

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. HASSENFORDER

Seules les affinités préservent le type de la loi gamma à paramètre entier

Annales de l'I. H. P., section B, tome 26, n° 4 (1990), p. 541-548

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_4_541_0

© Gauthier-Villars, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Seules les affinités préservent le type de la loi gamma à paramètre entier

par

C. HASSENFORDER

Laboratoire de Probabilités et de Statistique,
Université Paul-Sabatier, U.A.-C.N.R.S. n° 745,
118, Route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France

RÉSUMÉ. — Soit $\mu(dx) = \frac{1}{(n-1)!} e^{-x} x^{n-1} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) dx$ la loi gamma de paramètre n entier et soit $A(\mu)$ l'ensemble des mesures images de μ par les affinités de \mathbb{R} . Soit f une application mesurable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ayant la propriété suivante : l'image par f de tout élément de $A(\mu)$ est dans $A(\mu)$. Nous démontrons qu'une telle application f est affine presque partout.

ABSTRACT. — If $\mu(dx) = \frac{1}{(n-1)!} e^{-x} x^{n-1} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) dx$ is the gamma distribution with integer parameter n and if $A(\mu)$ is the set of image measures of μ by all affinities, consider the measurable function f from \mathbb{R} to \mathbb{R} with the following property: the image by f of every element of $A(\mu)$ is in $A(\mu)$. We prove that such an f is affine almost everywhere.

Classification A.M.S. : 60 E 10; 62 E 10.

INTRODUCTION

Soit μ une mesure de probabilité sur la droite réelle \mathbb{R} . Soit A le groupe affine de \mathbb{R} ; désignons par $A(\mu)$ l'ensemble des mesures images de μ par les éléments de A : $A(\mu)$ est appelé le type de μ . Désignons par $F(\mu)$ l'ensemble des applications mesurables réelles préservant le type de μ .

En d'autres termes, si X est une variable aléatoire réelle de loi μ , $A(\mu)$ est l'ensemble des lois des variables aléatoires $u + pX$ avec u et p réels et $p \neq 0$, et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dans $F(\mu)$ si quels que soient $p \neq 0$ et u , il existe $P \neq 0$ et U tels que $f(u + pX)$ et $U + PX$ aient même loi.

Par exemple, si $\mu(dx) = (\pi(1+x^2))^{-1} dx$ (loi de Cauchy), la classe $F(\mu)$ est un ensemble assez vaste, caractérisé par Letac dans [2].

Pour tout μ , il est clair que $F(\mu)$ contient au moins l'ensemble A des fonctions affines; plus précisément $F(\mu)$ contient au moins la classe $T(\mu)$ des fonctions f telles que : pour tout élément v de $A(\mu)$, il existe $p_v \neq 0$ et u_v tels que :

$$f(x) = u_v + p_v x \quad v \text{ presque partout.}$$

Kingman a conjecturé (voir [3]), que $F(\mu) \neq T(\mu)$ si et seulement si μ est une loi de Cauchy. A l'appui de cela, on a pu montrer que $F(\mu) = T(\mu)$ si μ est une loi normale (Letac-Pradines [3]) et si μ est une loi uniforme sur un intervalle borné de \mathbb{R} (Dunau-Sénateur [1]). Cette conjecture de Kingman semble difficile à montrer dans le cas général, et chaque vérification pour un type particulier fait appel à une technique spécialement adaptée au type considéré.

Le but du présent article est de démontrer la conjecture ci-dessus dans le cas des lois gamma à paramètre entier. La procédure semble inadaptable si le paramètre n'est pas entier.

THÉORÈME. — Soit $\mu(dx) = \frac{1}{(n-1)!} e^{-x} x^{n-1} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) dx$ la loi gamma standard de paramètre n . Si f est une application mesurable réelle telle que $f(A(\mu)) \subseteq A(\mu)$, alors f est égale presque partout à une application affine.

Démonstration. — Rappelons que si X est une variable aléatoire de loi μ , la fonction caractéristique de X est définie par

$$\Psi(t) = E(e^{itX}) = (1 - it)^{-n}$$

Si $\mu_{u,p}$ est la loi de $u + pX$, alors :

$$\mu_{u,p}(dx) = \frac{1}{(n-1)!} p^{-n} e^{-((x-u)/p)} (x-u)^{n-1} \mathbb{1}_p(x-u) dx$$

avec $I_p = \mathbb{1}_{[0, +\infty[}$ si $p > 0$ et $I_p = -\mathbb{1}_{] -\infty, 0]}$ si $p < 0$.

