ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-LOUIS DUNAU
HENRI SÉNATEUR

Quelles fonctions changent toute loi uniforme en une loi uniforme ?

Annales de l'I. H. P., section B, tome 20, nº 3 (1984), p. 247-250
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_3_247_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 20, n° 3, 1984, p. 247-250. *Probabilités et Statistiques*

Quelles fonctions changent toute loi uniforme en une loi uniforme ?

par

Jean-Louis DUNAU (*)

Henri SÉNATEUR

Université Paul Sabatier,
Laboratoire de Statistique et Probabilités,
E. R. A.-C. N. R. S. 591, Toulouse

RÉSUMÉ. — Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivante : pour tout intervalle $[a, b]$, si la variable aléatoire X est de loi uniforme sur $[a, b]$, alors $f(\mathrm{X})$ est de loi uniforme sur un intervalle $[a_1, b_1]$. Nous démontrons qu'une telle application f est affine presque partout.

ABSTRACT. — Consider the measurable function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with the following property: for any interval $[a, b]$, if the random variable X is uniformly distributed on $[a, b]$, then $f(\mathrm{X})$ is uniformly distributed on some interval $[a_1, b_1]$. We prove that such an f is affine almost everywhere.

INTRODUCTION

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$; si f est une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on désigne par $f * \mu$ l'image par f de la mesure μ ; on note $\mathrm{A}(\mu)$ l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{R}$ images de μ par une application affine ; on note $\mathrm{F}(\mu)$ l'ensemble des applications mesurables f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f * \mathrm{A}(\mu) \subset \mathrm{A}(\mu)$.

(*) I. N. S. A., Toulouse.

En d'autres termes, si la variable aléatoire X est de loi μ, $A(\mu)$ est l'ensemble des lois des variables aléatoires $\alpha X + \beta$ avec α et β réels et $\alpha \neq 0$, et f est dans $F(\mu)$ si quels que soient $\alpha \neq 0$ et β, il existe $\alpha_1 \neq 0$ et β_1 tels que $f(\alpha X + \beta)$ et $\alpha_1 X + \beta_1$ aient la même loi.

Par exemple, si μ est une loi de Cauchy, $F(\mu)$ est un ensemble assez vaste, en pratique paramétré par $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_s$ où $\mathcal{M}_s$ est l'ensemble des mesures positives singulières sur le cercle (voir Letac [*1*]).

Pour tout μ, il est clair que $F(\mu)$ contient au moins les fonctions affines ; plus précisément $F(\mu)$ contient au moins la classe $T(\mu)$ des fonctions f telles que pour tout v de $A(\mu)$, il existe $\alpha_v \neq 0$ et β_v tels que $f(x) = \alpha_v x + \beta_v$, v-presque partout. J. F. C. Kingman (cité dans [*2*]) a conjecturé que $F(\mu) \neq T(\mu)$ si et seulement si μ est une loi de Cauchy. Cette conjecture semble tout à fait délicate à montrer ; dans [*2*] Letac et Pradines vérifient à son appui que $F(\mu) = T(\mu)$ si μ est une loi normale. Nous allons montrer qu'il en est de même si μ est uniforme sur un intervalle. Dans [*2*] il était mentionné que ceci est aisé à vérifier. G. Letac nous a informé que sa démonstration, après vérification, était incomplète, et c'est le but du présent article de fournir une preuve détaillée.

THÉORÈME. — *Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : pour tout a réel et pour tout $h > 0$, il existe $A(a, h)$ dans $\mathbb{R}$ et $H(a, h) \geq 0$ tels que, si X est une variable aléatoire uniforme sur $[a, a + h]$ alors $f(X)$ est uniforme sur $[A, A + H]$ (avec la convention $f(X) \equiv A$ si $H = 0$). Alors il existe des réels α et β tels que pour presque tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \beta$.*

Démonstration. — Si $a < b$ on note $\mu_{a,b}$ la probabilité uniforme sur $[a, b]$.

S'il existe a réel et $h > 0$ tels que $H(a, h) = 0$ alors $f * \mu_{a,a+h}$ est la mesure de Dirac en A, donc

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f^2(x)dx = A^2 = \left(\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)dx\right)^2$$

C'est le cas d'égalité de l'inégalité de Schwarz, donc f est presque partout constante sur $[a, a + h]$. Alors pour a_1 et h_1 tels que $a_1 < a < a+h < a_1 + h_1$, $f * \mu_{a_1,a_1+h_1}$ possède un atome, donc f est presque partout constante sur $[a_1, a_1 + h_1]$ et par conséquent sur $\mathbb{R}$. On supposera donc dans la suite que $H(a, h) > 0$.

