ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

P. VALLOIS

Sur le passage de certaines marches aléatoires planes au-dessus d'une hyperbole équilatère

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, nº 4 (1989), p. 443-456
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_4_443_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 25, n° 4, 1989, p. 443-456. *Probabilités et Statistiques*

Sur le passage de certaines marches aléatoires planes au-dessus d'une hyperbole équilatère

par

P. VALLOIS

Laboratoire de Probabilités,
Tour n° 56, 3^e^ étage, 75252 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — On étudie le passage de certaines marches aléatoires planes au-dessus d'une hyperbole équilatère. Il est alors possible de réaliser presque sûrement, l'équation de convolution de Barndorff-Nielsen et Halgreen:

$$\mu(\lambda, a, b)=\mu(-\lambda, a, b) \bigstar \gamma(\lambda, 2/a); \qquad \lambda>0, \quad a>0, \quad b>0,$$

où $\mu(\nu, a, b)$ [resp. $\gamma(\lambda, c)$] désigne la loi Gaussienne inverse généralisée (resp. gamma) de paramètres ν, $a>0$ et $b>0$ (resp. $\lambda>0$ et $c>0$).

Mots clés : Marches aléatoires, loi Gaussienne inverse généralisée.

ABSTRACT. — We study the crossing of some planar random walks over an hyperbola. We can give an almost sure realization of the convolution equation of Barndorff-Nielsen and Halgreen:

$$\mu(\lambda, a, b)=\mu(-\lambda, a, b) \bigstar \gamma(\lambda, 2/a); \qquad \lambda>0, \quad a>0, \quad b>0,$$

where $\mu(\nu, a, b)$ (resp. $\gamma(\lambda, c)$) denotes the generalized inverse Gaussian distribution (resp. gamma distribution) with parameters ν, $a>0$ and $b>0$ (resp. $\lambda>0$ and $c>0$).

Classification A.M.S. : 60 E 99, 60 J 15, 60 J 75.

1. INTRODUCTION

On considère la loi Gaussienne inverse généralisée $\mu(\lambda, a, b)$, définie par :

$$\mu(\lambda, a, b)(dx)=\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda/2} \frac{1}{2\,\mathrm{K}_\lambda(\sqrt{ab})} x^{\lambda-1} \exp -\frac{1}{2}\left(ax+\frac{b}{x}\right) 1_{\{x>0\}}\, dx.$$

avec λ réel, a et $b>0$.

Cette distribution a été introduite par Good [3]. Barndorff-Nielsen et Halgreen [1] ont montré qu'elle vérifie la relation :

$$(1) \qquad \mu(\lambda, a, b)=\mu(-\lambda, a, b) * \gamma(\lambda, 2/a); \qquad \lambda>0, \quad a>0, \quad b>0,$$

où $\gamma(\lambda, a)(dx)=\dfrac{x^{\lambda-1}}{a^\lambda\,\Gamma(\lambda)} \exp -(x/a)\, 1_{\{x>0\}}\, dx.$

Si $(y_n)_{n \geqq 1}$ est une suite de réels positifs, on note $([y_1, y_2, \ldots, y_n])_{n \geqq 1}$ la suite définie par récurrence de la manière suivante : $[y_1]=y_1$,

$$[y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}]=y_1+\frac{1}{[y_2, \ldots, y_{n+1}]}.$$

Letac et Seshadri [5] ont établi le résultat d'approximation suivant :

Soient $(\mathrm{U}_n)_{n \geqq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathrm{Loi}(\mathrm{U}_{2n+1})=\gamma(\lambda, 2/b)$, $\mathrm{Loi}(\mathrm{U}_{2n+2})=\gamma(\lambda, 2/a)$ pour tout $n \geqq 0$, avec $b>0$, $a>0$, $\lambda>0$. Alors la suite $([\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_n])_{n \geqq 1}$ converge en loi vers une variable de loi $\mu(\lambda, b, a)$.

Soient α_1 et α_2 deux réels positifs, $(\bar{\mathrm{X}}_n)_{n \geqq 0}$ et $(\bar{\mathrm{Y}}_n)_{n \geqq 0}$ deux marches aléatoires indépendantes définies par :

$$(2) \qquad \bar{\mathrm{X}}_n=\bar{\mathrm{X}}(n+\alpha_1) \quad \text{et} \quad \bar{\mathrm{Y}}_n=\bar{\mathrm{Y}}(n+\alpha_2), \quad \text{pour tout } n \geqq 0,$$

où $(\bar{\mathrm{X}}(t);\, t \geqq 0)$ et $(\bar{\mathrm{Y}}(t);\, t \geqq 0)$ sont deux processus indépendants, à accroissements indépendants et stationnaires, caractérisés par leur transformée de Fourier :

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{E}[\exp i\lambda\, \bar{\mathrm{X}}(t)]=(1-i\lambda\beta_1)^{-t}, \\ \mathrm{E}[\exp i\lambda\, \bar{\mathrm{Y}}(t)]=(1-i\lambda\beta_2)^{-t}, \end{cases}$$

β_1 et β_2 désignant deux réels strictement positifs ($\bar{\mathrm{X}}$ et $\bar{\mathrm{Y}}$ sont deux processus de sauts purs ([2], VI, (4-2)), nuls en zéro et pour tout $t>0$, $\bar{\mathrm{X}}(t)$ (resp. $\bar{\mathrm{Y}}(t)$) a pour loi $\gamma(t, \beta_1)$ (resp. $\gamma(t, \beta_2)$)). On note $(\mathrm{Z}_n)_{n \geqq 0}$ la marche aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^2$, définie par $\mathrm{Z}_n=(\bar{\mathrm{X}}_n, \bar{\mathrm{Y}}_n)$, pour tout $n \geqq 0$, (H) la branche d'hyperbole équilatère incluse dans $\mathbb{R}_+^2$:

$$(\mathrm{H})=\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2;\, xy=1\},$$
$$(\mathrm{H}^+)=\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2;\, xy>1\} \quad \text{et} \quad (\mathrm{H}^-)=\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2;\, xy<1\}.$$

