

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

SYLVIE ROELLY

HANS ZESSIN

Une caractérisation des mesures de Gibbs sur $C(0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$ par le calcul des variations stochastiques

Annales de l'I. H. P., section B, tome 29, n° 3 (1993), p. 327-338

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1993__29_3_327_0

© Gauthier-Villars, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Une caractérisation des mesures de Gibbs sur $C(0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$ par le calcul des variations stochastiques

par

Sylvie ROELLY (*)

Laboratoire de Probabilités, U.R.A. - C.N.R.S. n° 0224,
Université Paris-VI, Tour n° 56,
75252 Paris Cedex 05

et

Hans ZESSIN

Fakultät für Mathematik,
Univ. Bielefeld, D-33615 Bielefeld,
Allemagne

RÉSUMÉ. — Les mesures de Gibbs sur $C(0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$ associées à un potentiel donné sont caractérisées comme les seules probabilités pour lesquelles une équation d'équilibre de type (2.6) est satisfaite, équation dans laquelle apparaissent l'opérateur d'intégration stochastique, l'opérateur de dérivation sur l'espace des trajectoires et une densité gibbsienne qui reflète l'interaction entre les particules. Quand celle-ci disparaît (système libre), notre résultat fournit donc une caractérisation du produit infini de mesures de Wiener comme l'unique mesure sur $C(0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$ sous laquelle l'intégrale de Itô infini-dimensionnelle et l'opérateur de dérivation sont en dualité.

ABSTRACT. — Gibbs measures on $C(0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$ associated to a given potential are characterized as the unique probability measures for which an equilibrium equation like (2.6) holds, where appear a stochastic integral as operator, a derivative operator on path space and a Gibbsian density

Classification A.M.S. : 60 G 60; 60 H 20; 60 K 35.

(*) Adresse actuelle : BiBoS, Fakultät für Physik, Univ. Bielefeld, D-33615 Bielefeld, Allemagne.

which takes into account the interaction between the particles. When the interaction disappears (free system) our result then gives a characterization of the infinite product of Wiener measures as the unique probability measure on $C(0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$ under which the infinite dimensional Itô integral and the derivative operator are in duality.

INTRODUCTION

Nous cherchons dans ce travail à caractériser les états d'équilibre d'un système à infinité de particules en interaction, chacune de celles-ci évoluant selon une dynamique de diffusion. Nous montrons que de tels états d'équilibre, mesures de Gibbs sur un produit infini d'espace de trajectoires, sont les seules solutions d'une équation fonctionnelle simple dans laquelle apparaît le potentiel hamiltonien induisant l'interaction interne au système.

Les techniques que nous utilisons sont celles du calcul stochastique, et en particulier celles du calcul des variations stochastiques au sens de Malliavin [Ma].

Dans [RZ1] nous définissons, dans l'esprit de la mécanique statistique, la notion d'état d'équilibre pour une particule diffusant sur le tore comme la ou les dynamiques maximisant l'énergie libre liée à un potentiel donné, et nous exhibons les diffusions browniennes avec dérive comme de tels états. On peut les caractériser (autrement que comme solutions du problème variationnel lié à l'énergie) comme uniques solutions d'une classe d'équations fonctionnelles [cf. (1.3)], connues dans la théorie du calcul de Malliavin sous le nom de formules d'intégration par partie. Cela fait l'objet de la note [RZ2], dont nous citons au premier paragraphe les principaux résultats dans une version améliorée (*i. e.* les hypothèses y sont très affaiblies). Ils seront fondamentaux pour l'extension infini-dimensionnelle que nous présentons après.

L'objet de notre étude est ici une infinité dénombrable ($\cong \mathbb{Z}^d$) de particules diffusant chacune dans \mathbb{R} et interagissant sous l'action d'un potentiel hamiltonien défini par une suite de fonctions d'interaction très générale. Au paragraphe 2, nous montrons d'abord que les mesures de Gibbs liées à ce potentiel satisfont à l'équation fonctionnelle (2.6) généralisant (1.3), dans laquelle apparaît la dérivée dans l'espace de Wiener du potentiel associé à chaque particule. Le résultat principal, énoncé au théorème 2.9, montre que l'ensemble des mesures de Gibbs est exactement égal à l'ensemble des solutions de l'équation (2.6).

Dans un travail très récent [CRZ], nous appliquons cette nouvelle caractérisation des mesures de Gibbs associées à un système infini de diffusions à l'étude de ses mesures invariantes.

