'est-à-dire étudier les probabilités P sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ vérifiant :

. $P(\eta_0 = \eta^0) = 1$,

. $f(\eta_t) - \int_0^t Lf(\eta_s)ds$ est une $(\mathfrak{F}_t, P)$ martingale pour toute fonction f appartenant à $\mathscr{D}(E)$.

D'après [2], les hypothèses (H_0) garantissent l'existence d'une solution. Nous allons montrer l'unicité de cette solution sous les hypothèses supplémentaires :

$$(H_1) \quad \begin{cases} \forall(\eta, \xi) \in E \times E \, | \, b(x, \eta) - b(x, \xi) \, | \leq \int m(du) 1_{\{\eta|[x,x+u] \neq \xi|[x,x+u]\}} \\ 1_{\{\eta(x)=\xi(x)=1\}} \, | \, d(x, \eta) - d(x, \xi) \, | \leq \int m(du) 1_{\{\eta|[x,x+u] \neq \xi|[x,x+u]\}} \end{cases}$$

où $m(du)$ est une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}$ telle que : $\int um(du) < \infty$; si f est une fonction positive intégrable par rapport à m et si m_a est la mesure transfatée de a, on a pour $a \geq 0$ $\int_{u \geq 0} f(u)m_a(du) \leq \int_{u \geq 0} f(u)m(du)$ et pour $a \leq 0$ $\int_{u \leq 0} f(u)m_a(du) \leq \int_{u \leq 0} f(u)m(du)$; $\eta\,|_{[x,u]}$ est la restriction de η à l'ensemble $[x, u]$ (resp. $[u, x]$) si $x \leq u$ (resp. $x > u$).

Ces hypothèses sont satisfaisantes car elles incluent les coefficients à portée finie et quelques exemples naturels. D'autre part, elles sont semblables aux conditions de Liggett [4] dans le cas d'évolutions de systèmes infinis de particules sur un espace dénombrable (d'ailleurs la transcription de ce travail dans ce cadre donne une nouvelle démonstration de l'unicité sous les conditions de Liggett).

II. EXISTENCE D'UN COUPLAGE ENTRE DEUX SOLUTIONS

Dans ce paragraphe, nous faisons uniquement les hypothèses (H_0). Soient deux solutions P_1 et P_2 au problème des martingales associé à L et d'état initial η^0 et ξ^0 respectivement. Nous allons construire une probabilité $\tilde{P}$ sur $(\tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega, \tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F})$ admettant P_1 et P_2 comme marginales et résolvant le problème des martingales associé à la configuration initiale (η^0, ξ^0) et au générateur $\tilde{L}$ défini par :

pour toute fonction f appartenant à $\mathscr{D}(\mathrm{E} \times \mathrm{E})$ et tout élément (η, ξ) de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{L}}f(\eta, \xi) = & \int dx[b(x, \eta) - b(x, \eta) \wedge b(x, \xi)][f(\eta \cup x, \xi) - f(\eta, \xi)] \\
& + \int dx[b(x, \xi) - (b(x, \eta) \wedge b(x, \xi))][f(\eta, \xi \cup x) - f(\eta, \xi)] \\
& + \int dx(b(x, \eta) \wedge b(x, \xi))[f(\eta \cup x, \xi \cup x) - f(\eta, \xi)] \\
& + \int \eta(dx)[d(x, \eta) - 1_{\{\eta(x) = \xi(x)\}}(d(x, \eta) \wedge d(x, \xi))][f(\eta \backslash x, \xi) - f(\eta, \xi)] \\
& + \int \xi(dx)[d(x, \xi) - 1_{\{\eta(x) = \xi(x)\}}(d(x, \eta) \wedge d(x, \xi))][f(\eta, \xi \backslash x) - f(\eta, \xi)] \\
& + \int \eta(dx)\, 1_{\{\eta(x) = \xi(x)\}}(d(x, \eta) \wedge d(x, \xi))[f(\eta \backslash x, \xi \backslash x) - f(\eta, \xi)]
\end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème, nous restreignons d'abord P_1 et P_2 aux évolutions dans une boîte compacte, nous effectuons un couplage sur ces restrictions et ensuite nous montrons que ce couplage tend vers la solution cherchée lorsque la boîte grandit.

Soient donc $\mathrm{B}_n = [-n, +n]$, $\mathfrak{F}_s^n = \sigma(\eta_u(\Gamma), \Gamma \subset \mathrm{B}_n, \Gamma$ borélien, $u \leq s)$, $\widehat{\mathfrak{F}}_s^n = \sigma(\eta_u(\Gamma), \Gamma \subset \mathrm{B}_n^c, \Gamma$ borélien, $u \leq s)$, $\mathfrak{F}^n = \bigvee_s \mathfrak{F}_s^n$, $\widehat{\mathfrak{F}}^n = \bigvee_s \widehat{\mathfrak{F}}_s^n$. On se donne en outre une probabilité P sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ et un élément η^0 de E.

