ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MOSTAFA BOUHAIK
LÉONARD GALLARDO

Un théorème limite central dans un hypergroupe bidimensionnel

Annales de l'I. H. P., section B, tome 28, nº 1 (1992), p. 47-61
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1992__28_1_47_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 28, n° 1, 1992, p. 47-61. *Probabilités et Statistiques*

Un théorème limite central dans un hypergroupe bidimensionnel

par

Mostafa BOUHAIK et Léonard GALLARDO

Département de Mathématiques, Université de Bretagne Occidentale
6, avenue Victor-Le-Gorgeu, 29287 Brest Cedex, France

RÉSUMÉ. — Nous étudions ici les marches aléatoires sur l'hypergroupe $(\mathbb{N}^2, *_\alpha)$ où $*_\alpha$ est la convolution associée aux polynômes discaux d'indice $\alpha>0$. Le résultat essentiel est le théorème limite central suivant : si (X_k, Y_k) est la position dans $\mathbb{N}^2$ à l'instant k d'une marche aléatoire de loi μ satisfaisant des hypothèses de moment convenables, alors la loi de $(k^{-1/2} X_k, k^{-1/2} Y_k)$ converge étroitement quand $k \to +\infty$ vers une probabilité sur $\mathbb{R}_+^2$ ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue égale à

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\sqrt{2\pi a}\, b^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}(xy)^\alpha (x+y)\, e^{-(2/b)\,xy}\, e^{-(1/2a)\,(x-y)^2}$$
$$(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$

où a et b sont des constantes positives liées à μ.

ABSTRACT. — In this paper we study the random walks on the hypergroup $(\mathbb{N}^2, *_\alpha)$ where $*_\alpha$ is the convolution generated by the disk polynomials of index $\alpha>0$. The main result is the following central limit theorem: let (X_k, Y_k) be the position on $\mathbb{N}^2$ at time k of a random walk of law μ satisfying some moment hypothesis, then $(k^{-1/2} X_k, k^{-1/2} Y_k)$ converges in distribution to a probability measure on $\mathbb{R}_+^2$ having a density with respect

Classification A.M.S. : 60 F 05 et 60 B 10.

to Lebesgue measure of the following form:

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\sqrt{2\pi a}\, b^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}(xy)^{\alpha}(x+y)\,e^{-(2/b)\,xy}\,e^{-(1/2a)\,(x-y)^2}$$
$$(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$

where a and b are positive constants depending on μ.

1. INTRODUCTION

On peut voir une marche aléatoire de loi μ sur un groupe G comme une chaîne de Markov dont le noyau de transition P est de la forme $\mathrm{P}f = \mu * f\ (f \in \mathscr{C}_b(\mathrm{G}))$ où $*$ désigne la convolution des mesures sur G. Un hypergroupe (*cf.* [9]) est un espace topologique, dépourvu en général d'opération (de groupe), où subsiste une convolution convenable des mesures. On peut alors y étudier les chaînes de Markov à noyau de convolution. L'intérêt probabiliste de tels objets, outre qu'ils généralisent les marches aléatoires sur les groupes, réside dans la possibilité d'obtenir de nouvelles chaînes de Markov qui peuvent avoir un comportement intéressant en vue des applications. Les hypergroupes unidimensionnels ont été le cadre de nombreux travaux dans cette direction (*cf.* [6], [10], [17], [18]). Dans cet article nous nous intéressons à une structure de convolution sur $\mathbb{N}^2$ que nous avions déjà signalée dans [9] et qui est associée à une suite de polynômes orthogonaux à deux variables. Le principal résultat est un théorème limite central (non gaussien) bidimensionnel. Quelques lois de probabilités non classiques sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ sont en même temps mises en évidence.

2. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

Soit $\alpha > 0$. Les polynômes discaux (en anglais disk polynomials) forment une famille $\{ \mathrm{R}^{\alpha}_{m,n}(z, \bar{z}),\ (m, n) \in \mathbb{N}^2 \}$ de polynômes à deux variables, normalisés par $\mathrm{R}^{\alpha}_{m,n}(1, 1) = 1$ et obtenus par orthogonalisation sur le disque unité $\mathrm{D} = \{ z \in \mathbb{C};\ |z| \leqq 1 \}$ de la suite $1, z, \bar{z}, z^2, z\bar{z}, \bar{z}^2, \ldots$ par rapport à la mesure

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \lambda_{\alpha}(dx\, dy) = \pi^{-1}(\alpha+1)(1-x^2-y^2)^{\alpha}\, dx\, dy \\ \qquad (z = x + iy \in \mathrm{D}) \end{cases}$$

(*cf.* [1], [2], [4], [11], [12], [14]). Ils satisfont les relations d'orthogonalité

$$(2.2)\qquad \iint_D R^\alpha_{m,n}(z)\,\overline{R^\alpha_{k,l}(z)}\,\lambda_\alpha(dx\,dy) = (h^\alpha_{m,n})^{-1}\,\delta_{m,k}\,\delta_{n,l}$$

où

$$(2.3)\qquad h^\alpha_{m,n} = \frac{(m+n+\alpha+1)\,\Gamma(m+\alpha+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{m!\,n!\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+2)},$$

et où on a écrit $R^\alpha_{m,n}(z) = R^\alpha_{m,n}(z, \bar z)$ pour simplifier les notations. En coordonnées polaires, $R^\alpha_{m,n}$ peut être représenté en termes des polynômes de Jacobi $R_i^{(\alpha,\beta)}$ [normalisés par $R_i^{(\alpha,\beta)}(1)=1$], par la formule (*cf.* [1], [2], [11]) :

$$(2.4)\qquad R^\alpha_{m,n}(\rho e^{i\theta}) = e^{i(m-n)\theta}\,\rho^{|m-n|}\,R^{(\alpha,\,|m-n|)}_{m\wedge n}(2\rho^2-1),$$

où $m\wedge n = \inf(m, n)$. En particulier on a :

$$(2.5)\qquad R^\alpha_{m,n}(\rho e^{i\theta}) = e^{i(m-n)\theta}\,R^\alpha_{m,n}(\rho).$$