0. NOTATIONS ET CADRE DU PROBLÈME

X est l'espace polonais $C([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de sa filtration canonique. Ω est l'espace produit $X^{\mathbb{Z}^d}$ muni de sa filtration canonique (\mathcal{F}_Λ) , où Λ décrit l'ensemble des parties finies de \mathbb{Z}^d , et \mathcal{F}_Λ est engendrée par les projections canoniques

$$\begin{aligned} \text{pr}_i : \Omega &\rightarrow X \\ \omega &\rightarrow \omega_i, \quad i \in \Lambda. \end{aligned}$$

Les parties Λ de \mathbb{Z}^d évoquées dans cet article seront toujours des parties finies, de telle sorte que nous ne le préciserons plus.

Plus généralement, nous noterons pr_Λ la projection canonique suivante

$$\begin{aligned} \text{pr}_\Lambda : \Omega &\rightarrow X^\Lambda \\ \omega &\rightarrow \omega_\Lambda = (\omega_i)_{i \in \Lambda}. \end{aligned}$$

Pour $\xi \in X^\Lambda$ et $\eta \in X^{\Lambda^c}$, nous noterons simplement $\xi\eta$ la configuration de Ω qui coïncide avec ξ sur Λ et avec η sur Λ^c . Par exemple $\omega = \omega_\Lambda \omega_{\Lambda^c}$.

On note $\mathcal{P}(X)$, respectivement $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des mesures de probabilité sur X, resp. sur Ω , satisfaisant à l'hypothèse suivante : *la projection au temps 0 est une mesure de Dirac sur \mathbb{R} , resp. sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$.*

Sur X, la probabilité de référence $\pi \in \mathcal{P}(X)$ est choisie selon les besoins parmi les $(\pi_{z_0}, z_0 \in \mathbb{R})$, où π_{z_0} est la mesure de Wiener partant de z_0 .

Sur Ω , la mesure de référence $P \in \mathcal{P}(\Omega)$ est choisie parmi les $(P_{z, z \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}})$ où P_z est le produit infini suivant de mesures de Wiener : $P_z = \otimes_{i \in \mathbb{Z}^d} \pi_{z_i}$.

(Préciser les conditions initiales impose des notations fastidieuses, mais cela s'avère nécessaire quand l'on généralise le travail présenté ici à des probabilités sur X ou sur Ω de conditions initiales quelconques, cf. [CRZ].)

Si $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$, on note Q_Λ la probabilité sur X^Λ image de Q par pr_Λ .

$W^{1,2}(X)$ est l'ensemble des fonctionnelles F de $L^2(X)$ qui sont L^2 -différentiables au sens suivant (cf. [Fö]) : il existe $(D_t F(x))_{0 \leq t \leq 1, x \in X}$ dans $L^2((0, 1) \times X)$ tel que pour tout $g \in L^2(0, 1)$ on ait l'égalité suivante dans $L^2(X)$

$$\begin{aligned} D_g F(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \left(F(x + \varepsilon \int_0^\cdot g(t) dt) - F(x) \right) \\ &= \int_0^1 g(t) D_t F(x) dt. \end{aligned}$$

$W^{1, \infty}(X)$ est le sous-ensemble de $W^{1, 2}(X)$ formé des fonctionnelles bornées F pour lesquelles $(D_t F(x))_{x, t} \in L^\infty(X; L^2(0, 1))$. Il est engendré par $\mathcal{W}(X)$, l'ensemble des fonctionnelles régulières de la forme $F(x) = \phi(x(t_1), \dots, x(t_n))$ où ϕ est de classe \mathcal{C}^∞ et $0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1$. Pour ces fonctionnelles, la L^2 -différentiabilité n'est autre que la Fréchet-différentiabilité.

Nous appelons fonctionnelles locales sur Ω les fonctionnelles ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées : $\exists \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ tel que, pour tout $\omega \in \Omega$, $F(\omega) = F(\omega_\Lambda)$ (dans ce cas, F est dite Λ -locale).

$W_{loc}^{1, 2}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctionnelles locales F de $L^2(\Omega)$ pour lesquelles il existe une suite $(D_t^i F(\omega))_{i \in \mathbb{Z}^d, 0 \leq t \leq 1, \omega \in \Omega}$ de $l^2(L^2((0, 1) \times \Omega))$ nulle sauf en un nombre fini de coordonnées, satisfaisant, pour tout $g = (g_1, g_2, \dots)$ de $l^2(L^2(0, 1))$, l'égalité suivante dans $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} D_g F(\omega) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \left(F(\omega + \varepsilon \int_0^\cdot g(t) dt) - F(\omega) \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \int_0^1 g_i(t) D_t^i F(\omega) dt \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} D_g^i F(\omega). \end{aligned}$$