On s'intéresse au temps d'entrée de $(Z_n)_{n \geqq 0}$ dans l'ensemble (H^+). On introduit :

$$N = \inf \{ n \geqq 0 / Z_n \in (H^+) \},$$

avec la convention $\inf \varnothing = 0$.
On a :

$$\{0 < N < +\infty\} = \{\bar{X}_{N-1} \bar{Y}_{N-1} \leqq 1 < \bar{X}_N \bar{Y}_N\}.$$

Soient

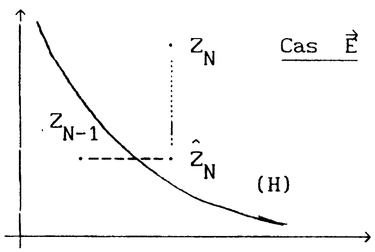
$$\vec{E} = \{\bar{X}_{N-1} \bar{Y}_{N-1} \leqq 1 < \bar{X}_N \bar{Y}_{N-1},\ 0 < N < +\infty\}$$

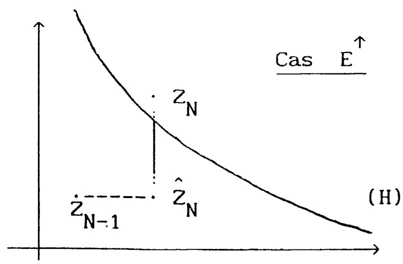
et

$$E^{\uparrow} = \{\bar{X}_N \bar{Y}_{N-1} \leqq 1 < \bar{X}_N \bar{Y}_N,\ 0 < N < +\infty\}.$$

Alors les deux ensembles $\vec{E}$ et $E^{\uparrow}$ sont disjoints et $\{0 < N < +\infty\} = \vec{E} \cup E^{\uparrow}$.

On peut donner une traduction géométrique des deux événements $\vec{E}$ et $E^{\uparrow}$ de la manière suivante :





Si $\hat{Z}_N$ désigne le point de coordonnées $(\bar{X}_N, \bar{Y}_{N-1})$, le cas $\vec{E}$ (resp. $E^{\uparrow}$) est celui où l'hyperbole (H) coupe le côté horizontal (resp. vertical) du triangle $Z_{N-1} \hat{Z}_N Z_N$.

Conditionnellement à $\vec{E}$, on introduit les trois points M, M_1 et M_2 du plan :

1°

$$M_1 (1/\bar{Y}(\alpha_2 + N - 1),\ \bar{Y}(\alpha_2 + N - 1)),$$
$$M (1/\bar{Y}(\alpha_2 + N - 1),\ 1/\bar{X}(\alpha_2 + N - 1))$$

et

$$M_2 (\bar{X}(\alpha_2 + N - 1),\ 1/\bar{X}(\alpha_2 + N - 1)),$$

lorsque $\alpha_2 > \alpha_1 + 1$.

2°

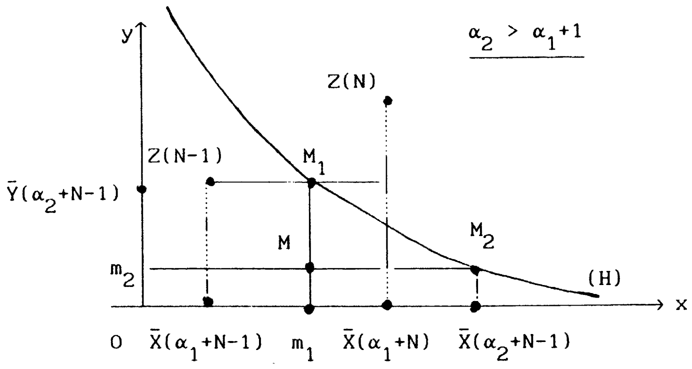
$$M_1 (1/\bar{Y}(\alpha_1 + N - 1),\ \bar{Y}(\alpha_1 + N - 1)),$$
$$M (1/\bar{Y}(\alpha_1 + N - 1),\ \bar{Y}(\alpha_2 + N - 1))$$

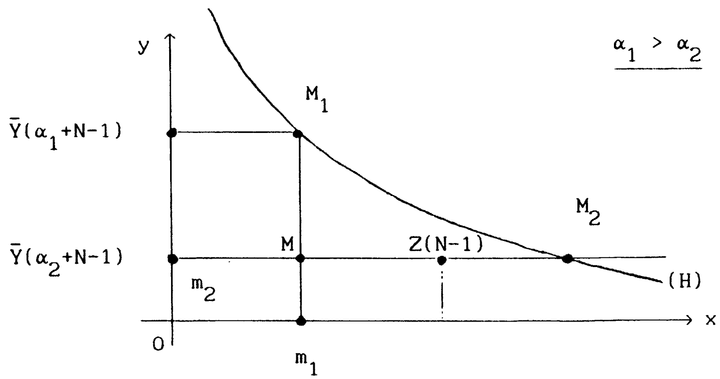
et

$$M_2\,(1/\bar{Y}\,(\alpha_2+N-1),\ \bar{Y}\,(\alpha_2+N-1)),$$

lorsque $\alpha_1 > \alpha_2$.

On a alors le schéma suivant :





On note m_1 et m_2 les projections respectives de M sur les axes Ox et Oy.

Le résultat essentiel de cet article est le

THÉORÈME. — *Soit* $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ *ou* $\alpha_2 > \alpha_1+1$. *Alors conditionnellement à* $\vec{E}$:

1° *Les variables aléatoires* $m_1 M$, MM_1 *et* N (*resp.* $m_2 M$, MM_2 *et* N) *sont indépendantes.*

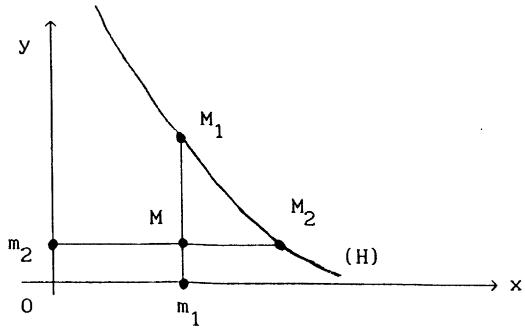
2° $m_2 M$ *a pour loi* $\mu(-|\alpha_2-\alpha_1|,\ 2/\beta_1,\ 2/\beta_2)$, MM_2 *a pour loi* $\gamma(|\alpha_2-\alpha_1|,\ \beta_1)$, *donc* $m_2 M_2$ *a pour loi* $\mu(|\alpha_2-\alpha_1|,\ 2/\beta_1,\ 2/\beta_2)$.