D'après un résultat de T. H. Koornwinder (*cf.* [12]), les polynômes discaux satisfont une formule de linéarisation

$$(2.5)\qquad R^\alpha_{m_1,n_1}(z)\,R^\alpha_{m_2,n_2}(z) = \sum_{m,n} C^\alpha(m_1, n_1, m_2, n_2; m, n)\,R^\alpha_{m,n}(z),$$

où les coefficients C^α sont non négatifs pour tous (m_1, n_1), (m_2, n_2) et (m, n). Ainsi par exemple $R^\alpha_{1,0}(z)=z$, $R^\alpha_{0,1}(z)=\bar z$ et on peut montrer facilement à partir de (2.4) (*cf.* [4]) les relations de récurrence suivantes vérifiées par les polynômes discaux

$$(2.6)\qquad \begin{cases} z\,R^\alpha_{m,n}(z) = \dfrac{\alpha+m+1}{\alpha+m+n+1}\,R^\alpha_{m+1,n}(z) + \dfrac{n}{\alpha+m+n+1}\,R^\alpha_{m,n-1}(z) \\ \qquad\qquad (n\geqq 1) \\ \bar z\,R^\alpha_{m,n}(z) = \dfrac{\alpha+n+1}{\alpha+m+n+1}\,R^\alpha_{m,n+1}(z) + \dfrac{m}{\alpha+m+n+1}\,R^\alpha_{m-1,n}(z) \\ \qquad\qquad (m\geqq 1). \end{cases}$$

On peut alors définir une convolution sur l'ensemble $M(\mathbb{N}^2)$ des mesures positives bornées sur $\mathbb{N}^2$ en posant

$$(2.7)\qquad \delta_{(m_1,n_1)} *_\alpha \delta_{(m_2,n_2)} = \sum_{m,n} C^\alpha(m_1, n_1, m_2, n_2; m, n)\,\delta_{(m,n)}$$

pour deux mesures de Dirac et plus généralement

$$(2.8)\qquad \mu *_\alpha \nu = \sum_{i,j}\sum_{k,l} \mu(i,j)\,\nu(k,l)\,\delta_{(i,j)} *_\alpha \delta_{(k,l)}$$

pour $\mu, \nu \in M(\mathbb{N}^2)$. On a alors

2.9. PROPOSITION. — *Avec la convolution* $*_\alpha$, *l'involution* $(m, n)^- = (n, m)$ *et l'élément neutre* $(0, 0)$, $(\mathbb{N}^2, *_\alpha)$ *est un hypergroupe commutatif de mesure de Haar* $\sum_{m,n} h^\alpha_{m,n}\delta_{(m,n)}$, *de dual* D *et de mesure de Plancherel* λ_α.

La démonstration de ce résultat est analogue à celle que l'on fait dans le cas des hypergroupes associés à des polynômes orthogonaux à une variable (*cf.* [13]). La transformée de Fourier d'une probabilité $\mu \in M_1(\mathbb{N}^2)$ est alors la fonction de deux variables

$$(2.10) \qquad \hat{\mu}(z, \bar{z}) = \hat{\mu}(\rho, \theta) = \sum_{m,n} \mu(m, n) R^\alpha_{m,n}(\rho e^{i\theta}) \qquad (z = \rho e^{i\theta}).$$

Compte tenu de (2.5), pour un vecteur aléatoire (X, Y) de loi μ sur $\mathbb{N}^2$, on a ainsi :

$$(2.11) \qquad \hat{\mu}(\rho, \theta) = E(e^{i\theta(X-Y)} R^\alpha_{(X,Y)}(\rho)),$$

et pour $\mu, \nu \in M_1(\mathbb{N}^2)$, on a naturellement

$$(2.12) \qquad \widehat{\mu *_\alpha \nu}(\rho, \theta) = \hat{\mu}(\rho, \theta) . \hat{\nu}(\rho, \theta).$$

2.13. DÉFINITION. — On appelle marche aléatoire de loi μ sur $(\mathbb{N}^2, *_\alpha)$ toute chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^2$ de noyau markovien

$$(2.14) \qquad P((i, j), A) = (\delta_{(i,j)} *_\alpha \mu)(A) \qquad (A \subset \mathbb{N}^2, (i, j) \in \mathbb{N}^2).$$

Les noyaux itérés de P sont alors donnés par

$$(2.15) \qquad P^{(n)}((i, j), A) = (\delta_{(i,j)} *_\alpha \mu^n)(A),$$

où $\mu^n = \mu *_\alpha \ldots *_\alpha \mu$ (n fois) est la n-ième puissance de convolution de μ.