De même que précédemment, $W_{loc}^{1, \infty}(\Omega)$ est le sous-ensemble de $W_{loc}^{1, 2}(\Omega)$ formé des fonctionnelles bornées sur Ω pour lesquelles $(D_t^i F(\omega))_{i, \omega, t} \in l^2(L^\infty(\Omega; L^2(0, 1)))$; il est engendré par $\mathcal{W}_{loc}(\Omega)$, l'ensemble des fonctionnelles régulières du type

$$f(\omega_1(t_{11}), \dots, \omega_1(t_{1n}), \dots, \omega_n(t_{n1}), \dots, \omega_n(t_{nn}))$$

où f est \mathcal{C}^∞ et

$$0 < t_{11} < \dots < t_{1n} < 1, \dots, 0 < t_{n1} < \dots < t_{nn};$$

pour celles-ci

$$D_t^i F(\omega) = \sum_{j=(i-1)n+1}^{in} \partial_j f(\omega_1(t_{11}), \dots, \omega_1(t_{1n}), \dots, \omega_n(t_{n1}), \dots, \omega_n(t_{nn})) \mathbf{1}_{[0, t_{ij}]}(t).$$

Si $g \in L^2(0, 1)$, on note ζ_g l'intégrale stochastique de g par rapport au processus canonique, quand cela a un sens : $\int_0^1 g(s) dx(s)$.

Si $g = (g_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} \in l^2(L^2(0, 1))$, on notera encore ζ_g l'intégrale stochastique de g par rapport à un nombre infini de processus coordonnées, quand cela est clairement défini (en particulier, si la mesure de référence est P , on trouve dans [HW] une construction de l'intégrale de Itô par rapport à

un nombre infini de mouvements browniens). C'est la fonctionnelle de $L^2(\Omega)$ égale à

$$\begin{aligned} \zeta_g(\omega) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \zeta_{g_i}(\omega_i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \int_0^1 g_i(t) d\omega_i(t). \end{aligned}$$

Par abus de notation et pour simplifier, si $g \in l^2(L^2(0, 1))$, on notera dans le paragraphe 2 ζ_{g_i} la fonctionnelle sur Ω égale à $\zeta_{g_i} \circ \text{pr}_i$.

I. CARACTÉRISATION DES MESURES D'ÉQUILIBRE SUR $C(0, 1)$

L'équation (1.1) suivante, esquissée dans l'article de Hausmann [Ha] et énoncée par Bismut ([Bi], formule (2.2)), est fondamentale dans le calcul des variations stochastiques en ce qu'elle prouve, quand on la considère dans sa plus grande généralité *i.e.* quand g est un processus stochastique, la dualité entre l'intégrale de Skorohod (ici réduite à celle de Wiener car g est déterministe) et l'opérateur de dérivation (ou d'annihilation) sur l'espace de Wiener.

Pour toute fonctionnelle F de $W^{1,2}(X)$ et pour tout g de $L^2(0, 1)$,

$$(1.1) \quad E_\pi(F \zeta_g) = E_\pi(D_g F).$$

En fait, cette équation caractérise la mesure d'équilibre π au sens où nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 1.2. — Soit $\rho \in \mathcal{P}(X)$ une probabilité sous laquelle le processus canonique des coordonnées est intégrable : $E_\rho(|x(t)|) < +\infty, 0 \leq t \leq 1$. Alors, si l'équation

$$(1.3) \quad E_\rho(F \zeta_g) = E_\rho(D_g F)$$

est satisfaite pour toute fonctionnelle F de $\mathcal{W}(X)$ et pour toute fonction étagée g de $[0, 1]$, ρ est une mesure de Wiener.

Démonstration. — Tout d'abord, l'on vérifie rapidement que l'équation (1.3) a bien un sens. Par fonction étagée, nous entendons pour g les fonctions du type

$$g = a_1 \mathbf{1}_{[0, t_1]} + \dots + a_n \mathbf{1}_{[t_{n-1}, t_n]}, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1.$$

ζ_g est alors égal à $a_1(x(t_1) - x(0)) + \dots + a_n(x(t_n) - x(t_{n-1}))$.

A gauche, le produit $F \zeta_g$ est ρ -intégrable car F est bornée et ζ_g est ρ -intégrable. A droite, $D_g F$ est borné uniformément sur X par le produit de $\sup |g|$ et $\sup_{x \in X} \|D \cdot F(x)\|_{L^2(0, 1)}$, donc c'est ρ -intégrable.

Soit maintenant $\hat{\rho}$ la fonctionnelle suivante associée à ρ :

$$\hat{\rho}(g) = E_{\rho}(\exp(i\zeta_g)), \quad g \text{ fonction étagée de } [0, 1].$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{d\lambda} \hat{\rho}(\lambda g) = E_{\rho}(i\zeta_g \exp(i\lambda\zeta_g)).$$

ζ_g est une fonctionnelle régulière appartenant à $\mathcal{W}(X)$ et $F_g = i \exp(i\lambda\zeta_g)$ de même. Nous pouvons alors appliquer l'égalité (1.3) à F_g pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \hat{\rho}(\lambda g) &= E_{\rho}(D_g F_g) \\ &= i\lambda \int_0^1 g^2(s) ds E_{\rho}(F_g) \\ &= -\lambda \int_0^1 g^2(s) ds \hat{\rho}(\lambda g), \quad \hat{\rho}(0) = 1. \end{aligned}$$