Si $\Psi_{u, p}(t) = E(e^{it(u+pX)})$, alors $\Psi_{u, p}(t) = e^{iut}(1-ipt)^{-n}$.

Soit $f \in F(\mu)$, c'est-à-dire que $f(A(\mu)) \subseteq A(\mu)$.

Alors, pour tout $(u, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, il existe $U(u, p) \in \mathbb{R}$ et $P(u, p) \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$f\mu_{u, p} = \mu_{U, P}$$

D'où, en prenant les fonctions caractéristiques, on a :

$$E(e^{itf(u+pX)}) = E(e^{it(U+PX)})$$

c'est-à-dire

$$e^{iUt}(1-itP)^{-n} = \int e^{itf(x)} \frac{1}{(n-1)!} p^{-n} e^{-((x-u)/p)} (x-u)^{n-1} I_p(x-u) dx.$$

Donc :

$$\begin{aligned} e^{itU-(u/p)}(1-itP)^{-n} &= \frac{1}{(n-1)! p^n} \int e^{itf(x)-(x/p)} (x-u)^{n-1} I_p(x-u) dx \\ &= \frac{1}{(n-1)! p^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (-u)^k K(u, p) \end{aligned} \tag{1}$$

où

$$K(u, p) = \int_u^{+\infty} e^{itf(x)-(x/p)} x^{n-1-k} dx \quad \text{si } p > 0$$

et

$$K(u, p) = \int_{-\infty}^u e^{itf(x)-(x/p)} x^{n-1-k} dx \quad \text{si } p < 0$$

On en déduit alors que pour tout t fixé et pour tout $p \neq 0$ fixé, le deuxième membre de l'égalité (1) est une fonction absolument continue de u (comme somme de produits de fonctions absolument continues) et n fois dérivable par rapport à u , de dérivée n -ième égale presque partout à :

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n e^{itf(u)-(u/p)}$$

Il en résulte donc que le premier membre de (1) :

$$u \rightarrow e^{itU-(u/p)}(1-itP)^{-n}$$

est absolument continu et n fois dérivable presque partout.

On en déduit d'abord, en multipliant par $e^{u/p}$ que : $u \rightarrow e^{itU}(1-itP)^{-n}$ est absolument continu et n fois dérivable presque partout.

Puis, en prenant le carré de la fonction précédente d'une part, et en prenant $t' = 2t$ d'autre part, que les fonctions :

$$u \rightarrow e^{2itU}(1-itP)^{-2n} \quad \text{et} \quad u \rightarrow e^{2it'U}(1-2it'P)^{-n}$$

sont absolument continues et n fois dérivables presque partout.

On montre alors que U et P sont des fonctions absolument continues de u et n fois dérivables presque partout par rapport à u .

Plus précisément, pour tout $p \neq 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe un ensemble $E_{p,t}$ de mesure de Lebesgue nulle, tel que sur $E_{p,t}^c$, U et P soient n fois dérivables par rapport à u .

On a donc, pour tout $u \in E_{p,t}^c$,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{p}\right)^n e^{itf(u)-(u/p)} &= \frac{\partial^n}{\partial u^n} (e^{itU-(u/p)}(1-itP)^{-n}) \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\partial^k}{\partial u^k} (e^{itU-(u/p)}) \frac{\partial^{n-k}}{\partial u^{n-k}} ((1-itP)^{-n}) \end{aligned}$$

Or $\frac{\partial^k}{\partial u^k} (e^{itU-(u/p)}) = R_k(it) e^{itU-(u/p)}$ où R_k est un polynôme à coefficients réels de degré k , tel que :

$$\begin{aligned} R_0 &= 1 \\ R_{k+1}(it) &= \frac{\partial R_k}{\partial u}(it) + \left(it \frac{\partial U}{\partial u} - \frac{1}{p}\right) R_k(it). \end{aligned}$$

En particulier, le coefficient dominant de R_k est $\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^k$ et

$$\frac{\partial^k}{\partial u^k} ((1-itP)^{-n}) = Q_k(it) (1-itP)^{-n-k} \quad \text{avec} \quad Q_0 = 1;$$

$$Q_1(it) = nit \frac{\partial P}{\partial u}.$$

Donc Q_k est nul pour $k \geq 1$ si $\frac{\partial P}{\partial u} = 0$; sinon Q_k est un polynôme à coefficients réels de degré k tel que :

$$\begin{aligned} Q_0 &= 1 \\ Q_{k+1}(it) &= \frac{\partial Q_k}{\partial u}(it) (1-itP) + (n+k) it \frac{\partial P}{\partial u} Q_k(it). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $u \in E_{p, t}^c$:

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n e^{itf(u) - (u/p)} = \sum_{k=0}^n C_n^k R_k(it) Q_{n-k}(it) e^{itU - (u/p)} (1 - itP)^{k-2n}$$

C'est-à-dire :

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n (1 - itP)^{2n} e^{itf(u)} = \sum_{k=0}^n C_n^k R_k(it) Q_{n-k}(it) (1 - itP)^k e^{itU}.$$

Soit maintenant une suite $\{t_j\}_{j \geq 0}$ convergente dans \mathbb{R} et soit

$$E_p = \bigcup_{j \geq 0} E_{p, t_j}$$

Alors, pour tout $u \in E_p^c$ et pour tout j :

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n (1 - it_j P)^{2n} e^{it_j f(u)} = \sum_{k=0}^n C_n^k R_k(it_j) Q_{n-k}(it_j) (1 - it_j P)^k e^{it_j U}.$$

Or, pour p et pour $u \in E_p^c$ fixés, les fonctions :

$$z \rightarrow \left(-\frac{1}{p}\right)^n (1 - Pz)^{2n} e^{zf(u)}$$

et

$$z \rightarrow \sum_{k=0}^n C_n^k R_k(z) Q_{n-k}(z) (1 - Pz)^k e^{zU}$$

sont des fonctions analytiques qui coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation; elles coïncident donc sur tout \mathbb{C} , et en particulier sur \mathbb{R} . On utilise alors par exemple, que la famille $\{x^\alpha e^{\beta x}\}_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2}$ est une famille libre sur \mathbb{R} pour conclure que pour tout p fixé et pour tout $u \in E_p^c$:

$$U = f(u) \tag{2}$$

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n (1 - zP)^{2n} = \sum_{k=0}^n C_n^k R_k(z) Q_{n-k}(z) (1 - Pz)^k. \tag{3}$$

En particulier, de (2) on déduit que U ne dépend que de u .

On s'intéresse maintenant à l'égalité des polynômes (3).

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n (1 - Pz)^{2n} = Q_n(z) + \sum_{k=1}^n C_n^k R_k(z) Q_{n-k}(z) (1 - Pz)^k$$

On conclut en particulier que $Q_n(z)$ est divisible par $(1 - Pz)$. Or

$$Q_n(z) = \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial u}(z)(1 - Pz) + (2n - 1)z \frac{\partial P}{\partial u} Q_{n-1}(z).$$

Donc $Q_{n-1}(z)$ est aussi divisible par $(1 - Pz)$ et on montre par récurrence que pour $k \leq n$, $Q_k(z)$ est divisible par $(1 - Pz)$.

En particulier $Q_1(z)$ est divisible par $(1 - Pz)$; or comme $Q_1(z) = nz \frac{\partial P}{\partial u}$, ceci n'est possible que si $\frac{\partial P}{\partial u} = 0$.

Donc P ne dépend que de p et $Q_k(z) = 0$ pour $k \geq 1$.

En revenant à (3) on a donc pour tout p et pour tout $u \in E_p^c$:

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n (1 - Pz)^{2n} = R_n(z) Q_0(z) (1 - Pz)^n$$

c'est-à-dire $R_n(z) = \left(-\frac{1}{p}\right)^n (1 - Pz)^n$.

En identifiant les coefficients dominants des deux polynômes, on obtient :

$$\left(\frac{P}{p}\right)^n = \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^n$$

Le premier membre ne dépend que de p , le deuxième que de u , donc

$$\left(\frac{P}{p}\right)^n = \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^n = \text{Cte.}$$

En particulier, si n est impair $\frac{P}{p} = \frac{\partial U}{\partial u} = c$.

D'où $P = pc$ et $U = f(u) = cu + d$ presque partout.