2.16. *Exemple.* — La marche aléatoire simple a pour loi $\mu_0 = 1/2(\delta_{(0,1)} + \delta_{(1,0)})$. D'après (2.6) sa matrice markovienne est donnée par

$$(2.17) \qquad P((m, n), (i, j)) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha+m+1}{\alpha+m+n+1} & \text{si } (i, j) = (m+1, n) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{m}{\alpha+m+n+1} & \text{si } (i, j) = (m-1, n) \text{ et } m \geqq 1 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha+n+1}{\alpha+m+n+1} & \text{si } (i, j) = (m, n+1) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{n}{\alpha+m+n+1} & \text{si } (i, j) = (m, n-1) \text{ et } n \geqq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit que la probabilité μ sur $\mathbb{N}^2$ est *adaptée* si l'hypergroupe engendré au sens de la convolution $*_\alpha$ par le support de μ est égal à $\mathbb{N}^2$ (*cf.* [9] pour une description précise). Par exemple si $\bigcup_{n \geqq 1} (\operatorname{supp} \mu^n) = \mathbb{N}^2$ (ce qui est le cas pour μ_0) μ est adaptée. On a alors le résultat suivant :

2.18. PROPOSITION. — *Toute marche aléatoire de loi* μ *adaptée sur* $(\mathbb{N}^2, *_\alpha)$ *est transiente.*

La démonstration de (2.18) fera l'objet du paragraphe 3.

Soit maintenant $S_k=(X_k, Y_k)$ la position à l'instant k d'une marche aléatoire de loi μ sur $(\mathbb{N}^2, *_\alpha)$ partant de $(0,0)$ et soit $\pi : (m, n) \to m-n$ la « projection oblique » de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{Z}$. On a alors :

2.19. THÉORÈME 1. — *Le processus* $T_k=X_k-Y_k$ *est une marche aléatoire classique sur* $\mathbb{Z}$ *de loi* $\pi(\mu)$.

Une notion clé pour l'étude du comportement asymptotique des marches aléatoires sur $(\mathbb{N}^2, *_\alpha)$ est celle de variance.

La variance de $\mu\in M_1(\mathbb{N}^2)$ si elle existe, est le nombre défini par

$$V_\alpha(\mu)=\sum_{m, n} \mu(m, n)\left(\frac{2nm}{\alpha+1}+m+n\right)$$

et on a $V_\alpha(\mu *_\alpha \nu)=V_\alpha(\mu)+V_\alpha(\nu)$ lorsque $V_\alpha(\mu)$ et $V_\alpha(\nu)$ existent (*voir* § 4). Grâce au théorème 1, on peut alors démontrer une sorte de loi des grands nombres pour les marches aléatoires à variance finie :

2.20. THÉORÈME 2. — *Supposons* $V_\alpha(\mu)<+\infty$ *et soit* $\lambda=E(X_1-Y_1)$. *On a alors*

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{X_k}{k}, \frac{Y_k}{k}\right)\overset{\text{p. s.}}{=}\begin{cases}(\lambda, 0) & si\quad \lambda\geqq 0\\ (0, -\lambda) & si\quad \lambda<0\end{cases}.$$

Les preuves des théorèmes 1 et 2 font l'objet du paragraphe 5. Le résultat principal de cet article est le théorème limite central suivant :

2.21. THÉORÈME 3. — *Soit* $\mu\in M_1(\mathbb{N}^2)$ *adaptée. On suppose que les nombres* $a=E((X_1-Y_1)^2)$ *et* $b=V_\alpha(\mu)$ *sont finis et que* $E(X_1-Y_1)=0$. *Alors la suite des vecteurs aléatoires* $(k^{-1/2}X_k, k^{-1/2}Y_k)$ *converge en loi quand* $k\to+\infty$ *vers un vecteur aléatoire dont la loi de probabilité concentrée sur* $\mathbb{R}_+^2$ *a pour densité*

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\sqrt{2\pi a}\, b^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}(xy)^\alpha(x+y)\,e^{-(2/b)\,xy}\,e^{-(1/2a)\,(x-y)^2}$$
$$(x\geqq 0,\ y\geqq 0).$$

La démonstration du théorème 3 est dans le paragraphe 6. Dans le cas de la marche aléatoire simple, $a=b=1$ et la densité limite de la suite $(k^{-1/2}X_k, k^{-1/2}Y_k)$ prend la forme suivante

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\alpha+1)}(xy)^\alpha(x+y)\,e^{-(1/2)\,(x+y)^2}\qquad (x\geqq 0,\ y\geqq 0).$$

On peut alors en déduire la loi limite de $k^{-1/2} X_k$:

2.22. COROLLAIRE. — *La suite de variables aléatoires* $k^{-1/2} X_k$ *a une densité limite quand* $k \to +\infty$ *concentrée sur* $\mathbb{R}_+$ *et de la forme*

$$\pi^{-1/2} 2^{\alpha+(1/2)} x^\alpha e^{-x^2/4} D_{-\alpha}(x) \qquad (x \geqq 0)$$

où

$$D_\nu(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{-t^2/2} t^{-\nu-1}\, dt \qquad (\nu < 0)$$

est la fonction cylindrique parabolique (cf. [15], p. 328).