D'où $\hat{\rho}(g) = \exp - \int_0^1 \frac{1}{2} g^2(s) ds$, soit encore $\hat{\rho}(g) = \hat{\pi}(g)$ pour toute fonction étagée g . Cela suffit pour entraîner que $\rho = \pi_{z_0}$, où z_0 est le point de \mathbb{R} chargé par ρ au temps 0. ■

REMARQUE 1.4. — Dans [RZ2], théorème 2, nous obtenions, grâce à l'équation (1.3), une caractérisation de la mesure de Wiener au sein d'une classe beaucoup plus petite de mesures ρ : c'était celle des lois absolument continues par rapport à π , satisfaisant de plus $d\rho/d\pi \in L^2(X)$. C'est au cours de discussions avec Patrick Cattiaux et Christian Léonard, ici très vivement remerciés, que nous avons affaibli nettement ces hypothèses.

REMARQUE 1.5 (pour laquelle nous remercions Hans Föllmer). — Si l'on suppose *a priori* que le processus des coordonnées est une semi-martingale sous ρ , l'on peut déduire directement de l'équation (1.3)

(i) qu'il est en fait une martingale (en prenant $F \mathcal{F}_s$ -mesurable et $g = \mathbf{1}_{[s, t]}$),

(ii) et que sa variation quadratique est t (en prenant pour F le produit d'une fonctionnelle $G \mathcal{F}_s$ -mesurable par $x(t) - x(s)$ et $g = \mathbf{1}_{[s, t]}$, $0 < s < t \leq 1$).

En appliquant le théorème de Lévy (dont la démonstration revient à identifier la fonctionnelle caractéristique $\hat{\pi}$), l'on retrouve que ρ ne peut être égal qu'à une mesure de Wiener.

REMARQUE 1.6. — En additionnant un terme à l'équation (1.3), l'on peut obtenir une équation caractérisant la mesure de Wiener avec dérive (cela fait l'objet du théorème 5 de [RZ2]). Nous ne l'énonçons pas ici car le théorème 1.2 nous suffit dans les démonstrations qui suivent.

Notre but est maintenant de trouver une équation similaire à (1.3) dans le cadre infini-dimensionnel, *i. e.* sur $C(0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$, caractérisant les mesures de Gibbs associées à un potentiel donné.

II. CARACTÉRISATION DES MESURES DE GIBBS SUR $C(0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$

Nous considérons une interaction $\phi = \{ \phi_\Lambda; \Lambda \subset \mathbb{Z}^d \}$ où ϕ_Λ , fonction réelle sur Ω , est \mathcal{F}_Λ -mesurable. Nous supposons dans toute la suite que l'interaction est bornée au sens suivant :

$$(2.1) \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad \|\phi\|_i = \sum_{\Lambda \ni i} \sup_{\omega \in \Omega} |\phi_\Lambda(\omega)| < +\infty.$$

Pour une telle interaction, on peut définir le **potentiel hamiltonien** H_Λ associé à chaque partie finie Λ de \mathbb{Z}^d par :

$$(2.2) \quad H_\Lambda(\omega) = \sum_{\Lambda \cap \Lambda' \neq \emptyset} \phi_{\Lambda'}(\omega).$$

Pour chaque $\omega \in \Omega$, on définit la **distribution de Gibbs** (ou spécification locale) sur Λ associée au potentiel H_Λ de condition extérieure ω_{Λ^c} et de condition initiale $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, comme le noyau de probabilité suivant sur Ω :

$$(2.3) \quad \Pi_\Lambda^z(\omega, A) = \frac{1}{Z_\Lambda(\omega)} \int_{X^\Lambda} \mathbf{1}_A(\xi_{\omega_{\Lambda^c}}) e^{-H_\Lambda(\xi_{\omega_{\Lambda^c}})} \otimes_{i \in \Lambda} \pi_{z_i}(d\xi_i), \quad A \subseteq \Omega,$$

où $Z_\Lambda(\omega)$ est une constante de renormalisation.

Soit $\mathcal{G}(\phi)$ l'ensemble des états de Gibbs pour l'interaction ϕ , *i. e.* l'ensemble des probabilités $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ telles que, pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, si z est le point chargé par Q au temps 0, Π_Λ^z soit une version régulière de Q étant donnée \mathcal{F}_{Λ^c} .

Remarquons que l'on peut se restreindre à la seule connaissance des $\Pi_{\{i\}}^z, i \in \mathbb{Z}^d$, version régulière de $Q(\cdot | \mathcal{F}_{\{i\}^c})$, pourvu que $\Pi_{\{i\}}^z(\omega, \cdot), \omega \in \Omega$, ait une densité strictement positive par rapport à π_{z_i} (voir [Ge], Theorem (1.33)).