3° $m_1 M$ *a pour loi* $\mu(-|\alpha_2-\alpha_1|,\ 2/\beta_2,\ 2/\beta_1)$, MM_1 *a pour loi* $\gamma(|\alpha_2-\alpha_1|,\ \beta_2)$, *donc* $m_1 M_1$ *a pour loi* $\mu(|\alpha_2-\alpha_1|,\ 2/\beta_2,\ 2/\beta_1)$.

On peut donner une traduction géométrique de la caractérisation de loi Gaussienne inverse généralisée, donnée par Letac et Seshadri [5].

PROPOSITION 1. — *Soient* M *un point (aléatoire) appartenant à* (H^-), m_1 *et* m_2 *les projections de* M *sur les axes* Ox *et* Oy, M_1 *(resp.* M_2*) le point de* (H) *appartenant à la droite* $(m_1 M)$ *(resp.* $(m_2 M)$*). On suppose de plus que* $m_1 M$ *et* MM_1 *sont indépendantes,* $m_2 M$ *et* MM_2 *sont indépendantes,* MM_1 *et* MM_2 *ont pour lois respectives* $\gamma(\alpha, \beta_2)$ *et* $\gamma(\alpha, \beta_1)$. *Alors* $m_2 M$ *et* $m_1 M$ *ont pour lois respectives* $\mu(-\alpha, 2/\beta_1, 2/\beta_2)$ *et* $\mu(-\alpha, 2/\beta_2, 2/\beta_1)$.

On a alors la figure suivante :



2. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Le résultat clé est le suivant :

LEMME 1. — *Soient* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, Y *une variable aléatoire de loi* $\gamma(\alpha, \beta)$ *et* A *un événement tel que* $P(A \mid Y=y) = c\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha'} \exp\left(-\frac{1}{\beta' y}\right)$ *avec* $c > 0$, $\beta' > 0$, $\alpha' > 0$. *Alors :*

1° $P(Y \in dy \mid A) = \mu(\alpha - \alpha', 2/\beta, 2/\beta')(dy)$.

2° *Si* $\alpha' > \alpha$ *et* Y' *désigne une variable aléatoire indépendante de* Y *et de* A, *de loi* $\gamma(\alpha' - \alpha, \beta)$, *on a :*

(i) $P(A \mid Y + Y' = y) = \frac{c\,\beta'^{\alpha' - \alpha}\,\Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha} \exp -\left(\frac{1}{\beta' y}\right)$.

(ii) *On en déduit que conditionnellement à* A, $Y + Y'$ *(resp.* Y, Y'*) a pour loi* $\mu(\alpha' - \alpha, 2/\beta, 2/\beta')$ *(resp.* $\mu(\alpha - \alpha', 2/\beta, 2/\beta')$, $\gamma(\alpha' - \alpha, \beta)$*).*

Démonstration. — Soit f une fonction borélienne et bornée.

1° On pose $\Delta=E(f(Y)1_A)$. On en déduit :

$$\Delta=\frac{c}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty f(y)\exp-\left(\frac{y}{\beta}+\frac{1}{\beta' y}\right)y^{\alpha-\alpha'-1}\,dy,$$

d'où le 1°

2° (i) Soit $\Delta'=E(f(Y+Y')1_A)$. On a :

$$\Delta'=c'\int_0^\infty\int_0^\infty f(y+y')\,y^{\alpha-\alpha'-1}\,y'^{\alpha'-\alpha-1}\exp-\left(\frac{y+y'}{\beta}+\frac{1}{\beta' y}\right)dy\,dy',$$

avec

$$c'=c(\beta^{\alpha'}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha'-\alpha))^{-1}.$$

On pose $t=y+y'$, il vient :

$$\Delta'=c'\int_0^\infty f(t)\exp-\left(\frac{t}{\beta}\right)\psi(t)\,dt$$

avec :

$$\psi(t)=\int_0^t y^{\alpha-\alpha'-1}(t-y)^{\alpha'-\alpha-1}\exp-\frac{1}{\beta' y}\,dy.$$

Pour calculer $\psi(t)$, on fait le changement de variable $\frac{1}{y}=z+\frac{1}{t}$:

$$\psi(t)=t^{\alpha'-\alpha-1}\exp-\left(\frac{1}{\beta' t}\right)\int_0^\infty z^{\alpha'-\alpha-1}\exp-\left(\frac{z}{\beta'}\right)dz$$
$$=\beta'^{\alpha'-\alpha}\Gamma(\alpha'-\alpha)\,t^{\alpha'-\alpha-1}\exp\left(-\frac{1}{\beta' t}\right).$$

D'où :

$$\Delta'=c_0\int_0^\infty f(t)\left(\frac{1}{t}\right)^\alpha\exp-\left(\frac{1}{\beta' t}\right)P(Y+Y'\in dt)$$

avec

$$c_0=c\,\beta'^{\alpha'-\alpha}\Gamma(\alpha')\Gamma(\alpha)^{-1}.$$

COROLLAIRE 1. — *Soient* $\alpha>0$, $\alpha'>0$, $\beta>0$, $\beta'>0$, Y, X *et* X' *trois variables aléatoires de lois respectives* $\gamma(\alpha,\beta)$, $\gamma(\alpha',\beta')$, $\gamma(1,\beta')$, *et* A *l'événement* $A=\{XY<1<(X+X')Y\}$. *Alors :*

1° $P(A\mid Y=y)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha'+1)}\dfrac{1}{\beta'^{\alpha'}}\left(\dfrac{1}{y}\right)^{\alpha'}\exp-\dfrac{1}{\beta' y}$. *On en déduit que la loi de* Y *conditionnellement à* A *est égale à* $\mu(\alpha-\alpha',2/\beta,2/\beta')$.

2° *Conditionnellement à* A, *la variable aléatoire* $X+X'-1/Y$ *est indépendante de* Y *et a pour loi* $\gamma(1,\beta')$.