3. TRANSIENCE DES MARCHES ALÉATOIRES SUR $(\mathbb{N}^2, *_\alpha)$

Démonstration de 2.18

Pour la marche simple de loi μ_0 il suffit d'après [9] (corollaire 2.6, p. 67) de prouver que l'intégrale $I = \int\int_D (1 - \hat{\mu}_0(z, \bar{z}))^{-1} \lambda_\alpha(dx\, dy)$ est finie. Mais on a

$$\hat{\mu}_0(z, \bar{z}) = 1/2\, R^\alpha_{0,1}(z, \bar{z}) + 1/2\, R^\alpha_{1,0}(z, \bar{z}) = 1/2(z + \bar{z}) = \operatorname{Re} z = x$$

et un calcul facile montre que $I < +\infty$ car $\alpha > 0$. Soit alors $\nu \in M_1(\mathbb{N}^2)$ adaptée symétrique [*i. e.* $\nu(m, n) = \nu(n, m)$, $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$] et à support compact. Il existe un entier k_0 tel que $A = \{(1,0), (0,1)\} \subset \operatorname{supp} \nu^{k_0}$. Si $\varphi = 1_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A, on a alors

$$\frac{1}{C} \varphi\, \nu^{k_0} = \mu_0,$$

où $C = \nu^{k_0}(A) > 0$. D'après [9] (proposition 3.15) la marche aléatoire de loi ν^{k_0} est transiente. Il en résulte facilement que la marche de loi ν est aussi transiente. Le résultat découle alors de [9] (corollaire 3.16).

4. NOTION DE VARIANCE

4.1. DÉFINITION. — Pour une probabilité μ sur $\mathbb{N}^2$, on définit le nombre

$$V_\alpha(\mu) = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\mu}(\rho, \theta)\Big|_{\substack{\rho=1 \\ \theta=0}} = \sum_{m, n} \mu(m, n) \frac{d}{d\rho} R^\alpha_{m, n}(\rho)\Big|_{\rho=1}$$

qu'on appelle variance de μ lorsqu'il existe.

Par définition on a

$$V_\alpha(\delta_{(m,n)}) = \frac{d}{d\rho} R^\alpha_{m,n}(\rho)\big|_{\rho=1}.$$

4.2. Proposition :

$$V_\alpha(\delta_{(m,n)}) = \frac{2}{\alpha+1} mn + m + n \qquad [\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2].$$

Démonstration. — Pour les polynômes de Jacobi, on a la formule (*cf.* [16])

$$\frac{d}{dx} R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)} R_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

En utilisant la formule (2.4) qu'on dérive pour $\rho = 1$, on obtient alors :

$$V_\alpha(\delta_{(m,n)}) = (m-n) + 2(m \wedge n)\left(\frac{m \wedge n + \alpha + (m-n) + 1}{\alpha+1}\right) = \frac{2nm}{\alpha+1} + m + n.$$

4.3. Proposition. — $V_\alpha(\mu *_\alpha \nu) = V_\alpha(\mu) + V_\alpha(\nu)$.

Démonstration. — D'après 2.10, on a

$$\begin{aligned} V_\alpha(\mu *_\alpha \nu) &= \frac{\partial}{\partial\rho} \widehat{\mu *_\alpha \nu}(\rho, \theta)\Big|_{\substack{\rho=1\\ \theta=0}} \\ &= \frac{\partial}{\partial\rho} \hat{\mu}.\hat{\nu}(\rho, \theta)\Big|_{\substack{\rho=1\\ \theta=0}} = \frac{\partial\hat{\mu}}{\partial\rho}\hat{\nu} + \hat{\mu}.\frac{\partial\hat{\nu}}{\partial\rho}\Big|_{\substack{\rho=1\\ \theta=0}} = \frac{\partial\hat{\mu}}{\partial\rho}\Big|_{\substack{\rho=1\\ \theta=0}} + \frac{\partial\hat{\nu}}{\partial\rho}\Big|_{\substack{\rho=1\\ \theta=0}} \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

4.4. *Remarque.* — V_α est la seule fonction sur $M_1(\mathbb{N}^2)$ telle que $V_\alpha(\mu) = \sum \mu(m, n) V_\alpha(\delta_{(m,n)})$ et $V_\alpha(\mu *_\alpha \nu) = V_\alpha(\mu) + V_\alpha(\nu)$ si on impose $V_\alpha(\delta_{(0,1)}) = V_\alpha(\delta_{(1,0)}) = 1$.

4.5. Notation. — Dans la suite on notera $V_\alpha(\delta_{(m,n)}) = V_\alpha(m, n)$. On pourra alors considérer $V_\alpha(\mu)$ comme l'intégrale $\langle \mu, V_\alpha \rangle$ de la fonction V_α contre la mesure μ.

5. PROJECTION OBLIQUE ET LOI DES GRANDS NOMBRES

5.1. Proposition. — *La projection oblique* $\pi : (m, n) \to m - n$ *de* $\mathbb{N}^2$ *sur* $\mathbb{Z}$ *est un morphisme entre les structures d'hypergroupe* $(\mathbb{N}^2, *_\alpha)$ *et* $(\mathbb{Z}, +)$. *Autrement dit pour tous* $\mu, \nu \in M(\mathbb{N}^2)$ *et* $*$ *désignant la convolution ordinaire sur* $M(\mathbb{Z})$, *on a* $\pi(\mu *_\alpha \nu) = \pi(\mu) * \pi(\nu)$.

Démonstration. — D'après [12], les coefficients $C^\alpha(m_1, n_1, m_2, n_2, m, n)$ sont nuls si (m, n) est extérieur à la droite d'équation $m_1+m_2+y=n_1+n_2+x$. Il en résulte que la mesure de probabilité $\delta_{(m_1, n_1)} *_\alpha \delta_{(m_2, n_2)}$ a son support inclus dans cette droite. Par définition de π, on a donc

$$\pi(\delta_{(m_1, n_1)} *_\alpha \delta_{(m_2, n_2)}) = \delta_{m_1-n_1+m_2-n_2} = \delta_{m_1-n_1} * \delta_{m_2-n_2},$$

d'où le résultat de la proposition pour deux masses de Dirac. Le cas général s'obtient immédiatement par linéarité de π.