On numérote les points de la mesure ponctuelle η en mettant l'indice 0 au premier point à gauche de 0 et on note $(x_p(\eta), p \in \mathbb{Z})$ les points ainsi numérotés. On pose alors :

$$\begin{aligned}
b_n(x, s) &= \mathrm{E}^{\mathfrak{F}_s^n}[b(x, \eta_s)] \times 1_{\mathrm{B}_n}(x) \\
d_n(x, s) &= \sum_p \mathrm{E}^{\mathfrak{F}_s^n}[d(x_p(\eta_s), \eta_s)] 1_{\{x = x_p(\eta_s) \in \mathrm{B}_n\}},
\end{aligned}$$

on définit la probabilité P_n sur Ω par :

$$\begin{gathered}
\mathrm{P}_n = \mathrm{P} \text{ sur } \mathfrak{F}_n \\
\mathrm{P}_n(\eta_t |_{\mathrm{B}_n^c} = \eta^0 |_{\mathrm{B}_n^c}, \forall t) = 1,
\end{gathered}$$

et l'opérateur L_s^n sur $\mathscr{D}(\mathrm{E})$ par :

$$\begin{aligned}
(1) \qquad \mathrm{L}_s^n f(\eta_s) = & \int dx b_n(x, s)[f(\eta_s \cup x) - f(\eta_s)] \\
& + \int \eta_s(dx) d_n(x, s)[f(\eta_s \backslash x) - f(\eta_s)]
\end{aligned}$$

LEMME 1. — Si P résout le problème des martingales associé à L d'état initial η^0, alors $f(\eta_t) - \int_0^t L_s^n f(\eta_s) ds$ est une $(\mathfrak{F}_t, P_n)$-martingale.

Démonstration. — Posons $f_n(\eta) = f(\eta_n)$

où

$$\begin{aligned} \eta_n &= \eta \text{ sur } B_n \\ &= \eta^0 \text{ hors de } B_n. \end{aligned}$$

Les coefficients b_n et d_n étant nuls hors de B_n, la définition de P_n donne :

$$\begin{aligned} f(\eta_t) - \int_0^t L_s^n f(\eta_s) ds = f_n(\eta_t) - \int_0^t ds \Big\{ \int dx b_n(x, s)[f_n(\eta_s \cup x) - f_n(\eta_s)] \\ + \int \eta_s(dx) d_n(x, s)[f_n(\eta_s \backslash x) - f_n(\eta_s)] \Big\} \quad P_n \text{ p. s.} \end{aligned}$$

D'autre part, par hypothèse, $f_n(\eta_t) - \int_0^t L f_n(\eta_s) ds$ est une $(\mathfrak{F}_t, P)$-martingale donc $f_n(\eta_t) - \int_0^t E^{\mathfrak{F}_s^n}[L f_n(\eta_s)] ds$ est une $(\mathfrak{F}_t^n, P)$-martingale, c'est-à-dire : si $u < t$ et si A appartient à $\mathfrak{F}_u^n$ on a :

$$E[1_A(f_n(\eta_t) - f_n(\eta_u))] = E\left[1_A \int_u^t E^{\mathfrak{F}_s^n}[L f_n(\eta_s)] ds\right]$$

Or :

$$\begin{aligned} E^{\mathfrak{F}_s^n}[L f_n(\eta_s)] &= \int dx E^{\mathfrak{F}_s^n}\{ b(x, \eta_s)[f_n(\eta_s \cup x) - f_n(\eta_s)] \} \\ &\quad + \sum_p E^{\mathfrak{F}_s^n}\{ d(x_p(\eta_s), \eta_s)[f_n(\eta_s \backslash x_p(\eta_s)) - f_n(\eta_s)] \} \\ &= \int dx b_n(x, s)[f_n(\eta_s \cup x) - f_n(\eta_s)] + \int \eta_s(dx) d_n(x, s)[f_n(\eta_s \backslash x) - f_n(\eta_s)] \end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$E[1_A(f_n(\eta_t) - f_n(\eta_u))] = E\left[1_A \int_u^t L_s^n f_n(\eta_s) ds\right] \tag{2}$$

Nous voulons établir que :

$$E_{P_n}\left[1_{A \cap B} \Big\{ f(\eta_t) - f(\eta_u) - \int_u^t L_s^n f(\eta_s) ds \Big\}\right] = 0 \tag{3}$$

si $u < t$ et si A et B appartiennent respectivement à $\mathfrak{F}_u^n$ et $\widehat{\mathfrak{F}}_u^n$. Mais, par définition de P_n, $P_n(B)$ est égal à 0 ou 1. Si $P_n(B) = 0$ l'égalité (3) est trivialement vraie. Si $P_n(B) = 1$, l'égalité (3) n'est autre que (2). ∎