Pour alléger, nous notons à partir de maintenant Π_i^z, Z_i, H_i au lieu de $\Pi_{\{i\}}^z, Z_{\{i\}}, H_{\{i\}}, i \in \mathbb{Z}^d$.

PROPOSITION 2.4. — Soit ϕ une interaction bornée vérifiant l'hypothèse

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } i \in \mathbb{Z}^d \text{ et } \eta \in X^{\{i\}^c}, H_i(\cdot, \eta), \text{ le potentiel en } i \text{ associé à } \phi \\ \text{— considéré comme une fonctionnelle sur } X \text{ — appartient à} \\ W^{1,2}(X). \end{array} \right.$$

Alors, tout état de Gibbs Q pour ϕ satisfait l'équation

$$(2.6) \quad E_Q(F \zeta_g) = E_Q(D_g F) - E_Q(F \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} D_g^i H_i)$$

pour toute $F \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ et $g \in l^2(L^2(0, 1))$.

La probabilité P de référence est ici, naturellement, celle ayant même condition initiale que Q.

REMARQUE 2.7. — L'hypothèse (2.1) de bornitude de l'interaction ϕ entraîne que, pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ et tout $Q \in \mathcal{G}(\phi)$, Q_Λ est une probabilité sur X^Λ équivalente à un produit de mesures de Wiener.

Démonstration. — Soit $A \subseteq X^\Lambda$ mesurable. Alors, si $B = A \times X^{\Lambda^c}$ et $Q(\omega(0) = z) = 1$

$$\begin{aligned} Q_\Lambda(A) &= Q(B) = E_Q(E_Q(B | \mathcal{F}_{\Lambda^c})) \\ &= E_Q(\Pi_\Lambda^z(\cdot, B)) \\ &= \int_\Omega \frac{1}{Z_\Lambda(\omega)} \int_{X^\Lambda} \mathbf{1}_A(\xi) e^{-H_\Lambda(\xi|\omega_{\Lambda^c})} \otimes_{i \in \Lambda} \pi_{z_i}(d\xi) Q(d\omega) \\ &= \int_A \int_\Omega \frac{1}{Z_\Lambda(\omega)} e^{-H_\Lambda(\xi|\omega_{\Lambda^c})} Q(d\omega) \otimes_{i \in \Lambda} \pi_{z_i}(d\xi). \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse (2.1), H_Λ est bornée sur Ω , donc

$$\int_\Omega \frac{1}{Z_\Lambda(\omega)} e^{-H_\Lambda(\xi|\omega_{\Lambda^c})} Q(d\omega)$$

est aussi une fonction finie et strictement positive de ξ . Cela prouve l'équivalence de Q_Λ et $\otimes_{i \in \Lambda} \pi_{z_i}$. ■

Démonstration de la Proposition 2.4. — Soit $Q \in \mathcal{G}(\phi)$ de condition initiale δ_z , $g \in \mathcal{L}^2(L^2(0, 1))$ et F Λ -locale, élément de $W_{loc}^{1,2}(\Omega)$.

Tout d'abord, montrons que pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$, le produit $F \zeta_{g_i}$ est Q-intégrable. Par la remarque 2.7, Q_i et π_{z_i} sont équivalentes, donc ζ_{g_i} est bien définie comme l'intégrale de Wiener de g_i . De plus,

$$E_Q(|F \zeta_{g_i}|) = E_{Q_{\Lambda \cup \{i\}}}(|F \zeta_{g_i}|) \leq E_{Q_\Lambda}^{1/2}(F^2) E_{Q_i}^{1/2}(\zeta_{g_i}^2).$$

Toujours grâce à la remarque 2.7, Q_Λ et $\otimes_{i \in \Lambda} \pi_{z_i}$ sont équivalentes. Donc l'hypothèse $F \in L^2(\Omega)$ est équivalente à $F^2 Q_\Lambda$ -intégrable et

$$E_Q(|F \zeta_{g_i}|) \leq Cte E_{P_z}^{1/2}(F^2) E_{\pi_{z_i}}^{1/2}(\zeta_{g_i}^2) < +\infty.$$

De la propriété caractéristique d'un état de Gibbs découle, pour tout i ,

$$E_Q(F \zeta_{g_i}) = E_Q(E_Q(F \zeta_{g_i} | \mathcal{F}_{\{i\}^c})) = E_Q(\Pi_i^z(\cdot, F \zeta_{g_i})).$$

Mais $\Pi_i^z(\omega, F \zeta_{g_i}) = \frac{1}{Z_i(\omega)} \int_X F(x \omega_{\{i\}^c}) \zeta_{g_i}(x) e^{-H_i(x \omega_{\{i\}^c})} \pi_{z_i}(dx)$, expression qui se transforme, grâce à l'équation (1.1), en