Si n est pair le résultat n'est pas aussi immédiat. On a :

$$\left(\frac{P}{p}\right)^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2$$

Posons $\frac{\partial U}{\partial u} = c \varepsilon_1(u)$ et $P = pc \varepsilon_2(p)$ où $c \in \mathbb{R}_+^*$ et où ε_1 et ε_2 sont deux fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans $\{-1, +1\}$.

$$\text{On a } U(u_2) - U(u_1) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial U}{\partial u}(s) ds = \int_{u_1}^{u_2} c \varepsilon_1(s) ds.$$

$$\text{D'autre part } U = f(u) \text{ donc } \int_{u_1}^{u_2} c \varepsilon_1(s) ds = f(u_2) - f(u_1).$$

On en déduit :

$$f(u + pX) - f(u) = \int_u^{u+pX} c \varepsilon_1(s) ds.$$

Or $f(u + pX)$ a pour loi $f\mu_{u, p} = \mu_{U, p}$.

On en déduit $f(u + pX) \stackrel{\mathcal{L}}{=} U + PX = f(u) + pc \varepsilon_2(p) X$ et ceci donne :

$$\int_u^{u+pX} c \varepsilon_1(s) ds \stackrel{\mathcal{L}}{=} pc \varepsilon_2(p) X.$$

Considérons maintenant les ensembles suivants :

$$\Lambda_1 = \left\{ u \in \mathbb{R}; \varepsilon_1(u) = 1 \text{ et } \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} \text{ existe en } u \right\}$$

$$\Lambda_{-1} = \left\{ u \in \mathbb{R}; \varepsilon_1(u) = -1 \text{ et } \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} \text{ existe en } u \right\}$$

On a vu que U est n fois dérivable presque partout. Comme ici n est pair, $n \geq 2$ donc $\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}$ existe presque partout; ainsi $(\Lambda_{-1} \cup \Lambda_1)^c$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Supposons par exemple que Λ_1 est non vide et soit $u_1 \in \Lambda_1$. Alors $\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}(u_1)$ existe et $\frac{\partial U}{\partial u}$ est dérivable donc continue en u_1 .

Comme $\frac{\partial U}{\partial u} = c \varepsilon_1$, ε_1 est continue en u_1 et il existe un voisinage $]u_1 - \alpha, u_1 + \alpha[$ de u_1 sur lequel $\varepsilon_1(u) = 1$.

On a ainsi montré que Λ_1 est ouvert; par le même argument Λ_{-1} est aussi ouvert.

Revenons à l'équation $\int_u^{u+pX} \varepsilon_1(s) ds \stackrel{\mathcal{L}}{=} p \varepsilon_2(p) X$.

Soit $p > 0$ fixé.

La v. a. $\int_{u_1}^{u_1+pX} \varepsilon_1(s) ds$ prend des valeurs positives sur l'ensemble $(|X| < \alpha/p)$ qui est de mesure non nulle.

De l'égalité $\int_{u_1}^{u_1+pX} \varepsilon_1(s) ds \stackrel{\mathcal{L}}{=} p \varepsilon_2(p) X$, on en conclut donc que $\varepsilon_2(p) = 1$. Dès lors, ε_1 ne peut être que 1 presque partout. (Sinon, il

existerait $u_{-1} \in \Lambda_{-1}$, puis un voisinage de u_{-1} sur lequel $\varepsilon_1 = -1$, puis en appliquant $\int_{u_{-1}}^{u_{-1} + pX} \varepsilon_1(s) ds \stackrel{\mathcal{L}}{=} p \varepsilon_2(p) X$, on obtiendrait $\varepsilon_2(p) < 0$ ce qui est contradictoire.)

Donc, si Λ_1 est non vide, alors Λ_{-1} est vide et $\varepsilon_1 = 1$ presque partout; on a alors $\frac{\partial U}{\partial u} = c$, $\varepsilon_2(p) = 1$ et $P = pc$ presque partout.

Si Λ_1 est vide, alors $\varepsilon_1 = -1$ presque partout; d'où $\frac{\partial U}{\partial u} = c$, $\varepsilon_2(p) = -1$ et $P = -pc$ presque partout.

RÉFÉRENCES

- [1] J. L. DUNAU et H. SÉNATEUR, Quelles fonctions changent toute loi uniforme en une loi uniforme? *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1984, Paris 20, p. 247-250.
- [2] G. LETAC, Which Functions Preserve Cauchy Laws?, *Proc. Am. Math. Soc.*, t. **67**, 1977, p. 277-286.
- [3] G. LETAC et J. PRADINES, Seules les affinités préservent les lois normales; *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **286**, 1978, p. 399-402.

(Manuscrit reçu le 20 septembre 1989;
révisé le 11 mai 1990.)