D'une façon générale, si L_s^n est l'opérateur défini sur $\mathscr{D}(E)$ à l'aide de (1) à partir de coefficients b_n et d_n bornés, nuls hors de B_n et $\mathfrak{F}_t$-adaptés, on a :

PROPOSITION 2. — Il existe une et une seule probabilité P_n sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ telle que :

. $P_n(\eta_0 = \eta^0) = 1$,
. pour toute fonction f appartenant à $\mathscr{D}(E)$

$$f(\eta_t) - \int_0^t L_s^n f(\eta_s)ds \quad \text{soit une} \quad (\mathfrak{F}_t, P_n)\text{-martingale.} \tag{4}$$

Démonstration. — On note φ l'application de Ω dans Ω définie par :

$$\begin{aligned} \varphi(\omega, t) &= \eta_t(\omega) \text{ sur } B_n \\ &= \eta^0 \quad \text{hors de } B_n, \end{aligned}$$

Soient T_p les instants de saut successifs du processus $\varphi(., t)$ et Ω_1 l'ensemble de ω tels que la suite $(T_p(\omega), p \in \mathbb{N}^*)$ n'ait pas de point d'accumulation dans $\mathbb{R}_+$. On marque chaque saut T_p par le point X_p de $\mathbb{R}$ où s'effectue le saut; lorsque ω varie dans Ω_1 $((T_p, X_p), p \in \mathbb{N}^*)$ est un processus ponctuel marqué au sens de [3].

Supposons que P_n soit une probabilité sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ vérifiant (4). Si $N(]0, t] \times \Gamma)$ représente le nombre de sauts dans Γ du processus $\eta_.$ avant l'instant t, il est prouvé dans [2] que

$$N(]0, t] \times \Gamma) - \int_0^t ds \left\{ \int_\Gamma b_n(x, s)dx + \int_\Gamma d_n(x, s)\eta_s(dx) \right\} \tag{5}$$

est une $(\mathfrak{F}_t, P_n)$-martingale. Par conséquent si

$$\Omega_2 = \{ \omega; \varphi(\omega, t) = \eta_t(\omega), \forall t \},$$

P_n ne charge que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ et pour la restriction de P_n à $\Omega_1 \cap \Omega_2$, (5) signifie que la mesure aléatoire A définie par

$$A(]0, t] \times \Gamma) = \int_0^t ds \left\{ \int_\Gamma b_n(x, s)dx + \int_\Gamma d_n(x, s)\eta_s(dx) \right\}$$

est la projection prévisible de la mesure aléatoire N. La probabilité P_n est donc unique d'après le résultat d'unicité d'un processus ponctuel marqué ayant une projection prévisible donnée (cf. [3]).

L'existence de P_n découle immédiatement du théorème d'existence d'un processus ponctuel marqué ayant une projection prévisible donnée [3], car si $N(]0, t] \times \Gamma) - A(]0, t] \times \Gamma)$ est une martingale, il en est de même de

$$(6) \quad \iint 1_{]0,t]}(s)[f(\tau_x\eta_{s^-})-f(\eta_{s^-})](N-A)(dx, ds)=f(\eta_t)-f(\eta_0)-\int_0^t L_s^n f(\eta_s)ds$$

où $\tau_x\eta$ est la configuration η modifiée en x et où f appartient à $\mathscr{D}(E)$. ■

On note (ω_1, ω_2) un point de $\Omega \times \Omega$, $(\eta_t, \xi_t)(\omega_1, \omega_2)$ le processus $(\omega_1, \omega_2)(t)$ et $\tilde{\mathfrak{F}}_t$ sa filtration naturelle.

Soient maintenant P_1 et P_2 deux solutions au problème des martingales associé à L d'état initial η^0 et ξ^0 respectivement. On reprend toutes les notations précédentes indexées par 1 ou 2 suivant que la probabilité sous-jacente est P_1 ou P_2. Nous allons coupler $P_{1,n}$ et $P_{2,n}$ en considérant l'opérateur sur $\mathscr{D}(E \times E)$