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Z_i(\omega)} E_{\pi_{z_i}}(D_{g_i}(F(\cdot \omega_{\{i\}^c}) e^{-H_i(\cdot \omega_{\{i\}^c})})) \\ &= \frac{1}{Z_i(\omega)} E_{\pi_{z_i}}((D_{g_i} F(\cdot \omega_{\{i\}^c}) - F(\cdot \omega_{\{i\}^c}) D_{g_i}(H_i(\cdot \omega_{\{i\}^c}))) e^{-H_i(\cdot \omega_{\{i\}^c})}) \\ &= \Pi_i^z(\omega, D_g^i F - F D_g^i H_i). \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau la propriété de Gibbs, l'on obtient

$$(2.8) \quad E_Q(F \zeta_{g_i}) = E_Q(D_g^i F) - E_Q(F D_g^i H_i), \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d.$$

Le terme de gauche de l'équation (2.8) est sommable en i car il est majoré par

$$\text{Cte } E_{P_z}^{1/2}(F^2) E_{\pi_{z_i}}^{1/2}(\zeta_{g_i}^2) = \text{Cte } E_{P_z}^{1/2}(F^2) \|g_i\|_{L^2(0,1)},$$

i -ième terme d'une série convergente [puisque $g \in l^2(L^2(0,1))$]. Donc

$$E_Q(F \zeta_g) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} E_Q(F \zeta_{g_i}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} (E_Q(D_g^i F) - E_Q(F D_g^i H_i)).$$

Puisque $F = F \circ \text{pr}_\Lambda$, $D_g^i F$ est nul pour tout $i \in \Lambda^c$. Donc $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} E_Q(D_g^i F)$ est une somme finie, égale à $E_Q(D_g F)$. Enfin

$$|E_Q(F D_g^i H_i)| \leq |E_Q(D_g^i F)| + |E_Q(F \zeta_{g_i})|,$$

ce qui entraîne que $E_Q(F D_g^i H_i)$ est le terme courant d'une série sommable. On peut, là encore, échanger la sommation en i et l'intégration par rapport à Q , ce qui permet d'obtenir la formule (2.6) :

$$E_Q(F \zeta_g) = E_Q(D_g F) - E_Q(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} F D_g^i H_i). \quad \blacksquare$$

Notre résultat principal consiste maintenant à prouver que, sous certaines hypothèses, l'équation (2.6) caractérise l'ensemble des états de Gibbs pour ϕ .

THÉORÈME 2.9. — Soit $H_i, i \in \mathbb{Z}^d$, le potentiel hamiltonien associé à une interaction ϕ , tel que, pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$ et $\eta \in X^{\{i\}^c}$, $H_i(\cdot, \eta) \in W^{1,\infty}(X)$ et $D^i H_i \in L^\infty(\Omega; L^2(0,1))$. Soit Q une probabilité de $\mathcal{P}(\Omega)$ sous laquelle chaque coordonnée du processus canonique est intégrable :

$$(2.10) \quad E_Q(|\omega_i(t)|) < +\infty, \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d.$$

Alors si Q vérifie, pour toute fonctionnelle F de $W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$ et pour toute suite de fonctions étagées $g = (g_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$,

$$(2.8) \quad E_Q(F \zeta_{g_i}) = E_Q(D_g^i F) - E_Q(F D_g^i H_i), \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d,$$

Q est un état de Gibbs pour ϕ .

REMARQUE 2.11 sur les hypothèses du Théorème 2.9. — La condition sur le potentiel n'est pas très restrictive. Il est borné dès que l'interaction l'est; nous exigeons de plus qu'il soit différentiable et de différentielle non seulement dans L^2 mais dans L^∞ . Nous ne le supposons pas *a priori* local (l'interaction peut s'effectuer à distance infinie), ni élément de $\mathcal{W}_{loc}(\Omega)$ (c'est une fonctionnelle dépendant de toute la trajectoire et non d'un nombre fini d'instants).

Démonstration du théorème 2.9. — Vérifions tout d'abord que tous les termes de l'équation (2.8) ont un sens.

Membre de gauche : Si

$$g_i = a_1 \mathbf{1}_{[0, t_1]} + \dots + a_n \mathbf{1}_{[t_{n-1}, t_n]}, \quad 0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1,$$

$$\zeta_{g_i}(\omega) = a_1 (\omega_i(t_1) - \omega_i(0)) + \dots + a_n (\omega_i(t_n) - \omega_i(t_{n-1})).$$

D'où

$$|E_Q(F \zeta_{g_i})| \leq \sup |F| E_Q(|\zeta_{g_i}|) < +\infty, \quad \text{par (2.10).}$$

Membre de droite, 1^{er} terme :

Par hypothèse $D_g^i F \in L^\infty(\Omega; L^2(0, 1))$ donc il est Q-intégrable.