Démonstration :

$$1^\circ\ \mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{Y}=y)=\iint 1_{\{xy < 1 < (x+x')\,y\}} \frac{x^{\alpha'-1}}{\beta'^{\alpha'}\Gamma(\alpha')\,\beta'} \times \exp\left(-\frac{1}{\beta'}(x+x')\right) dx\, dx',$$

on intègre par rapport à x' il vient :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{Y}=y)=\frac{\exp-(1/(\beta' y))}{\beta'^{\alpha'}\Gamma(\alpha')}\int_0^{1/y} x^{\alpha'-1}\,dx = \frac{1}{\beta'^{\alpha'}\Gamma(\alpha'+1)}\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha'}\exp-\left(\frac{1}{\beta' y}\right).$$

2° Soient f et g deux fonctions boréliennes bornées et

$$\Delta=\mathrm{E}(f(\mathrm{X}+\mathrm{X}'-1/\mathrm{Y})\,g(\mathrm{Y})\,1_{\mathrm{A}}).$$

On a :

$$\Delta=\int f\left(x+x'-\frac{1}{y}\right)g(y)\,1_{\{xy<1<y(x+x')\}}\frac{1}{\beta'} \times \exp-\left(\frac{x'}{\beta'}\right)\mathrm{P}(\mathrm{X}\in dx)\,\mathrm{P}(\mathrm{Y}\in dy)\,dx'$$

d'où :

$$\Delta=\left[\int_0^\infty f(z)\frac{1}{\beta'}\exp-\frac{z}{\beta'}dz\right]\int g(y)\,1_{\{xy<1\}} \times \exp\frac{1}{\beta'}\left(x-\frac{1}{y}\right)\mathrm{P}(\mathrm{X}\in dx)\,\mathrm{P}(\mathrm{Y}\in dy).$$

LEMME 2. — *Soient* $\alpha>0$, $\beta>0$, $\beta'>0$ *et* Y *une variable aléatoire de loi* $\gamma(\alpha, \beta)$.

1° *Si* A *est un événement tel que* $\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{Y}=y)=c\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha'}\exp-\frac{1}{\beta' y}$, $c>0$, $\alpha'>\alpha$, $\beta'>0$ *et* Y' *une variable aléatoire indépendante de* Y *et de* A, *de loi* $\gamma(\alpha'-\alpha, \beta)$, *on a : conditionnellement à* A, $\frac{1}{\mathrm{Y}}-\frac{1}{\mathrm{Y}+\mathrm{Y}'}=\frac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{Y}(\mathrm{Y}+\mathrm{Y}')}$ *est indépendante de* $\mathrm{Y}+\mathrm{Y}'$ *et a pour loi* $\gamma(\alpha'-\alpha, \beta')$.

2° *Si* $\alpha'>0$, $\alpha>\alpha'+1$, X, X' *et* X'' *désignent trois variables aléatoires indépendantes et indépendantes de* Y, *de lois respectives* $\gamma(\alpha', \beta')$, $\gamma(1, \beta')$ *et* $\gamma(\alpha-\alpha'-1, \beta')$ *et* $\mathrm{A}=\{\mathrm{XY}<1<(\mathrm{X}+\mathrm{X}')\mathrm{Y}\}$, *on a : conditionnellement à* A, *les deux v. a.* $\mathrm{Y}-\frac{1}{\mathrm{X}+\mathrm{X}'+\mathrm{X}''}$ *et* $\mathrm{X}+\mathrm{X}'+\mathrm{X}''$ *sont indépendantes et ont pour lois* $\gamma(\alpha-\alpha', \beta)$ *et* $\mu(\alpha-\alpha', 2/\beta', 2/\beta)$.

Démonstration. — Soient f et g deux fonctions boréliennes bornées,

$$\Delta = E\left(f(Y+Y')\, g\left(\frac{Y'}{Y(Y+Y')}\right) 1_A\right)$$

et

$$\Delta' = E\left(f\left(Y - \frac{1}{X+X'+X''}\right) g(X+X'+X'')\, 1_{\{XY < 1 < (X+X')Y\}}\right).$$

1° On a :

$$\Delta = c_1 \int f(y+y')\, g\left(\frac{y'}{y(y+y')}\right) y^{\alpha-\alpha'-1}\, y'^{\alpha'-\alpha-1} \times \exp -\left(\frac{1}{\beta' y} + \frac{1}{\beta}(y+y')\right) 1_{\{y>0,\, y'>0\}}\, dy\, dy'$$

avec $c_1 = c\,(\beta^{\alpha'}\Gamma(\alpha'-\alpha)\Gamma(\alpha))^{-1}$.

On pose

$$u = y+y' \qquad \text{et} \qquad v = \frac{y'}{y(y+y')} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+y'}$$

d'où $y = \dfrac{u}{1+uv}$, $y' = \dfrac{u^2 v}{1+uv}$. On en déduit :

$$\Delta = c_1 \int f(u)\, g(v)\, (uv)^{\alpha'-\alpha-1} \exp -\left(\frac{1}{u\beta'} + \frac{u}{\beta} + \frac{v}{\beta'}\right) 1_{\{u>0,\, v>0\}}\, du\, dv.$$

Le 1° du lemme 2 est ainsi établi.

2° D'une manière identique, on a :

$$\Delta' = c_2 \int f\left(y - \frac{1}{x+x'+x''}\right) g(x+x'+x'')\, y^{\alpha-1}\, x^{\alpha'-1}\, x''^{\alpha-\alpha'-2} \times \exp -\left(\frac{y}{\beta} + \frac{x+x'+x''}{\beta'}\right) 1_{\{xy<1<(x+x')y,\, x>0,\, x'>0,\, x''>0,\, y>0\}}\, dx\, dx'\, dx''\, dy$$

avec $c_2 = [(\beta\beta')^{\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\alpha-\alpha'-1)]^{-1}$.