5.2. *Démonstration du théorème* 1. — Pour la marche aléatoire partant de (m_1, n_1), la loi de $S_k=(X_k, Y_k)$ est $\delta_{(m_1, n_1)} *_\alpha \mu^k$. D'après la proposition 5.1, la loi de la variable aléatoire $T_k=\pi(S_k)=X_k-Y_k$ est $\delta_{(m_1, n_1)} * \pi(\mu)^k$. Il reste à voir que le processus T_k est de Markov homogène. Mais pour tout $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} P(T_k=a_k/T_{k-1}=a_{k-1}, \ldots, T_1=a_1) &= P(S_k\in\pi^{-1}(a_k)/S_{k-1}\in\pi^{-1}(a_{k-1}), \ldots, S_1\in\pi^{-1}(a_1)) \\ &= P(S_k\in\pi^{-1}(a_k)/S_{k-1}\in\pi^{-1}(a_{k-1})) \\ &= \frac{\displaystyle\sum_{(m, n)\in\pi^{-1}(a_{k-1})} (\delta_{(m, n)} *_\alpha \mu)(\pi^{-1}(a_k))\, P(S_{k-1}=(m, n))}{P(S_{k-1}\in\pi^{-1}(a_{k-1}))} \\ &= (\delta_{a_{k-1}} * \pi(\mu))(a_k) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Pour la démonstration du théorème 2, on aura besoin de deux lemmes :

5.3. LEMME. — *Le processus* $V_\alpha(S_k)=2(\alpha+1)^{-1}X_k Y_k+X_k+Y_k$ *est une sous-martingale positive.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}_k$ la filtration naturelle du processus de Markov $S_k=(X_k, Y_k)$. Avec les notations de 4.5, on a :

$$\begin{aligned} E^{\mathscr{F}_k}(V_\alpha(S_{k+1})) &= \langle \delta_{S_k} *_\alpha \mu, V_\alpha \rangle \quad \text{p. s.} \\ &= \sum_{(i, j)\in\mathbb{N}^2} \mu(i, j) \langle \delta_{S_k} *_\alpha \delta_{(i, j)}, V_\alpha \rangle \\ &= \sum_{(i, j)\in\mathbb{N}^2} \mu(i, j)(V_\alpha(S_k)+V_\alpha(i, j)) \\ &= V_\alpha(S_k)+V_\alpha(\mu) \geqq V_\alpha(S_k) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

5.4. LEMME. — *La suite des variables aléatoires* $k^{-2}X_k Y_k$ *converge vers zéro presque sûrement.*

Démonstration. — Soit $\eta>0$ et pour tout entier $r>0$, considérons l'événement

$$A_r=\{X_k Y_k \geqq k^2 \eta \text{ pour au moins un } k\in]2^r, 2^{r+1}]\}.$$

On a

$$\begin{aligned}P(A_r) &\leqq P(X_k Y_k \geqq \eta\, 2^{2r} \text{ pour au moins un } k\in]2^r, 2^{r+1}])\\ &\leqq P(V_\alpha(S_k) \geqq 2(\alpha+1)^{-1}\eta\, 2^{2r} \text{ pour au moins un } k\in]2^r, 2^{r+1}])\\ &\leqq P(\max_{0<k\leqq 2^{r+1}} V_\alpha(S_k)\geqq 2(\alpha+1)^{-1}\eta\, 2^{2r})\\ &\leqq 2^{-1}\eta^{-1}2^{-2r}(\alpha+1)\,E(V_\alpha(S_{2^{r+1}})),\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Kolmogorov-Doob. Mais d'après la propriété 4.3 on a $E(V_\alpha(S_{2^{r+1}}))=2^{r+1}V_\alpha(\mu)$ et la majoration précédente prouve que la série $\sum_r P(A_r)$ est convergente. On peut alors conclure à l'aide du lemme de Borel-Cantelli puisque η est arbitraire.

5.5. *Démonstration du théorème* 2. — D'après le théorème 1, la loi forte des grands nombres appliquée à la marche aléatoire T_k nous assure que $\lim_{k\to+\infty}\frac{X_k-Y_k}{k}=\lambda$ p. s. L'égalité

$$\frac{X_k Y_k}{k^2}=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{X_k+Y_k}{k}\right)^2-\left(\frac{X_k-Y_k}{k}\right)^2\right]$$

jointe au lemme 5.4, prouve alors que $\lim_{k\to+\infty}\frac{X_k+Y_k}{k}=|\lambda|$ p. s. Le théorème 2 en découle immédiatement.

5.6. *Remarque.* — Nous considérons ce théorème 2 comme essentiellement illustratif du comportement des marches aléatoires sur $(\mathbb{N}^2, *_\alpha)$. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas cherché les hypothèses de moment minimales sous lesquelles il continue d'être vrai.

6. LE THÉORÈME LIMITE CENTRAL

On a besoin ici d'une propriété analytique importante des polynômes discaux que nous avons étudié dans [4] (théorème 1) :

6.1. Théorème. — *Soit* $\alpha>0$ *et* $C>0$ *une constante arbitraire. Il existe alors des nombres* $N_C>0$, $C_1>0$ *et* $C_2>0$ *tels que*

$$(6.1.1)\quad \left(\frac{\sin\psi}{\psi}\right)^{\alpha+(1/2)}(\cos\psi)^{1/2}R^\alpha_{m,n}(\cos\psi)=\Lambda_\alpha(\beta_{mn}\psi)+r(m, n;\psi),$$

avec

(6.1.2) $$\Lambda_\alpha(t)=\Gamma(\alpha+1)(t/2)^{-\alpha}J_\alpha(t)$$

la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'indice α,

(6.1.3) $$\beta_{mn}=[(2m+\alpha+1)(2n+\alpha+1)]^{1/2},$$

et

(6.1.4) $$|r(m, n; \psi)| \leqq C_1\psi^2+C_2(m-n)\psi^4,$$

pour tout $(m, n)\in\mathbb{N}^2$ *satisfaisant* $mn\geqq N_C$ *et pour tout réel* $\psi\in]0, C/(2\sqrt{mn})]$.