$$\begin{aligned}
&\tilde{L}_s^n f(\eta_s, \xi_s)\\
&= \int dx[b_n^1(x, s)-(b_n^1(x, s) \wedge b_n^2(x, s))][f(\eta_s \cup x, \xi_s)-f(\eta_s, \xi_s)]\\
&+ \int dx[b_n^2(x, s)-(b_n^1(x, s) \wedge b_n^2(x, s))][f(\eta_s, \xi_s \cup x)-f(\eta_s, \xi_s)]\\
&+ \int dx(b_n^1(x, s) \wedge b_n^2(x, s))[f(\eta_s \cup x, \xi_s \cup x)-f(\eta_s, \xi_s)]\\
&+ \int \eta_s(dx)[d_n^1(x, s)-1_{\{\eta_s(x)=\xi_s(x)\}}(d_n^1(x, s) \wedge d_n^2(x, s))][f(\eta_s \backslash x, \xi_s)-f(\eta_s, \xi_s)]\\
&+ \int \xi_s(dx)[d_n^2(x, s)-1_{\{\eta_s(x)=\xi_s(x)\}}(d_n^1(x, s) \wedge d_n^2(x, s))][f(\eta_s, \xi_s \backslash x)-f(\eta_s, \xi_s)]\\
&+ \int \eta_s(dx)1_{\{\eta_s(x)=\xi_s(x)\}}(d_n^1(x, s) \wedge d_n^2(x, s))[f(\eta_s \backslash x, \xi_s \backslash x)-f(\eta_s, \xi_s)]
\end{aligned}$$

PROPOSITION 3. — Il existe une et une seule probabilité $\tilde{P}_n$ sur $\Omega \times \Omega$ telle que :

. $\tilde{P}_n((\eta_0, \xi_0) = (\eta^0, \xi^0)) = 1$,

(7) pour toute fonction f appartenant à $\mathscr{D}(E \times E)$ $f(\eta_t, \xi_t) - \int_0^t \tilde{L}_s^n f(\eta_s, \xi_s)ds$, soit une $(\tilde{\mathfrak{F}}_t, \tilde{P}_n)$-martingale.

Démonstration. — Elle est analogue à celle de la proposition 2. On note T_p les instants de saut du processus $(\varphi(\omega_1), \varphi(\omega_2))(t)$, on marque ces sauts par $\mathbb{R} \times \{1, 2, 3\}$ de la façon suivante :

T_p reçoit la marque (x, i) $(i = 1, 2)$ si le processus $\varphi(\omega_i, t)$ a sauté seul à l'instant T_p et au point x, la marque $(x, 3)$ si les processus $\varphi(\omega_1, t)$ et $\varphi(\omega_2, t)$ ont sauté ensemble et au point x.

Si $\tilde{P}_n$ est une probabilité sur $\Omega \times \Omega$ vérifiant (7) et si $N(]0, t] \times \Gamma \times i)$ représente le nombre de sauts avant t dont la marque appartient à $\Gamma \times \{ i \}$, alors :

$$N(]0, t] \times \Gamma \times 1) - \int_0^t ds \int_\Gamma dx \big(b_n^1(x, s) - b_n^1(x, s) \wedge b_n^2(x, s)\big)$$
$$- \int_0^t ds \int_\Gamma \eta_s(dx) \big(d_n^1(x, s) - 1_{\{\eta_s(x) = \xi_s(x)\}} d_n^1(x, s) \wedge d_n^2(x, s)\big)$$

et l'expression analogue pour $i = 2$ (en remplaçant $\eta_s(dx)$ par $\xi_s(dx)$) sont des $(\tilde{\mathfrak{F}}_t, \tilde{P}_n)$-martingales. Il en est de même de

$$N(]0, t] \times \Gamma \times 3) - \int_0^t ds \int_\Gamma dx b_n^1(x, s) \wedge b_n^2(x, s)$$
$$- \int_0^t ds \int_\Gamma \eta_s(dx) 1_{\{\eta_s(x) = \xi_s(x)\}} d_n^1(x, s) \wedge d_n^2(x, s)$$

Ceci détermine la projection prévisible A de la mesure aléatoire N sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \{ 1, 2, 3 \}$ et permet d'appliquer le théorème d'unicité de [*3*].

L'existence de $\tilde{P}_n$ se déduit du théorème d'existence de [*3*] à l'aide d'une formule analogue à (6). ■

Remarque. — Les marginales de $\tilde{P}_n$ résolvent le problème des martingales associé à $L_{1,s}^n$ et $L_{2,s}^n$ respectivement donc d'après la proposition 2, ce sont $P_{1,n}$ et $P_{2,n}$.

PROPOSITION 4. — La famille des probabilités $\tilde{P}_n$ est relativement compacte pour la topologie faible des probabilités sur $\Omega \times \Omega$.