On fait le changement de variables $x = x$, $t = x+x'$, $v = x+x'+x''$ et $u = y - \dfrac{1}{x+x'+x''}$ (soit $x = x$, $x' = t-x$, $y = u+1/v$, $x'' = v-t$), il vient :

$$\Delta' = c_2 \int f(u)\, g(v) \left(u + \frac{1}{v}\right)^{\alpha-1} \psi(u, v) \times \exp -\left(\frac{1}{\beta}\left(u+\frac{1}{v}\right) + \frac{v}{\beta'}\right) 1_{\{u>0,\, v>0\}}\, du\, dv,$$

avec

$$\psi(u, v)=\int x^{\alpha'-1}(v-t)^{\alpha-\alpha'-2} 1_{(x(u+(1/v))<1<t(u+(1/v)),\, 0<x<t<v\}} dx\, dt.$$

On intègre par rapport à x :

$$\psi(u, v)=\frac{1}{\alpha'}\left(u+\frac{1}{v}\right)^{-\alpha'}\int_{(u+(1/v))^{-1}}^{v}(v-t)^{\alpha-\alpha'-2} dt$$

$$=\frac{(vu)^{\alpha-\alpha'-1}}{\alpha'(\alpha-\alpha'-1)}\left(u+\frac{1}{v}\right)^{1-\alpha}.$$

On en déduit :

$$\Delta'=\frac{c_2}{\alpha'(\alpha-\alpha'-1)}\int f(u)\, g(v)\,(uv)^{\alpha-\alpha'-1} \times \exp-\left(\frac{1}{\beta}\left(u+\frac{1}{v}\right)+\frac{v}{\beta'}\right) 1_{\{u>0,\, v>0\}}\, du\, dv,$$

d'où le 2° du lemme 2.

3. APPLICATIONS

Soient α_1 et α_2 (resp. β_1 et β_2) deux réels positifs (resp. strictement positifs), $(\bar{X}_n)_{n \geqq 0}$ et $(\bar{Y}_n)_{n \geqq 0}$ deux marches aléatoires indépendantes telles que :

(4) $\bar{X}_n$ (resp. $\bar{Y}_n$) a pour loi $\gamma(\alpha_1+n, \beta_1)$ (resp. $\gamma(\alpha_2+n, \beta_2)$), pour tout $n \geqq 0$ (où $\gamma(0, \beta)$ désigne la masse de Dirac en zéro).

On note $(Z_n)_{n \geqq 0}$ la marche aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^2$ définie par $Z_n=(\bar{X}_n, \bar{Y}_n)$, $n \geqq 0$, (H) la branche d'hyperbole équilatère incluse dans $\mathbb{R}_+^2$:

$$(\mathrm{H})=\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 ;\, xy=1\},$$

$$(\mathrm{H}^+)=\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 ;\, xy>1\} \quad \text{et} \quad (\mathrm{H}^-)=\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 ;\, xy<1\}.$$

Soient $\mathrm{N}=\inf\{n \geqq 0 / Z_n \in (\mathrm{H}^+)\}$, avec la convention $\inf \varnothing=0$,

$$\vec{\mathrm{E}}=\{\bar{X}_{\mathrm{N}-1}\bar{Y}_{\mathrm{N}-1} \leqq 1<\bar{X}_{\mathrm{N}}\bar{Y}_{\mathrm{N}-1},\, 0<\mathrm{N}<+\infty\}$$

et

$$\mathrm{E}^{\uparrow}=\{\bar{X}_{\mathrm{N}}\bar{Y}_{\mathrm{N}-1} \leqq 1<\bar{X}_{\mathrm{N}}\bar{Y}_{\mathrm{N}},\, 0<\mathrm{N}<+\infty\}.$$

Alors les deux ensembles $\vec{\mathrm{E}}$ et $\mathrm{E}^{\uparrow}$ sont disjoints et $\{0<\mathrm{N}<+\infty\}=\vec{\mathrm{E}} \cup \mathrm{E}^{\uparrow}$, (On a donné dans l'introduction, une traduction géométrique des deux événements $\vec{\mathrm{E}}$ et $\mathrm{E}^{\uparrow}$.)

Soient $\bar{X}'_n = \bar{Y}_n$, $\bar{Y}'_n = \bar{X}_{n+1}$, $n \geqq 0$. Les deux marches $(\bar{X}'_n)_{n \geqq 0}$ et $(\bar{Y}'_n)_{n \geqq 0}$ sont indépendantes et vérifient (4) avec $\alpha'_1 = \alpha_2$; $\alpha'_2 = \alpha_1 + 1$, $\beta'_1 = \beta_2$ et $\beta'_2 = \beta_1$. On note $N' = \inf\{n \geqq 0 / \bar{X}'_n \bar{Y}'_n > 1\}$. Alors $E^{\uparrow} = \vec{E}'$ et sur cet ensemble on a $N' = N$. Par conséquent :

(5) Le changement de α_1 en α_2, α_2 en $\alpha_1 + 1$, β_1 en β_2 et β_2 en β_1, $\bar{X}$ en $\bar{Y}$, $\bar{Y}$ en $\bar{X}$, permet de ramener l'étude du cas $E^{\uparrow}$ à celle relative à $\vec{E}$.

Dans la suite de cette note, on raisonnera conditionnellement à $\vec{E}$.

PROPOSITION 2. — *Soient* $(Z_n)_{n \geqq 0}$ *une marche aléatoire vérifiant les conditions* (4) *et* $N = \inf\{n \geqq 0 / Z_n \in (H^+)\}$. *Alors :*

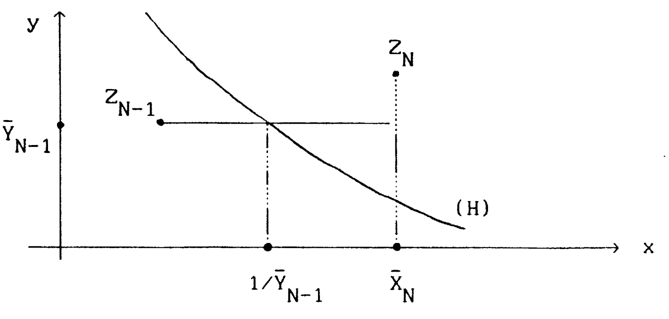
1° N *es fini presque sûrement.*

2° *Conditionnellement à* $\vec{E}$:

(*a*) $\bar{Y}_{N-1}$ *est indépendante de* N *et a pour loi* $\mu(\alpha_2 - \alpha_1, 2/\beta_2, 2/\beta_1)$.

(*b*) $\bar{X}_N - 1/\bar{Y}_{N-1}$ *est indépendante de* N *et de* $\bar{Y}_{N-1}$ *et a pour loi* $\gamma(1, \beta_1)$.