Puisque
$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)dx = A + \frac{H}{2}$$

et $$\frac{1}{h}\int_a^{a+h}(f(x)-\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(t)dt)^2dx=\frac{H^2}{12},$$

alors pour $h > 0$ fixé, l'application $a \mapsto H^2(a, h)$ est absolument continue sur $\mathbb{R}$ et, comme $H > 0$, les applications $a \mapsto H(a, h)$ et $a \mapsto A(a, h)$ sont également absolument continues sur $\mathbb{R}$.

De même, pour a fixé, les applications $h \mapsto H(a, h)$ et $a \mapsto A(a, h)$ sont absolument continues sur $]0, +\infty[$.

Fixons maintenant a, et dérivons par rapport à h l'expression suivante :

$$(1) \qquad s\int_a^{a+h} e^{sf(x)}dx = \frac{h}{H}(e^{s(A+H)} - e^{sA})\,;$$

nous avons pour presque tout $h > 0$:

$$se^{sf(a+h)} = \left[\left(\frac{h}{H}\right)' + \left(\frac{h}{H}\right)(A' + H')s\right]e^{s(A+H)} - \left[\left(\frac{h}{H}\right)' + s\frac{h}{H}A'\right]e^{sA}.$$

Utilisons maintenant le fait que si $Q_i(s)$ sont des polynômes et ω_i des réels deux à deux distincts, alors $\sum_{i=1}^{n} Q_i(s)e^{\omega_i s} \equiv 0$ si et seulement si pour tout i $Q_i \equiv 0$; alors, pour presque tout $h > 0$.

$$(2) \qquad \left(\frac{h}{H}\right)' = 0$$

$$(3) \qquad \begin{cases} f(a+h)=A(a,h)+H(a,h) \\ \text{et} \quad A'(a,h)=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(a+h)=A(a,h) \\ \text{et} \quad A'(a,h) = -H'(a,h) \end{cases}$$

Fixons maintenant $h > 0$; en dérivant (1) par rapport à a et en tenant compte de (2) on trouve que :

$$(4) \qquad \exists\alpha > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall h > 0 \quad H(a, h) = \alpha h.$$

Soient alors des réels $a < b$, $a' < b'$ et notons $\mu_{A,B} = f * \mu_{a,b}$ et $\mu_{A',B'} = f * \mu_{a',b'}$; si $a = a'$, on voit aisément que ou bien $A = A'$ ou bien $B = B'$. On en déduit que pour tout réel a, ou bien l'application définie sur $]0, +\infty[$: $h \mapsto A(a, h)$ est une constante $\beta(a)$, ou bien l'application définie sur $]0, +\infty[$: $h \mapsto A(a, h) + \alpha h$ est une constante $\gamma(a)$. En rapprochant ceci de (3) on obtient que pour tout réel a,

ou bien, pour presque tout $h > 0$, $\quad f(a + h) = \alpha h + \beta(a) \qquad (5)$

ou bien, pour presque tout $h > 0$, $\quad f(a + h) = -\alpha h + \gamma(a) \qquad (6)$

Mais s'il existe a_1 vérifiant (5) et a_2 vérifiant (6), alors $\alpha = 0$. On a donc :
ou bien, pour tout a et pour presque tout $h > 0$ $f(a+h) = \alpha h + \beta(\alpha)$ (7)
ou bien, pour tout a et pour presque tout $h > 0$ $f(a+h) = -\alpha h + \gamma(a)$ (8)
Si on a (7) on voit que l'application $a \mapsto \beta(a) - \alpha a$ est une constante β ; c'est analogue pour (8). Ce qui achève la démonstration du théorème.

RÉFÉRENCES

[*1*] G. LETAC, Which functions preserve Cauchy laws? *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **67**, 1977, p. 277-286.

[*2*] G. LETAC et J. PRADINES, Seules les affinités préservent les lois normales. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **286**, 1978, p. 399-402.

(Manuscrit reçu le 8 juillet 1983)