Membre de droite, 2^e terme :

$$|E_Q(F D_g^i H_i)| \leq \sup |F| \sup_{\omega} |D_g^i H_i(\omega)|$$

$$\leq \sup |F| \sup_{\omega} \|D^i \cdot H_i(\omega)\|_{L^2(0, 1)} \|g_i\|_{L^2(0, 1)} < +\infty.$$

Nous cherchons maintenant à déduire de l'égalité (2.8) des informations sur les probabilités conditionnelles $Q(\cdot | \mathcal{F}_{\{i\}^c})$.

En appliquant (2.8) à $F(\omega) = F'(\omega_{\{i\}^c}) F_i(\omega_i)$, on a

$$E_Q(F' F_i \zeta_{g_i}) = E_Q(F' D_g^i F_i) - E_Q(F' F_i D_g^i H_i)$$

$$\Leftrightarrow E_Q(F' E_Q(F_i \zeta_{g_i} | \mathcal{F}_{\{i\}^c})) = E_Q(F' E_Q(D_g^i F_i | \mathcal{F}_{\{i\}^c})) - E_Q(F' E_Q(F_i D_g^i H_i | \mathcal{F}_{\{i\}^c}))$$

pour toute fonctionnelle $F' \in W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$ $\mathcal{F}_{\{i\}^c}$ -mesurable, pour toute $F_i \in W^{1,\infty}(X)$ et pour toute g_i étagée. Cela suffit pour impliquer

$$(2.12) \quad E_Q(F_i \zeta_{g_i} | \mathcal{F}_{\{i\}^c})$$

$$= E_Q(D_g^i F_i | \mathcal{F}_{\{i\}^c}) - E_Q(F_i D_g^i H_i | \mathcal{F}_{\{i\}^c}) \quad \text{Q-p. s.}$$

$$= E_Q(e^{H_i} D_g^i (F_i e^{-H_i}) | \mathcal{F}_{\{i\}^c}) \quad \text{Q-p. s.}$$

L'ensemble négligeable sous Q sur lequel (2.12) n'est peut-être pas vérifiée dépend *a priori* de F_i et g_i , mais par séparabilité de $W^{1,\infty}(X)$ et de l'ensemble des fonctions étagées, on peut trouver un ensemble de Q-masse nulle en dehors duquel l'égalité (2.12) est satisfaite pour tout F_i et g_i .

Pour simplifier, notons \tilde{Q}_i^ω une version régulière de la probabilité conditionnelle sur X égale à l'image de $Q(\cdot | \mathcal{F}_{\{i\}^c})(\omega)$ par pr_i . L'on a alors, par construction même des probabilités conditionnelles, ω Q-p. s.

$$Q(d(x \eta) | \mathcal{F}_{\{i\}^c})(\omega) = \tilde{Q}_i^\omega(dx) \otimes \delta_{\omega_{\{i\}^c}}(d\eta),$$

et l'égalité (2.12) se réécrit : ω Q-p. s., $\forall F_i \in W^{1,\infty}(X)$, $\forall g_i$ étagée

$$E_{\tilde{Q}_i^\omega}(F_i \zeta_{g_i}) = E_{\tilde{Q}_i^\omega}(e^{H_i(\cdot, \omega_{\{i\}^c})} D_{g_i}(F_i e^{-H_i(\cdot, \omega_{\{i\}^c})})).$$

En particulier, pour $F_i(x) = G_i(x) e^{H_i(x\omega_{\{i\}^c})}$, $G_i \in W^{1,\infty}(X)$,

$$E_{\tilde{Q}_i^\omega}(e^{H_i(\cdot, \omega_{\{i\}^c})} G_i \zeta_{g_i}) = E_{\tilde{Q}_i^\omega}(e^{H_i(\cdot, \omega_{\{i\}^c})} D_{g_i} G_i).$$

Nous voudrions appliquer maintenant le théorème 1.2. Vérifions que ses hypothèses sont satisfaites, à savoir que le processus des coordonnées $(x(t))_{t \geq 0}$ est intégrable sous la mesure $e^{H_i(\cdot, \omega_{\{i\}^c})} \tilde{Q}_i^\omega$ renormalisée, ou, ce qui est équivalent, sous la mesure \tilde{Q}_i^ω (rappelons que $e^{H_i(\cdot, \omega_{\{i\}^c})}$ est borné uniformément sur Ω). Mais, d'après l'hypothèse (2.10)

$$E_Q(|\omega_i(t)|) = E_Q(E_{\tilde{Q}_i^\omega}(|x(t)|)) < +\infty, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d.$$

D'où, Q-p. s.,

$$E_{\tilde{Q}_i^\omega}(|x(t)|) < +\infty, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d.$$