On peut représenter les trois variables aléatoires intervenant dans l'énoncé de la proposition précédente sur le dessin suivant :



Démonstration. — Puisque $\bar{X}_n$ et $\bar{Y}_n$ tendent vers $+\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$, il est clair que $N < +\infty$ presque sûrement.

Soient f, g et h trois fonctions boréliennes bornées et

$$\Delta = E(f(\bar{Y}_{N-1}) g(\bar{X}_N - 1/\bar{Y}_{N-1}) h(N) 1_{\{\vec{E}\}}).$$

On a :

$$\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} h(n+1) E(f(\bar{Y}_n) g(\bar{X}_{n+1} - 1/\bar{Y}_n) 1_{\{N=n+1, \vec{E}\}}),$$

$$\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} h(n+1) E(f(\bar{Y}_n) g(\bar{X}_n + X_{n+1} - 1/\bar{Y}_n) 1_{\{\bar{X}_n \bar{Y}_n < 1 < (\bar{X}_n + X_{n+1}) \bar{Y}_n\}}),$$

où $X_{n+1} = \bar{X}_{n+1} - \bar{X}_n$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 1 avec : $Y = \bar{Y}_n$, $X = \bar{X}_n$ et $X' = X_{n+1}$.

Remarque. — La probabilité de l'événement $\vec{E}$ est donnée par :

$$P(\vec{E}) = 2\,\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\,K_{\alpha_2-\alpha_1}(2\beta)\Big[\sum_{n\geqq 0}\beta^{2n}\big(1/\Gamma(\alpha_1+n+1)\,\Gamma(\alpha_2+n)\big)\Big],$$

où $\beta = 1/\sqrt{\beta_1\beta_2}$.

D'après la remarque (5), on a :

$$P(E^{\uparrow}) = 2\,\beta^{\alpha_1+\alpha_2+1}\,K_{\alpha_1+1-\alpha_2}(2\beta)\Big[\sum_{n\geqq 0}\beta^{2n}\big(1/\Gamma(\alpha_1+n+1)\,\Gamma(\alpha_2+n+1)\big)\Big].$$

Rappelons que

$$K_{-p} = K_p \qquad \text{et} \qquad I_p(z) = \sum_{n\geqq 0}(z/2)^{p+2n}\big(1/\Gamma(p+n+1)\,n!\big).$$

On en déduit que, lorsque $\alpha_1 = 0$, on a :

$$P(\vec{E}) = 2\beta\,(I_{\alpha_2-1}K_{\alpha_2})(2\beta) \qquad \text{et} \qquad P(E^{\uparrow}) = 2\beta\,(K_{\alpha_2-1}I_{\alpha_2})(2\beta).$$

Mais $I_{\alpha_2-1}K_{\alpha_2}(z) + K_{\alpha_2-1}I_{\alpha_2}(z) = 1/z$, d'où $P(\vec{E}) + P(E^{\uparrow}) = 1$.

Remarquons que $P(\vec{E}) + P(E^{\uparrow}) = P(\bar{X}_0\bar{Y}_0 < 1)$; en particulier lorsque $\alpha_1 = 0$, on a $\bar{X}_0 = 0$ et $P(\vec{E}) + P(E^{\uparrow}) = 1$.

Pour réaliser l'équation de convolution (1), il est commode de représenter les deux marches aléatoires $(\bar{X}_n)_{n\geqq 0}$ et $(\bar{Y}_n)_{n\geqq 0}$ à l'aide de deux processus à accroissements indépendants et stationnaires ((2), (3)).

Démonstration du théorème. — 1° On suppose $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$.

(*a*) On a $m_1 M = \bar{Y}(\alpha_2 + N - 1)$ qui a pour loi, d'après la proposition 2, $\mu(\alpha_2-\alpha_1, 2/\beta_2, 2/\beta_1)$.

Soit $\Delta = E(f(MM_1)\,g(m_1 M)\,h(N)\,1_{\vec{E}})$, alors :

$$\Delta = \sum_{n\geqq 1} E\big[f(\bar{Y}(\alpha_1+n-1) - \bar{Y}(\alpha_2+n-1))\,g(\bar{Y}(\alpha_2+n-1))\,h(n)$$
$$\times 1_{\{Y(\alpha_2+n-1)\,X(\alpha_1+n-1) < 1 < Y(\alpha_2+n-1)\,X(\alpha_1+n)\}}\big].$$

D'où $\Delta = E[f(\bar{Y}(\alpha_1-\alpha_2))]\,E[g(\bar{Y}(\alpha_2+N-1))\,h(N)\,1_{\vec{E}}]$. D'après la proposition 2, on en déduit que les v. a. $m_1 M$, MM_1 et N sont indépendantes et le 3° du théorème.

(*b*) Soit $\Delta = E(f(m_2 M)\,g(MM_2)\,h(N)\,1_{\vec{E}})$. Alors :

$$\Delta = \sum_{n\geqq 1} E\big[f(1/\bar{Y}(\alpha_1+n-1))\,g(1/\bar{Y}(\alpha_2+n-1) - 1/\bar{Y}(\alpha_1+n-1))\,h(n)$$
$$\times 1_{\{X(\alpha_1+n-1)\,\bar{Y}(\alpha_2+n-1) < 1 < X(\alpha_1+n)\,Y(\alpha_2+n-1)\}}\big].$$

Soient $\alpha = \alpha_2 + n - 1$, $\beta = \beta_2$, $\alpha' = \alpha_1 + n - 1$, $\beta' = \beta_1$, $\beta = \beta_2$, $Y = \bar{Y}(\alpha_2+n-1)$, $X = \bar{X}(\alpha_1+n-1)$, $X' = \bar{X}(\alpha_1+n) - \bar{X}(\alpha_1+n-1)$, $Y' = \bar{Y}(\alpha_1+n-1) - \bar{Y}(\alpha_2+n-1)$ et $A = \{XY < 1 < (X+X')\,Y\}$. Il suffit alors d'appliquer successivement le 1° du corollaire 1, le 1° du lemme 2 et le 2° (ii) du lemme 1.

2° Supposons à présent : $\alpha_2 > \alpha_1 + 1$.