Démonstration. — D'après le théorème 1.15 de [*2*], les familles $(P_{i,n})$ $(i = 1, 2)$ sont tendues donc pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $i = 1, 2$, il existe un compact K_i de la topologie de Skorokhod sur Ω tel que $P_{i,n}(K_i) > 1 - \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit à l'aide de la remarque ci-dessus que

$$\tilde{P}_n(K_1 \times K_2) = P_{1,n}(K_1) P_{2,n}(K_2) > 1 - 2\varepsilon$$

d'où le résultat. ■

On peut extraire de la suite $\tilde{P}_n$ une sous-suite qui converge vers une probabilité $\tilde{P}$. Les marginales de $\tilde{P}$ sont les limites de $P_{1,n}$ et $P_{2,n}$, soit P_1 et P_2. Il reste à montrer que $\tilde{P}$ résout le problème des martingales associé à $\tilde{L}$.

PROPOSITION 5. — Si $\tilde{P}_n$ est une solution au problème des martingales associé à $\tilde{L}_s^n$ et si $\tilde{P}_n$ converge faiblement vers $\tilde{P}$ alors $\tilde{P}$ est solution au problème des martingales associé à $\tilde{L}$.

Démonstration. — Si Φ appartient à $\tilde{\mathfrak{F}}_u$ et si f appartient à $\mathcal{D}(\mathrm{E} \times \mathrm{E})$, il faut montrer que : pour $u < t$:

$$\mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}}[\Phi(f(\eta_t, \xi_t) - f(\eta_u, \xi_u))] = \mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}}\left[\Phi \int_u^t \tilde{\mathrm{L}} f(\eta_s, \xi_s) ds\right]$$

On sait que :

$$\mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}_n}[\Phi(f(\eta_t, \xi_t) - f(\eta_u, \xi_u))] = \mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}_n}\left[\Phi \int_u^t \tilde{\mathrm{L}}_s^n f(\eta_s, \xi_s) ds\right] \tag{8}$$

Pour montrer, par exemple, que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}_n}[\Phi f(\eta_t, \xi_t)] = \mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}}[\Phi f(\eta_t, \xi_t)] \tag{9}$$

on peut supposer que Φ est continue et bornée. Soit

$$\mathrm{A} = \{\, \omega ; \omega \to (\eta_t(\omega), \xi_t(\omega)) \text{ est continue} \,\},$$

A est fermé et $\tilde{\mathrm{P}}_n(\mathrm{A}) = 0$ pour tout n; on en déduit que $\tilde{\mathrm{P}}(\mathrm{A}) = 0$ et par suite la formule (9) est vraie. Il reste à étudier le deuxième terme de l'égalité (8) :

$$\begin{aligned} \Bigg| \mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}}\left[\Phi \int_u^t \tilde{\mathrm{L}} f(\eta_s, \xi_s) ds\right] - \mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}_n}\left[\Phi \int_u^t \tilde{\mathrm{L}}_s^n f(\eta_s, \xi_s) ds\right] \Bigg| & \\ \leq \Bigg| \mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}}\left[\Phi \int_u^t \tilde{\mathrm{L}} f(\xi_s, \eta_s) ds\right] - \mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}_n}\left[\Phi \int_u^t \tilde{\mathrm{L}} f(\eta_s, \xi_s) ds\right] \Bigg| & \quad (a) \\ + \| \Phi \| \int_u^t ds \mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}_n} | \tilde{\mathrm{L}} f(\eta_s, \xi_s) - \tilde{\mathrm{L}}_s^n f(\eta_s, \xi_s) | & \quad (b) \end{aligned}$$

Les hypothèses de continuité faites sur b et d entraînent que $\tilde{\mathrm{L}} f$ est une fonction continue, le terme (a) tend donc vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ pour les mêmes raisons que ci-dessus.

Pour le terme (b), soit Γ un compact de $\mathbb{R}$ tel que $f(\eta)$ ne dépende de η que par l'intermédiaire de $\eta_{|\Gamma}$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}_n} | \tilde{\mathrm{L}} f(\eta_s, \xi_s) - \tilde{\mathrm{L}}_s^n f(\eta_s, \xi_s) | \leq 2 \| f \| \Bigg\{ \int_\Gamma dx \mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}_n} \{ | b(x, \eta_s) - b_n^1(x, s) | \\ + | b(x, \xi_s) - b_n^2(x, s) | + | (b(x, \eta_s) \wedge b(x, \xi_s)) - (b_n^1(x, s) \wedge b_n^2(x, s)) | \} \Bigg\} \\ + \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}_n} \{ 1_{\{x_p(\eta_s) \in \mathrm{B}_n \cap \Gamma\}} | d(x_p(\eta_s), \eta_s) - d_n^1(x_p(\eta_s), s) | \\ + 1_{\{x_p(\xi_s) \in \mathrm{B}_n \cap \Gamma\}} | d(x_p(\xi_s), \xi_s) - d_n^2(x_p(\xi_s), s) | \} \\ + \sum_{p,q} \mathrm{E}_{\tilde{\mathrm{P}}_n} \{ 1_{\{x_p(\eta_s) = x_q(\xi_s) \in \mathrm{B}_n \cap \Gamma\}} | (d(x_p(\eta_s), \eta_s) \wedge d(x_q(\xi_s), \xi_s)) \\ - (d_n^1(x_p(\eta_s), s) \wedge d_n^2(x_q(\xi_s), s) | \} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $| \alpha_1 \wedge \alpha_2 - \beta_1 \wedge \beta_2 | \leq | \alpha_1 - \beta_1 | + | \alpha_2 - \beta_2 |$ il vient :