Avec les notations de (2.19) on a le résultat préliminaire :

6.2. Proposition. — *Pour tout* $\theta\in\mathbb{R}$ *et tout* $\psi\in\mathbb{R}_+$, *on a*

(6.2.1) $$\lim_{k\to+\infty} E\left(\exp\left(i\theta\frac{X_k-Y_k}{\sqrt{k}}\right)R^\alpha_{X_k, Y_k}\left(\cos\frac{\psi}{\sqrt{k}}\right)\right)=e^{-a\theta^2/2}e^{-b\psi^2/2}.$$

Démonstration. — D'après (2.11) et (2.12) où on a posé $\rho=\cos\psi$, on a

$$\left(\hat{\mu}\left(\cos\frac{\psi}{\sqrt{k}}, \frac{\theta}{\sqrt{k}}\right)\right)^k=E\left(\exp\left(i\theta\frac{X_k-Y_k}{\sqrt{k}}\right)R^\alpha_{X_k, Y_k}\left(\cos\frac{\psi}{\sqrt{k}}\right)\right),$$

pour tout k entier et tous $\theta\in\mathbb{R}$ et $\psi\in\mathbb{R}_+$. Mais un calcul facile donne le développement limité suivant de $\hat{\mu}(\cos\psi, \theta)$ au voisinage de $\psi=0$, $\theta=0$:

$$\hat{\mu}(\cos\psi, \theta)=1+iC-a\frac{\theta^2}{2}-b\frac{\psi^2}{2}+\gamma_1\psi^2\theta+\gamma_2\psi^2\theta^2+O(\psi^3\theta^3),$$

où

$$C=\sum_{m, n}(m-n)\mu(m, n)=E(X_1-Y_1)=0,$$

$$a=\sum_{m, n}(m-n)^2\mu(m, n),$$

$$b=\sum_{m, n}\left(\frac{2}{\alpha+1}mn+m+n\right)\mu(m, n)=V_\alpha(\mu)$$

et γ_1, γ_2 sont deux constantes réelles dont l'expression explicite importe peu. Le résultat de la proposition en découle immédiatement.

6.3. Corollaire. — *Pour tout* $\theta\in\mathbb{R}$ *et tout* $\psi\in\mathbb{R}_+$, *on a*

(6.3.1) $$\lim_{k\to+\infty} E\left(\exp\left(i\theta\frac{X_k-Y_k}{\sqrt{k}}\right)\Lambda_\alpha\left(\beta_{X_kY_k}\frac{\psi}{\sqrt{k}}\right)\right)=e^{-a\theta^2/2}e^{-b\psi^2/2}$$

Démonstration. — Posons

$$(6.3.2)\quad \Delta_k=\exp\left(i\theta\frac{X_k-Y_k}{\sqrt{k}}\right)\left(R^{\alpha}_{X_k,\,Y_k}\left(\cos\frac{\psi}{\sqrt{k}}\right)-\Lambda_\alpha\left(\beta_{X_kY_k}\frac{\psi}{\sqrt{k}}\right)\right).$$

On va montrer que $\lim_{k\to+\infty} E\Delta_k=0$. Avec les notations du théorème 6.1, on a

$$(6.3.3)\quad |E\Delta_k|\leqq\left|1-\left(\frac{\sin k^{-1/2}\psi}{k^{-1/2}\psi}\right)^{\alpha+(1/2)}(\cos k^{-1/2}\psi)^{1/2}\right| + E\left|r\left(X_k,\,Y_k;\,\frac{\psi}{\sqrt{k}}\right)\right|$$

ψ étant fixé, le premier terme du membre de droite tend vers zéro quand $k\to+\infty$. On peut alors décomposer le deuxième terme comme suit

$$(6.3.4)\qquad E\left|r\left(X_k,\,Y_k;\,\frac{\psi}{\sqrt{k}}\right)\right|=D^1_k+D^2_k+D^3_k+D^4_k,$$

où

$$(6.3.5)\qquad D^i_k=E\left(\left|r\left(X_k,\,Y_k;\,\frac{\psi}{\sqrt{k}}\right)\right|\mathbf{1}_{A_i}\right)\qquad (i=1,\,\ldots,\,4),$$

avec

$$\begin{aligned}
A_1&=\left[X_kY_k\geqq N_C \text{ et } X_kY_k\leqq\frac{C^2}{4\psi^2}k\right],\\
A_2&=\left[X_kY_k>\frac{C^2}{4\psi^2}k\right]\\
A_3&=[0<X_kY_k<N_C]\\
A_4&=[X_kY_k=0].
\end{aligned}$$

où $C>0$ est une constante qu'on choisira par la suite et N_C est l'entier qui lui est associé suivant le théorème 6.1.

6.3.6. LEMME 1. — *Soit* $\varepsilon>0$. *Il existe une constante* $C>0$ *telle que uniformément pour* $k\geqq1$, *on ait* $D^2_k\leqq\varepsilon$.