(*a*) D'après la proposition 2, $m_2 \mathrm{M} = 1/\bar{\mathrm{Y}}(\alpha_2+\mathrm{N}-1)$ a pour loi $\mu(-(\alpha_2-\alpha_1), 2/\beta_1, 2/\beta_2)$, $\mathrm{Z}=\bar{\mathrm{X}}(\alpha_1+\mathrm{N})-1/\bar{\mathrm{Y}}(\alpha_2+\mathrm{N}-1)$ a pour loi $\gamma(1, \beta_1)$ et conditionnellement à $\vec{\mathrm{E}}$, les trois v.a. $m_2 \mathrm{M}$, Z et N sont indépendantes.

Mais

$$\vec{\mathrm{E}} = \bigcup_{n \geqq 1} \{\bar{\mathrm{X}}(\alpha_1+n-1)\bar{\mathrm{Y}}(\alpha_2+n-1) < 1 < \bar{\mathrm{X}}(\alpha_1+n)\bar{\mathrm{Y}}(\alpha_2+n-1)\},$$

on en déduit que conditionnellement à $\vec{\mathrm{E}}$, la variable aléatoire $\mathrm{Z}'=\bar{\mathrm{X}}(\alpha_2+\mathrm{N}-1)-\bar{\mathrm{X}}(\alpha_1+\mathrm{N})$ est indépendante de N, Z et $m_2\mathrm{M}$ et a pour loi $\gamma(\alpha_2-\alpha_1-1, \beta_1)$. De plus

$$\mathrm{MM}_2=\bar{\mathrm{X}}(\alpha_2+\mathrm{N}-1)-1/\bar{\mathrm{Y}}(\alpha_2+\mathrm{N}-1), \qquad \text{d'où} \quad \mathrm{MM}_2=\mathrm{Z}+\mathrm{Z}'.$$

(*b*) On note $\Delta=\mathrm{E}(f(m_1\mathrm{M})g(\mathrm{MM}_1)h(\mathrm{N})1_{\vec{\mathrm{E}}})$, on a :

$$\Delta = \sum_{n \geqq 1} \mathrm{E}[f(1/\bar{\mathrm{X}}(\alpha_2+n-1)g(\bar{\mathrm{Y}}(\alpha_2+n-1)-1/\bar{\mathrm{X}}(\alpha_2+n-1))h(n) \times 1_{\{\mathrm{X}(\alpha_1+n-1)\,\mathrm{Y}(\alpha_2+n-1)<1<\mathrm{X}(\alpha_1+n)\,\mathrm{Y}(\alpha_2+n-1)\}}].$$

Soient $\alpha=\alpha_2+n-1$, $\alpha'=\alpha_1+n-1$, $\beta'=\beta_1$, $\beta=\beta_2$, $\mathrm{X}=\bar{\mathrm{X}}(\alpha_1+n-1)$, $\mathrm{X}'=\bar{\mathrm{X}}(\alpha_1+n)-\bar{\mathrm{X}}(\alpha_1+n-1)$, $\mathrm{X}''=\bar{\mathrm{X}}(\alpha_2-1+n)-\bar{\mathrm{X}}(\alpha_1+n)$, $\mathrm{Y}=\bar{\mathrm{Y}}(\alpha_2+n-1)$ et $\mathrm{A}=\{\mathrm{XY}<1<(\mathrm{X}+\mathrm{X}')\mathrm{Y}\}$. On applique alors le 2° du lemme 2; on en déduit l'indépendance des v.a. $m_1\mathrm{M}$, MM_1 et N et la loi de $m_1\mathrm{M}$ et MM_1, conditionnellement à $\vec{\mathrm{E}}$.

Démonstration de la proposition 1. — On rappelle le résultat de Letac et Seshadri [5] :

Soient U_1, U_2 et U trois variables aléatoires strictement positives, indépendantes, U_1 de loi $\gamma(\alpha, \beta_1)$, U_2 de loi $\gamma(\alpha, \beta_2)$ et telles que les deux variables aléatoires U et $\dfrac{1}{\mathrm{U}_2+1/(\mathrm{U}_1+\mathrm{U})}$ aient même loi. Alors :

(6) U a pour loi $\mu(-\alpha, 2/\beta_1, 2/\beta_2)$.

On a :

$$m_2\mathrm{M}=\frac{1}{m_1\mathrm{M}_1}=\frac{1}{m_1\mathrm{M}+\mathrm{MM}_1} \qquad \text{et} \qquad m_1\mathrm{M}=\frac{1}{m_2\mathrm{M}_2}=\frac{1}{m_2\mathrm{M}+\mathrm{MM}_2}.$$

De plus $m_i\mathrm{M}$ et MM_i sont indépendantes, $i=1, 2$, MM_1 (resp. MM_2) a pour loi $\gamma(\alpha, \beta_2)$ (resp. $\gamma(\alpha, \beta_1)$). Soient U_1, U_2 et U trois v.a. indépendantes telles que $\mathrm{U}_1 \overset{(d)}{=} \mathrm{MM}_2$, $\mathrm{U}_2 \overset{(d)}{=} \mathrm{MM}_1$ et $\mathrm{U} \overset{(d)}{=} m_2\mathrm{M}$. On applique (6), on en déduit que $m_2\mathrm{M}$ a pour loi $\mu(-\alpha, 2/\beta_1, 2/\beta_2)$. Par raison de symétrie, la loi de $m_1\mathrm{M}$ est égale à $\mu(-\alpha, 2/\beta_2, 2/\beta_1)$.

Remarque. — Afin de donner une extension aux théorèmes de Ray et Knight sur les temps locaux du mouvement brownien ([4], [6], [7]), j'ai introduit le temps d'arrêt T : $\mathrm{T}=\inf\{t \mid \mathrm{L}_t\mathrm{L}_t^\alpha > 1\}$, où L et L^α désignent respectivement le temps local au niveau 0 (resp. $\alpha > 0$) d'un mouvement brownien $(B_t;\ t \geqq 0)$ réel, issu de 0. Alors : $B_T = 0$ ou α, $L_T = 1/L_T^\alpha$ et

(7) conditionnellement à $\{B_T = 0\}$ (resp. $\{B_T = \alpha\}$) L_T^α (resp. L_T) a pour loi $\mu(0, 1/\alpha, 1/\alpha)$ (resp. $\mu(1, 1/\alpha, 1/\alpha)$).