$$E_{\tilde{P}_n} | \tilde{L}f(\eta_s, \xi_s) - \tilde{L}_s^n f(\eta_s, \xi_s) | \leq 4 \|f\| \left\{ \int_\Gamma dx E_{\tilde{P}_n} \{ | b(x, \eta_s) - b_n^1(x, s) | \right.$$
$$+ | b(x, \xi_s) - b_n^2(x, s) | \} + \sum_p E_{\tilde{P}_n} \{ 1_{\{x_p(\eta_s) \in B_n \cap \Gamma\}} | d(x_p(\eta_s), \eta_s) - d_n^1(x_p(\eta_s), s) |$$
$$\left. + 1_{\{x_p(\xi_s) \in B_n \cap \Gamma\}} | d(x_p(\xi_s), \xi_s) - d_n^2(x_p(\xi_s), s) | \} \right\}$$

Or la première marginale de $\tilde{P}_n$ est $P_{1,n}$; on en déduit, en utilisant la définition de $P_{1,n}$, que :

$$E_{\tilde{P}_n} | b(x, \eta_s) - b_n^1(x, s) | = E_{P_1} | b(x, (\eta_s)_n) - b_n^1(x, s) | ;$$

d'autre part P_1 p. s. $| b(x, (\eta_s)_n) - b_n^1(x, s) | \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc en appliquant le théorème de Lebesgue on obtient :

$$\int_\Gamma ds E_{\tilde{P}_n} | b(x, \eta_s) - b_n^1(x, s) | \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 ;$$

et de même

$$\int_\Gamma ds E_{\tilde{P}_n} | b(x, \xi_s) - b_n^2(x, s) | \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

De la même façon on peut écrire

$$E_{\tilde{P}_n} 1_{\{x_p(\eta_s) \in B_n \cap \Gamma\}} | d(x_p(\eta_s), \eta_s) - d_n^1(x_p(\eta_s), s) |$$
$$= E_{P_1} 1_{\{x_p((\eta_s)_n) \in B_n \cap \Gamma\}} | d(x_p((\eta_s)_n), (\eta_s)_n) - d_n^1(x_p((\eta_s)_n), s) |$$

et on sait que P_1 p. s. $| d(x_p((\eta_s)_n), (\eta_s)_n) - d_n^1(x_p((\eta_s))_n, s) |$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+ \infty$. Comme $E_{P_1}[\eta_s(\Gamma)] < + \infty$, on peut là encore appliquer le théorème de Lebesgue et conclure. ■

III. UN THÉORÈME D'UNICITÉ

Ayant effectué le couplage du paragraphe précédent, nous sommes dans les meilleures conditions pour comparer deux évolutions *a priori* différentes gouvernées par L et partant de la même configuration initiale. Pour ceci, nous allons utiliser une méthode de contraction. Nous supposons donc qu'il existe deux solutions P_1 et P_2 au problème des martingales associé à L et d'état initial η^0 et nous appelons $\tilde{P}$ la probabilité construite au paragraphe précédent.

PROPOSITION 6. — Soit Γ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et

$$\tau_\Gamma = \inf \{ t \,;\, \eta_{t|\Gamma} \neq \xi_{t|\Gamma} \}.$$

Alors :

$$\tilde{P}(\tau_\Gamma \leq t) \leq \tilde{E}\int_0^{t\wedge\tau_\Gamma} ds \left\{ \int_\Gamma |b(x,\eta_s)-b(x,\xi_s)|\,dx + \int_\Gamma |d(x,\eta_s)-d(x,\xi_s)|\,\eta_s(dx) \right\}$$

Démonstration. — Nous utilisons la propriété de martingale de

$$f(\eta_t,\xi_t) - \int_0^t \tilde{L}f(\eta_s,\xi_s)ds$$

en prenant pour fonction $f : (\eta,\xi) \to 1_{\eta|\Gamma \neq \xi|\Gamma}$. Or si $\eta_{|\Gamma} = \xi_{|\Gamma}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\tilde{L}f(\eta,\xi) &= \int_\Gamma dx(b(x,\eta) + b(x,\xi) - 2b(x,\eta)\wedge b(x,\xi)) \\ &\quad + \int_\Gamma \eta(dx)(d(x,\eta) + d(x,\xi) - 2d(x,\eta)\wedge d(x,\xi))\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

PROPOSITION 7. — Sous les hypothèses supplémentaires (H_1), pour tout intervalle $[a, b]$ borné de $\mathbb{R}$, on a : $\tilde{P}(\tau_{[a,b]} \leq t) = 0$.