Démonstration. — Avec les notations de 4.5 et 5.3, pour tout $r>0$ fixé, on a

$$\begin{aligned}
P(X_kY_k>rk)&\leqq P(V_\alpha(S_k)>2(\alpha+1)^{-1}rk)\\
&\leqq 2^{-1}(\alpha+1)k^{-1}r^{-1}E(V_\alpha(S_k))\\
&\leqq 2^{-1}(\alpha+1)r^{-1}V_\alpha(\mu),
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Markov pour l'avant-dernière majoration et d'après la propriété 4.3 pour la dernière. Ce dernier terme peut ainsi être rendu plus petit que $\varepsilon>0$ pour $r=\frac{C}{4\psi^2}$ assez grand.

6.3.7. LEMME 2 : $\lim_{k\to+\infty} D_k^1=0$.

Démonstration. — C_1 et C_2 étant les constantes associées à C, on a d'après le théorème 6.1 :

$$D_k^1 \leqq C_1\frac{\psi^2}{k}+C_2\,E((X_k-Y_k)^2)\frac{\psi^4}{k^2},$$

quantité qui tend vers zéro quand $k\to+\infty$ car

$$E((X_k-Y_k)^2)=k\,E(X_1-Y_1)^2.$$

6.3.8. LEMME 3 : $\lim_{k\to+\infty} D_k^3=0$.

Démonstration. — Les fonctions $R_{m,n}^\alpha$ et Λ_α étant bornées par 1, la fonction r est majorée par 2. On peut donc majorer D_k^3 par $2P((X_k, Y_k)\in F)$ où $F=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2;\ 0<ij<N_C\}$ est un ensemble fini. La marche étant transiente, cette quantité tend vers zéro quand $k\to+\infty$.

6.3.9. LEMME 4 : $\lim_{k\to+\infty} D_k^4=0$.

Démonstration. — Pour tout $s>0$ fixé, on peut écrire

$$D_k^4=D_k^5+D_k^6+D_k^7+D_k^8,$$

où $D_k^i\,(i=5,\ldots,8)$ est de la forme (6.3.5) avec

$$\begin{aligned}A_5&=[Y_k=0,\ X_k\leqq s\sqrt{k}]\\ A_6&=[Y_k=0,\ X_k> s\sqrt{k}]\\ A_7&=[X_k=0,\ Y_k\leqq s\sqrt{k}]\\ A_8&=[X_k=0,\ Y_k> s\sqrt{k}]\end{aligned}$$

Mais $R_{X_k,0}^\alpha\left(\cos\frac{\psi}{\sqrt{k}}\right)=\left(\cos\frac{\psi}{\sqrt{k}}\right)^{X_k}\to 1$ quand $k\to+\infty$ si $X_k\leqq s\sqrt{k}$ et de même $\Lambda_\alpha\left(\beta_{X_k,0}\frac{\psi}{\sqrt{k}}\right)\to 1$ quand $k\to+\infty$ si $X_k\leqq s\sqrt{k}$. Il en résulte que $\lim_{k\to+\infty} D_k^5=0$. Pour la même raison $\lim_{k\to+\infty} D_k^7=0$. Finalement soit $\varepsilon>0$. On peut choisir $s>0$ tel que $D_k^6\leqq\varepsilon$ et $D_k^8\leqq\varepsilon$ pour k assez grand.

En effet

$$D_k^6 \leqq 2\,P(Y_k=0,\ X_k>s\sqrt{k})$$
$$\leqq 2\,P\left(\frac{X_k-Y_k}{\sqrt{k}}>s\right).$$

Mais $\frac{X_k-Y_k}{\sqrt{k}}$ est asymptotiquement une variable aléatoire normale centrée d'après le théorème limite central classique appliqué à la marche aléatoire centrée $T_k=X_k-Y_k$. D'où le résultat annoncé pour D_k^6. Le même raisonnement s'applique à D_k^8. D'où le lemme.

Compte tenu des lemmes 1 à 4 le corollaire 6.3 est prouvé.

6.4. *Fin de la démonstration du théorème* 3. – Pour $\mu \in M^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ considérons sa transformée de Fourier-Hankel.

$$\mathscr{F}\mathscr{H}\,\mu(\theta;\ \psi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{i\theta x}\,\Lambda_\alpha(\psi y)\,\mu(dx\ dy).$$

On peut vérifier à l'aide des tables ([15], p. 93) que si

$$\mu_1(dx\ dy)=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}\,2^\alpha b^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}\,y^{2\alpha+1}\,e^{-x^2/2a}\,e^{-y^2/2b}\,dx\ dy,$$

on a $\mathscr{F}\mathscr{H}\mu_1(\theta,\ \psi)=e^{-a\theta^2/2}\,e^{-b\psi^2/2}$.

