ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN BRETAGNOLLE

Notes de lecture sur l'œuvre de Paul Lévy

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, nº S2 (1987), p. 239-243
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_S2_239_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Sup. au n° 2, 1987, Vol. 23, p. 239-243.
Probabilités et Statistiques

Notes de lecture sur l'œuvre de Paul Lévy

par

Jean BRETAGNOLLE

Université Paris-Sud, U.A. n° 743 « Statistique appliquée »,
Mathématique, Bât. n° 425, 91405 Orsay Cedex

Ces quelques pages reprennent l'essentiel d'une conférence faite à Strasbourg à l'occasion d'un Séminaire d'Histoire des Mathématiques.

L'édition des œuvres complètes de Paul Lévy comporte 252 *publications (hors les livres);* 4 *des* 6 *tomes sont consacrés au Calcul des Probabilités; il est hors de question d'en donner une idée en quelques pages. D'ailleurs Paul Lévy a fait lui-même une revue historique extrêmement intéressante de son œuvre dans le livre* Quelques aspects de la pensée d'un Mathématicien *qu'on peut trouver dans toute bibliothèque mathématique digne de ce nom.*

Je me propose simplement d'analyser quelques articles sur les sujets suivants : Théorème limite central, Loi 0-1, *Processus à accroissements indépendants. Les références chiffrées renvoient à l'édition des œuvres complètes, et « Add. v. a. » au livre* Théorie de l'addition des variables aléatoires, *Gauthier Villars,* 1937.

Classification A.M.S. : .

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0294-1449
Sup. 87/02/Vol. 23/239/5/$2.50/© Gauthier-Villars

LA LOI DES ERREURS ET LE RÔLE DE LA LOI DE GAUSS (88, 89 et 113)

Dans les deux premières Notes (mars et juin 1922), partant d'une idée de Poincaré (cas où les variables sont identiquement distribuées et à fonction caractéristique entière) P. Lévy montre que sous les conditions « de Lindeberg », dont il ne connaissait pas le travail, la fonction caractéristique de la somme réduite (la transformée de Fourier) tend vers $\exp(-t^2/2)$ dont on sait que c'est la fonction caractéristique de la loi de Gauss; il conclut

« Ce résultat me paraît suffisant pour que l'on puisse dire en termes peu précis que l'on a à la limite la loi de Gauss. Il serait préférable d'établir que pour la loi composante, supposée réduite, on a :

$$\left| F(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}\, dx \right| < \varepsilon.$$

Bien que je n'aie pu y parvenir jusqu'ici, je crois qu'il est possible d'y arriver sans nouvelle hypothèse ».

C'est seulement en novembre 1922 qu'il établira les deux résultats clés dans (113) : tout d'abord, la fonction caractéristique l'est bien (elle caractérise la loi), c'est la formule d'inversion de Paul Lévy; puis il établit la version Fourier de la convergence en loi, qui est la convergence compacte des fonctions caractéristiques. Comme souvent dans ses travaux ultérieurs, il a commencé par donner une preuve incomplète, ou un énoncé conditionnel, mais il a vu le bon chemin. Plus tard (cela demandera parfois plusieurs années), il donnera une démonstration plus rigoureuse des résultats intermédiaires.

L'outil introduit à l'occasion de ce travail se révélera extrêmement fécond : il s'en est servi immédiatement pour construire les lois stables, par passage à la limite en loi. Il se pose ensuite les problèmes de divisibilité (théorèmes de Cramer et Raikov), les problèmes de domaine d'attraction (manifestement en 1922 il pense que les constantes de normalisation ne peuvent être que $n^{1/2}$); enfin ce sont les fonctions caractéristiques de Paul Lévy qui permettront de résoudre le problème de la Limite Centrale.

Dans les 20 années qui vont suivre, les problèmes essentiels de la Théorie vont être :

1° le passage du discret au continu dans l'étude des phénomènes aléatoires;

2° le passage de l'indépendance des accroissements à une hypothèse plus faible, disons pour simplifier le centrage conditionnel.

LES « VARIABLES ENCHAÎNÉES »

[article (101) de 1935]

Dans ce travail célèbre, Paul Lévy démontre sa version de la loi 0-1 et la version martingale du théorème des trois séries : en langage moderne, notant E^n l'espérance conditionnelle par rapport aux $\mathscr{B}_n$, famille croissante de tribus, il prouve que :

$E^n(1_A)$ converge presque sûrement vers 1 sur A.

Si A_n est une suite d'événements, les séries 1_{A_n} et $E^{n-1}(1_{A_n})$ sont de même nature ($\mathscr{B}_n$ étant la tribu engendrée par $A_1, \ldots, A_n$).

Si les U_n sont uniformément bornées, et $E^{n-1}(U_n)=0$, alors la série des U_n est de même nature que celle des $E^{n-1}(U_n^2)$.

Ces résultats sont bien évidemment des résultats de martingales; la notion n'existe pas, ce sera Ville qui la dégagera. Ce travail est écrit dans une langue très claire et très belle. Les notions de temps d'arrêt, de théorème d'arrêt, de prévisibilité du processus croissant associé à la somme des U_n, pour n'être pas dégagées, sont si visibles que le lecteur moderne reconnaît immédiatement la démonstration actuelle. On y trouve une inégalité maximale et un théorème de normalité asymptotique.

Manifestement Paul Lévy a là encore une intuition si profonde qu'elle l'empêche d'aller jusqu'au bout : il n'éprouve pas le besoin de formaliser les étapes du calcul et perd donc la généralité de la notion.

LA DÉCOMPOSITION DES LOIS INDÉFINIMENT DIVISIBLES

(96, 104, 144, 145, Add. v. a.)