Démonstration. — Posons $f(t, a, b) = \tilde{P}(\tau_{[a,b]} \leq t)$. L'inégalité de la proposition 6 s'écrit avec les hypothèses (H_1) :

$$\begin{aligned}f(t,a,b) \leq \tilde{E}\int_0^{t\wedge\tau_{[a,b]}} ds \int_{[a,b]} (dx + \eta_s(dx)) &\left\{ \int_{\{u\geq 0\}} m(du) 1_{\{\eta_s|[b,b+u] \neq \xi_s|[b,b+u]\}} \right. \\ &\left. + \int_{\{u\leq 0\}} m(du) 1_{\{\eta_s|[u+a,a] \neq \xi_s|[u+a,a]\}} \right\}\end{aligned}$$

On note $K_1 = \int m(du)$. On suppose $t \leq T$. On se donne deux nombres strictement positifs M et p arbitraires, M servant à contrôler la longueur de $[a, b]$ pour les petites valeurs de $b - a$, p servant à contrôler le nombre de particules sur $[a, b]$ pour les grandes valeurs de $b - a$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}f(t,a,b) \leq \int_0^t ds &\left\{ \int_{\{u\geq 0\}} m(du) f(s,b,b+u) \int_{\{u\leq 0\}} m(du) f(s,u+a,a) \right\} (1+p) \\ &\times \{ (b-a)1_{\{b-a>M\}} + M1_{\{b-a\leq M\}} \} + K_1\int_0^t ds \{ 1_{\{b-a>M\}} \tilde{E}(\eta_s([a,b])) \\ &\times 1_{\{\eta_s([a,b])>p(b-a)\}} + 1_{\{b-a\leq M\}} \tilde{E}(\eta_s([a,a+M])) 1_{\{\eta_s([a,a+M])>pM\}} \}\end{aligned}$$

Lorsque $b - a$ est supérieur (resp. inférieur) à M, on a donc distingué selon que $\eta_s([a, b])$ (resp. $\eta_s([a, a + \mathrm{M}])$) est plus grand ou non que $p(b - a)$ (resp. $p\mathrm{M}$). Nous allons d'abord montrer que l'on peut majorer le terme contenant η_s par une fonction uniquement de p, décroissant assez vite avec p. On note $[x]$ la partie entière de x et $\mathrm{B} = \sup\limits_{x,\eta} b(x, \eta)$. On peut toujours majorer le processus η_s par un processus de naissance pure de coefficient B et donc $\eta_s([a, a + \mathrm{M}])$ par un processus de Poisson de paramètre $bs\mathrm{M}$; il vient :

$$\int_0^t ds\tilde{\mathrm{E}}(\eta_s([a, a + \mathrm{M}])1_{\{\eta_s([a,a+\mathrm{M}]) > p\mathrm{M}\}}) \leq \int_0^t ds \frac{(\mathrm{B}s\mathrm{M})^{[p\mathrm{M}]+1}}{[p\mathrm{M}]\,!} \leq \mathrm{T}\frac{(\mathrm{BMT})^{[p\mathrm{M}]+1}}{([p\mathrm{M}] + 1)\,!}$$

De même :

$$\int_0^t ds\tilde{\mathrm{E}}(\eta_s([a, b])1_{\{\eta_s([a,b]) > p(b-a)\}}) \leq \mathrm{T}\frac{(\mathrm{B}(b - a)\mathrm{T})^{[p(b-a)]+1}}{([p(b - a)] + 1)\,!}$$

En étudiant la fonction réelle $g(x) = 1_{\{x \geq \mathrm{M}\}} \dfrac{(\mathrm{TB}x)^{[px]+1}}{([px] + 1)\,!}$ on trouve que $g(x) \leq 1_{\{x\geq \mathrm{M}\}}\left(\dfrac{\mathrm{TB}xe}{[px] + 1}\right)^{[px]+1}$; si $p > \mathrm{TB}e$ alors $g(x) \leq 1_{\{x\geq\mathrm{M}\}}\left(\dfrac{\mathrm{TB}e}{p}\right)^{px}$; la fonction $\left(\dfrac{\mathrm{TB}e}{p}\right)^{px}$ est décroissante, on peut donc majorer $g(x)$ par $\left(\dfrac{\mathrm{TB}e}{p}\right)^{p\mathrm{M}}$. Si on pose $\psi(x) = x1_{\{x>\mathrm{M}\}} + \mathrm{M}1_{\{x\leq \mathrm{M}\}}$ on a alors l'inégalité :

$$f(t, a, b) \leq \int_0^t ds(1 + p)\psi(b - a)\left\{\int_{\{u\geq 0\}} m(du)f(s, b, b + u) + \int_{\{u\leq 0\}} m(du)f(s, u + a, a)\right\} + \mathrm{K}_1\left(\frac{\mathrm{TB}e}{p}\right)^{p\mathrm{M}}.$$