Mais le théorème de continuité de Paul Lévy est valable pour la transformation $\mathscr{F}\mathscr{H}$ (*cf.* [3]). En effet les fonctions (définies sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$)

$$(x,\ y)\to e^{i\theta x}\,\Lambda_\alpha(\psi y) \qquad [(\theta,\ \psi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+],$$

sont les caractères de l'hypergroupe commutatif produit $(\mathbb{R},\ +)\times(\mathbb{R}_+,\ *_\alpha)$ où $\mathbb{R}$ est muni de sa structure additive habituelle et $(\mathbb{R}_+,\ *_\alpha)$ est l'hypergroupe de Kingman d'indice $\alpha>0$ (*cf.* [7]). La transformation $\mathscr{F}\mathscr{H}$ est donc la transformation de Fourier de cet hypergroupe sur lequel le théorème de continuité est valable (*cf.* [8]). Il en résulte que la limite obtenue en (6.3.1) s'exprime comme suit : la suite des vecteurs aléatoires

$$(k^{-1/2}(X_k-Y_k),\ k^{-1/2}(2\,X_k+\alpha+1)^{1/2}(2\,Y_k+\alpha+1)^{1/2})$$

converge en loi vers μ_1 quand $k\to+\infty$. La suite des vecteurs

$$(k^{-1/2}X_k-k^{-1/2}Y_k,\ 2\sqrt{k^{-1/2}X_k\,k^{-1/2}Y_k})$$

converge donc aussi en loi vers μ_1. Par la transformation $(x,\ y)\to(x-y,\ 2\sqrt{xy})$ de $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, un calcul facile montre alors que la suite $(k^{-1/2}X_k,\ k^{-1/2}Y_k)$ converge en loi quand $k\to+\infty$ vers la densité de probabilité

$$(6.4.1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2^{\alpha+1}}{\sqrt{2\pi a}\, b^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)}(xy)^{\alpha}(x+y)\,e^{-(2/b)\,xy}\,e^{-(1/2a)\,(x-y)^2} \\ &\qquad\qquad\qquad (x \geqq 0,\ y \geqq 0). \end{aligned} \right.$$

Dans le cas $a=b=1$, on avait obtenu ce théorème limite central par une méthode directe dans [4].

Le corollaire 2.22 s'obtient alors facilement en prenant la densité marginale en x de (6.4.1).

6.5. *Remarque.* – L'hypothèse $E(X_1-Y_1)=0$ [*i.e.* $\pi(\mu)$ centrée] nous a été nécessaire à deux reprises dans la preuve précédente : dans le lemme 2 pour utiliser l'approximation asymptotique 6.1 et dans le lemme 4. Il est possible que par une toute autre méthode et en utilisant un procédé de centrage adéquat, on puisse se passer de cette hypothèse . Nous laissons cette question ouverte.

RÉFÉRENCES

[1] H. Annabi et K. Trimeche, Une convolution généralisée sur le disque unité, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **278**, série A, 1974, p. 21-24.

[2] J. N. Boyd, Orthogonal Polynomials on the Disc, *Thèse*, University of Virginia, 1972.

[3] M. Bouhaik, Marches aléatoires sur $\mathbb{N}^2$ associées à une structure d'hypergroupe polynomial, *Thèse*, Université de Bretagne Occidentale, 1990.

[4] M. Bouhaik et L. Gallardo, A Mehler-Heine Formula for Disk Polynomials, *Indag. Mathem.*, N.S., (1), 1991, p. 9-18.

[5] M. Bouhaik et L. Gallardo, Une loi des grands nombres et un théorème limite central pour les chaînes de Markov sur $\mathbb{N}^2$ associées aux polynômes discaux, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **310**, série I, 1990, p. 739-744.

[6] L. Gallardo, Comportement asymptotique des marches aléatoires associées aux polynômes de Gegenbauer et applications, *Adv. Appl. Proba.*, vol. **16**, 1984, p. 293-323.

[7] L. Gallardo, Sur quelques transformations intégrales multidimensionnelles et leur lien avec la théorie des hypergroupes, *Probability Measures on Groups*, X. Oberwolfach éd., 1990. Plenum, New York (à paraître).

[8] L. Gallardo et O. Gebuhrer, Lois de probabilité infiniment divisibles sur les hypergroupes commutatifs, discrets, dénombrables, *Probability Measures on Groups* VII; *Lect. Notes Math.*, n° **1064**, 1984, p. 116-131.

[9] L. Gallardo et O. Gebuhrer, Marches aléatoires et hypergroupes, *Exp. Math.*, vol. **5**, 1987, p. 41-73.

[10] Y. Guivarc'h, M. Kean et B. Roynette, Marches aléatoires sur les groupes de Lie, *Lect. Notes Math.*, n° **624**, 1977, Springer-Verlag.

[11] T. H. Koornwinder, The Addition Formula for Jacobi Polynomials II, the Laplace Type Integral and the Product Formula, *Math. Centrum Amsterdam*, TW 132, 1972.

[12] T. H. Koornwinder, Positivity Proofs for Linearization and Connection Coefficients of Orthogonal Polynomials Satisfying and Addition Formula, *J. London Math. Soc.*, vol. **28**, 1978, p. 101-114.

[13] R. LASSER, Orthogonal Polynomials and Hypergroups, *Rendiconti di Matematica*, (2), vol. **3**, série VII, 1983, p. 185-209.
[14] R. L. SAPIRO, Special Functions Related to Representations of the Group SU (n), of Class I with Respect to SU ($n-1$) ($n \geqq 3$), *Am. Math. Soc. Transl.*, vol. **113**, 1979, p. 201-211.
[15] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER et R. P. SONI, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, 1966, Springer-Verlag 3e éd.
[16] G. SZEGO, Orthogonal Polynomials, *Amer. Math. Soc. Colloquium Publications*, Vol. **23**, 4th edition, 1975.
[17] M. VOIT, Central Limit Theorem for a Class of Polynomial Hypergroups, *Adv. Appl. Proba.*, 1990.
[18] H. M. ZEUNER, The Central Limit Theorem for Chébli-Trimèche Hypergroups, *J. Theor. Prob.*, vol. **2**, n° 1, 1989, p. 51-63.

(*Manuscrit reçu le* 10 *décembre* 1990;
corrigé le 4 *juillet* 1991.)