Le problème de la décomposition des processus à accroissements indépendants est beaucoup plus difficile à l'époque. Curieusement, Paul Lévy n'utilise pas les fonctions caractéristiques, comme l'a fait Kolmogorov dans le cas des processus homogènes; pour nous, il s'agit d'un processus X_t dont les accroissements sont indépendants, qui se décompose en : une somme de discontinuités ayant lieu en des instants fixés (dénombrables), une partie certaine, un brownien et une somme de Poisson. Les deux dernières parties représentent un processus continu en Probabilité, et cette remarque permet d'isoler et d'extraire les sauts fixes. Extraire la partie certaine est beaucoup moins simple, et disons tout de suite que le problème ne peut être correctement posé sans la notion de régularité des trajectoires. Aussi les fonctions caractéristiques permettent la décomposition *en loi d'une variable aléatoire* (X_1) dont on suppose que pour tout entier n elle peut s'écrire comme $X_1^n + X_2^n + \ldots + X_n^n$, indépendantes et équidistribuées (c'est le cas homogène). Les questions de mesurabilité étant mises de côté, le processus ayant été rendu continu en Probabilité (on extrait les sauts fixes en remarquant qu'ils correspondent à une discontinuité de la famille L_t des lois des $X_t - X_0$), le programme de Paul Lévy est de construire le processus en tous les instants dyadiques (comme il l'a fait pour le mouvement brownien) puis de le prolonger par limite à gauche et à droite. Ensuite, il extrait les sauts, qui sont des sommes de Poisson, il reste un processus à acroissements indépendants, continus, c'est un brownien. Seulement, pour démontrer qu'il n'y a pas de discontinuités de seconde espèce, il ne dispose ni des temps d'arrêt, ni de la finitude du nombre de passages descendants qui devront attendre Doob. Aussi toute sa théorie est basée sur la concentration : [$Q(x, a) = \operatorname{Sup} P(x \leqq X \leqq x + a)$ et sa fonction réciproque la dispersion, notions qu'il a développées dans le travail (96) de 1931 sur les séries à termes indépendants] : la dispersion augmente quand on ajoute des termes indépendants, et si on extrait d'une v. a. S des sommes $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ à composants indépendants, de sorte que S_n et $S - S_n$ soient indépendants, la série des X_n est *essentiellement* convergente c'est-à-dire p. s. convergente si elle est convenablement recentrée (techniquement, il existe une manière canonique de le faire : on centre aux médianes, bien définies si on a ajouté une fois pour toutes un terme indépendant et diffus). Cette technique permet d'isoler les discontinuités fixes (leur série). Pour l'oscillation, une très ingénieuse inégalité en contrôle la concentration en fonction de celle de la variable terminale. La première démonstration étant insuffisante, Paul Lévy la reprend de manière plus formalisée dans le livre de 1937. Extraire les discontinuités mobiles est plus délicat, l'outil technique se trouve dans la Note (104) de 1936 avec W. Doeblin : c'est la célèbre inégalité de concentration : si pour un p donné, les dispersions $D(X_i, p)$ sont (au moins) L, les X_i indépendantes en nombre n, la dispersion de leur somme $D(S, p)$ sera supérieure à $C(p) L n^{1/2}$, cela permet de contrôler avec précision le nombre (moyen) de fois où $X_{it/n} - X_{(i-1)t/n}$ dépasse ε en valeur absolue quand n tend vers l'infini, et de montrer que la partie composée des sauts d'amplitude minorée est indépendante du reste. La conclusion du travail (théorème 54.2 dans l'édition de 1954) reste ambiguë : « Si $X_0 = 0$, X_t à accroissements indépendants, si les lois L_t varient continûment, on a la décomposition *en loi* » (à laquelle on s'attend, et que je ne détaille pas). Autrement dit, la décomposition trajectorielle proprement dite n'est pas explicite ! Il faut bien insister sur le fait que le processus n'est pas homogène, d'une part, et sur le fait que Paul Lévy sait construire un *processus* combinaison de brownien et de Poisson qui suit la loi en question, d'autre part.

Ce travail est d'une ambition extrême pour l'époque, la concentration est utilisée d'une manière extraordinairement ingénieuse. L'intuition de Paul Lévy lui permet de voir on peut dire physiquement les objets que la Théorie Générale des Processus dégagera beaucoup plus tard.

La lecture de Paul Lévy est toujours d'actualité. On en tirera d'abord une juste admiration de ses brillantes intuitions, de son travail de pionnier, et de la très belle langue dans laquelle ils sont écrits. Les résultats que j'ai rapidement présentés sont bien classiques, on les démontre maintenant d'une autre manière. Mais, d'une part, les outils qu'il a élaborés sont un peu négligés, à tort me semble-t-il (je pense à la concentration) et, d'autre part, après 1945, bien d'autres textes (sur les gaussiens, ou les markoviens) sont toujours très intéressants.

TRAVAUX CITÉS

(88) Sur le rôle de la loi de Gauss dans la théorie des erreurs, *C.R. Acad. Sc.*, 27 mars 1922.

(89) Sur la loi de Gauss, *C.R. Acad. Sc.*, juin 1922.

(96) Sur les série dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes, *Studia Mathematica*, 1931.

(101) Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchaînées, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1935.

(104) Sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à dispersions bornées inférieurement (avec W. Doeblin), *C.R. Acad. Sc.*, 1936.

(113) Sur la détermination des lois de Probabilité par leurs fonctions caractéristiques, *C.R. Acad. Sc.*, 13 novembre 1922.

(144) Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes, *Ann. d. R. Scuola Normale Superiore di Pisa*, 1934.

(145) Observation sur un précédent mémoire de l'auteur [correctif à (144)].

(Add. v. a.) *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier Villars, 1937, seconde édition, 1954.