Donc, par le théorème 1.2, pour Q-presque tout ω , la mesure $e^{H_i(\cdot, \omega_{\{i\}^c})} \tilde{Q}_i^\omega$ renormalisée n'est autre qu'une mesure de Wiener. Soit encore, si z est le point chargé par Q au temps 0, pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$ et ω Q-p. s.,

$$\tilde{Q}_i^\omega(dx) = \frac{1}{Z_i(\omega)} e^{-H_i(x\omega_{\{i\}^c})} \pi_{z_i}(dx).$$

Nous retrouvons la définition (2.3) d'une mesure de Gibbs associée à H, ce qui termine la preuve du théorème. ■

COROLLAIRE 2.13. — Soit $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ satisfaisant à l'hypothèse (2.10). Si, de plus, Q vérifie pour toute fonctionnelle F de $W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$ et toute suite g de fonctions étagées

$$(2.14) \quad E_Q(F \zeta_{g_i}) = E_Q(D_g^i F), \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d,$$

alors Q est égal à P, le produit infini de mesures de Wiener ayant même condition initiale que Q.

Démonstration. — C'est une conséquence directe du théorème 2.9 appliqué à une interaction nulle.

Nous proposons aussi la démonstration directe suivante :

soit $g = (g_1, \dots, g_n, 0, 0, \dots)$ où les g_i sont étagées et \tilde{Q} la fonctionnelle suivante associée à Q : $\tilde{Q}(g) = E_Q(\exp(i\zeta_g))$.

Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, soit $\lambda \cdot g = (\lambda_1 g_1, \dots, \lambda_n g_n, 0, \dots)$; alors,

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \tilde{Q}(\lambda \cdot g) &= E_Q(i\zeta_{g_j} \exp(i\zeta_{\lambda \cdot g})) = i E_Q(D_g^j \exp(i\zeta_{\lambda \cdot g})) \\ &= -\lambda_j \|g_j\|_{L^2(0,1)}^2 E_Q(\exp(i\zeta_{\lambda \cdot g})) \\ &= -\lambda_j \|g_j\|_{L^2(0,1)}^2 \tilde{Q}(\lambda \cdot g). \end{aligned}$$

Avec la condition frontière $\tilde{Q}(0) = 1$, cela entraîne

$$\tilde{Q}(\lambda \cdot g) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \|g_j\|_{L^2(0,1)}^2\right).$$

D'où $\tilde{Q} = \tilde{P}$ sur la classe des suites finies de fonctions étagées, ce qui implique que $Q = P_z$, si z est le point initialement chargé par Q . ■

REMERCIEMENTS

Le premier auteur a effectué ces recherches à l'Université de Bielefeld grâce à une bourse de la fondation Alexander von Humboldt qui est donc ici très sincèrement remerciée.

RÉFÉRENCES

- [Bi] J.-M. BISMUT, Martingales, the Malliavin Calculus and Hypocoellipticity under general Hörmander's Conditions, *Z. Wahr. Ver. Geb.*, vol. **56**, 1981, p. 469-505.
- [CRZ] P. CATTIAUX, S. ROELLY et H. ZESSIN, Caractérisation de diffusions comme mesures de Gibbs, Preprint BiBoS 569/93.
- [Fö] H. FÖLLMER, Time reversal on Wiener Space, *Stoch. Proc. Math. and Physics, Lectures Notes in Mathematics* n° 1158, Springer Verlag, 1986, p. 119-129.
- [Ha] U. HAUSMANN, Functionals of Ito Processes as Stochastic Integrals, *SIAM J. Control and Optimization*, vol. **16**, 1978, p. 252-269.
- [HW] M. HITSUDA et H. WATANABE, On Stochastic Integrals with Respect to an Infinite Number of Brownian Motions and its Applications, *Proc. Intern. Symp. Stoch. Diff. Equations Kyoto*, 1976, p. 57-74.
- [Ge] H.-O. GEORGI, Gibbs Measures and Phase Transitions, *De Gruyter Studies in Mathematics*, vol. **9**, 1988.
- [Ma] P. MALLIAVIN, Stochastic Calculus of Variations and Hypocoelliptic Operators, *Proc. Intern. Symp. Stoch. Diff. Equations Kyoto*, 1978, p. 195-263.
- [RZ1] S. ROELLY et H. ZESSIN, Sur la mécanique statistique d'une particule brownienne sur le tore, *Séminaire de Probabilités XXV*, éd. Azéma, Meyer, Yor, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Verlag, 1991.
- [RZ2] S. ROELLY et H. ZESSIN, Une caractérisation des diffusions par le calcul des variations stochastiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série I, 1991, p. 309-312.

(Manuscrit reçu le 25 octobre 1991;
révisé le 4 janvier 1993.)