Nous itérons k fois cette inégalité; si on pose

$$\int \psi(|\,x\,|)m(dx) = \mathrm{K}_2,$$

comme $f(s, u, v) \leq 1$, on trouve :

$$f(t, a, b) \leq \frac{\mathrm{T}^k}{k\,!}(1 + p)^k\psi(b - a)2^k\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2^{k-1} + \mathrm{K}_1\left(\frac{\mathrm{TB}e}{p}\right)^{p\mathrm{M}} \left\{1 + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{(1 + p)^i\mathrm{T}^i\mathrm{K}_2^{i-1}}{i\,!}\mathrm{K}_1\psi(b - a)\right\}$$

soit

$$f(t,a,b) \leq \frac{K_1 \psi(b-a)}{K_2} \frac{(2TK_2(1+p))^k}{k!} + K_1 \left(\frac{TBe}{p}\right)^{pM} \left\{ 1 + \frac{K_1}{K_2} \psi(b-a) e^{TK_2(1+p)} \right\}$$

Lorsque k tend vers $+\infty$, le premier terme tend vers 0, puis lorsque p tend vers $+\infty$, le deuxième terme tend vers 0. ■

THÉORÈME 8. — Sous les hypothèses (H_0) et (H_1), il y a existence et unicité au problème des martingales associé à L.

La démonstration de l'unicité est une conséquence immédiate de la proposition ci-dessus.

IV. EXEMPLES

1. Portée finie

On suppose que les coefficients b et d satisfont les hypothèses (H_0) et sont de portée finie, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif M tel que si $\eta = \xi$ sur $[x - M, x + M]$ alors $b(x, \eta) = b(x, \xi)$ et si de plus

$$\eta(x) = \xi(x) = 1 \quad \text{alors} \quad d(x, \eta) = d(x, \xi).$$

On vérifie facilement que les coefficients b et d satisfont les hypothèses (H_1) car :

$$|b(x,\eta) - b(x,\xi)| \leq B \int (\varepsilon_M(du) + \varepsilon_{-M}(du)) 1_{\{\eta|[x,x+u] \neq \xi|[x,x+u]\}}$$

$$1_{\{\eta(x)=\xi(x)=1\}} |d(x,\eta) - d(x,\xi)| \leq D \int (\varepsilon_M(du) + \varepsilon_{-M}(du)) |_{\{\eta|[x,x+u] \neq \xi|[x,x+u]\}}$$

et il suffit de prendre pour mesure $m(du) = \sup(D, B)(\varepsilon_M + \varepsilon_{-M})(du)$.

2. Si

$$b(x, \eta) = \int (\eta([x, x + u]) \wedge M) m_1(du)$$

et

$$d(x, \eta) = \int (\eta([x, x + u]) \wedge M) m_2(du)$$

lorsque $\eta(x) = 1$, alors

$$|b(x,\eta) - b(x,\xi)| \leq M \int m_1(du) |_{\{\eta|[x,x+u] \neq \xi|[x,x+u]\}},$$

$$1_{\{\eta(x)=\xi(x)=1\}} |d(x,\eta) - d(x,\xi)| \leq M \int m_2(du) |_{\{\eta|[x,x+u] \neq \xi|[x,x+u]\}}$$

et ces coefficients satisfont (H_0) et (H_1) si $m_1(du)$ et $m_2(du)$ sont des mesures satisfaisant les conditions de la mesure $m(du)$ dans (H_1).

REMERCIEMENTS

Sans les discussions régulières et amicales que nous avons avec MM. Neveu, Kipnis et Ledrappier, ce travail n'aurait sans doute pas pu être réalisé; qu'ils en soient vivement remerciés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Cocozza et C. Kipnis, Processus de vie et de mort sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ avec interaction selon les particules les plus proches. *C. R. Acad. Sc.*, t. **284**, 23 mai 1977, série A, p. 1291.

[2] R. A. Holley et D. W. Stroock, Nearest neighbour birth and death processes on the real line. *Acta Mathematica*, vol. 140, 1978.

[3] J. Jacod, Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. *Z. W.*, t. **31**, 1975, p. 235-253.

[4] T. M. Liggett, « *The stochastic evolution of infinite systems of interacting particle* ». Lecture Notes in Math., Springer, 1977 (école d'été de probabilités de Saint-Flour, VI, 1976).

(Manuscrit reçu le 21 novembre 1978).