Le lien avec les marches aléatoires est le suivant :

On introduit la suite de temps d'arrêt $(\sigma_n)_{n \geqq 0}$ de passages successifs du mouvement brownien aux niveaux 0 et α : $\sigma_0 = 0$, et

$$\sigma_{n+1} = \inf\{t > \sigma_n / B_t \in \{0, \alpha\} \setminus \{B_{\sigma_n}\}\}, \qquad n \geqq 0.$$

Alors :

(i) $L_t^\alpha = L_{\sigma_{2n}}^\alpha$ pour tout t de $[\sigma_{2n}, \sigma_{2n+1}]$, $L_t = L_{\sigma_{2n+1}}$ pour tout t de $[\sigma_{2n+1}, \sigma_{2n+2}]$, $n \geqq 0$.

(ii) Soient $X_0 = Y_0 = 0$, $X_{n+1} = L_{\sigma_{2n+2}} - L_{\sigma_{2n}}$, $Y_{n+1} = L_{\sigma_{2n+2}}^\alpha - L_{\sigma_{2n}}^\alpha$, $n \geqq 0$.

D'après le (i), pour tout $n \geqq 0$ on a : $X_{n+1} = L_{\sigma_{2n+1}} - L_{\sigma_{2n}}$ et $Y_{n+1} = L_{\sigma_{2n+2}}^\alpha - L_{\sigma_{2n+1}}^\alpha$, et de plus la famille de variables aléatoires $\{X_n, Y_n;\ n \geqq 1\}$ est formée de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées et de loi $\gamma(1, 2\alpha)$.

On note $(\bar{X}_n)_{n \geqq 0}$ et $(\bar{Y}_n)_{n \geqq 0}$ les deux marches aléatoires : $\bar{X}_n = \sum_{p=0}^{n} X_p$ et $\bar{Y}_n = \sum_{p=0}^{n} Y_p$, $n \geqq 0$. Ces deux marches vérifient la propriété (4) avec $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et $\beta_1 = \beta_2 = 2\alpha$, de plus $\bar{X}_n = L_{\sigma_{2n}}$ et $\bar{Y}_n = L_{\sigma_{2n}}^\alpha$ pour tout $n \geqq 0$.

(iii) D'après (i) on a :

$$\{B_T = 0,\ T < +\infty\} = \bigcup_{n \geqq 0} \{\sigma_{2n} \leqq T < \sigma_{2n+1}\}$$

(resp. $\{B_T = \alpha,\ T < +\infty\} = \bigcup_{n \geqq 0} \{\sigma_{2n+1} \leqq T < \sigma_{2n+3}\}$), et

$$\begin{aligned}\{\sigma_{2n} \leqq T < \sigma_{2n+1}\} &= \{L_{\sigma_{2n}} L_{\sigma_{2n}}^\alpha \leqq 1 < L_{\sigma_{2n+1}} L_{\sigma_{2n+1}}^\alpha\} \\ &= \{\bar{X}_n \bar{Y}_n \leqq 1 < \bar{X}_{n+1} \bar{Y}_n\},\end{aligned}$$

et sur cet ensemble on a : $L_T^\alpha = \bar{Y}_n$, $L_T = 1/\bar{Y}_n$ (resp.

$$\{\sigma_{2n+1} \leqq T < \sigma_{2n+2}\} = \{L_{\sigma_{2n+1}} L_{\sigma_{2n+1}}^\alpha \leqq 1 < L_{\sigma_{2n+2}} L_{\sigma_{2n+2}}^\alpha\},$$

d'où :

$$\{\sigma_{2n+1} \leqq T < \sigma_{2n+2}\} = \{\bar{X}_{n+1} \bar{Y}_n \leqq 1 < \bar{X}_{n+1} \bar{Y}_{n+1}\},$$

et sur cet ensemble on a :

$$L_T = \bar{X}_{n+1} \qquad \text{et} \qquad L_T^\alpha = 1/\bar{X}_{n+1}).$$

Soit $N = \inf\{n \geqq 0 / \bar{X}_n \bar{Y}_n > 1\}$, alors :

$$\{B_T = 0,\ T < +\infty\} = \{1 \leqq N < +\infty,\ \bar{X}_{N-1} \bar{Y}_{N-1} \leqq 1 < \bar{X}_N \bar{Y}_{N-1}\}$$

et sur cet ensemble, on a :

$$L_T^\alpha = \bar{Y}_{N-1} \qquad \text{et} \qquad L_T = 1/\bar{Y}_{N-1}.$$

(resp.

$$\{B_T = \alpha,\ T < +\infty\} = \{1 \leqq N < +\infty,\ \bar{X}_N \bar{Y}_{N-1} \leqq 1 < \bar{X}_N \bar{Y}_N\}$$

et sur cet ensemble, on a :

$$L_T = \bar{X}_N \qquad \text{et} \qquad L_T^\alpha = 1/\bar{X}_N).$$

La propriété (7) résulte alors de la proposition 2.

RÉFÉRENCES

[1] O. Barndorff-Nielsen et C. Halgreen, Infinite Divisibility of the Hyperbolic and Generalized Inverse Gaussian Distribution, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete,* vol. **38**, 1977, p. 309-312.

[2] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* vol. **II**, Wiley, New York, 1966.

[3] I. J. Good, The Population Frequencies of Species and the Estimation of Population Parameters, *Biometrika,* vol. **40**, 1953, p. 237-260.

[4] F. B. Knight, Random Walks and a Sojourn Density of Brownian Motion, *T.A.M.S.,* vol. **109**, 1963, p. 56-86.

[5] G. Letac et V. Seshadri, A Characterization of the Generalized Inverse Gaussian Distribution by Continued Fractions, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete,* vol. **62**, 1983, p. 485-489.

[6] D. B. Ray, Sojourn Times of Diffusion Processes, *Ill. J. Math.,* vol. **7**, 1963, p. 615-630.

[7] P. Vallois, *Une extension des théorèmes de Ray-Knight sur les temps locaux browniens* (à paraître).

(*Manuscrit reçu le* 12 *décembre* 1988.)