

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

JEAN DUCHON

RAOUL ROBERT

## **Évolution d'une interface par capillarité et diffusion de volume. I. Existence locale en temps**

*Annales de l'I. H. P., section C*, tome 1, n° 5 (1984), p. 361-378

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPC\\_1984\\_\\_1\\_5\\_361\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1984__1_5_361_0)

© Gauthier-Villars, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section C » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpc>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Évolution d'une interface par capillarité et diffusion de volume

## I. Existence locale en temps

par

**Jean DUCHON et Raoul ROBERT**

Laboratoire I. M. A. G., B. P. n° 68,  
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France

---

**RÉSUMÉ.** — Existence locale en temps pour le problème suivant : une courbe se déplace à une vitesse égale à la dérivée normale d'une fonction harmonique, égale au bord à la courbure de la courbe (cas d'une donnée initiale graphe d'une fonction régulière).

**ABSTRACT.** — We prove existence locally in time for the following problem: a curve moves with velocity equal to the normal derivative of a harmonic function, whose boundary value is given by the curvature of the curve (here in the case of an initial curve graph of a smooth function).

---

### INTRODUCTION

Nous considérons le problème d'évolution d'interface suivant : à l'instant  $t$ ,  $\Omega_t$  est un domaine du plan dont la frontière  $\Gamma_t$  se déplace à une vitesse (mesurée suivant la normale extérieure  $\nu$ ) égale à  $-\frac{\partial K}{\partial \nu}$ , dérivée normale d'une fonction harmonique dans  $\Omega_t$  dont la valeur au bord est égale à la courbure  $K$  de  $\Gamma_t$ . Ceci est un modèle du phénomène de corrosion par capillarité et diffusion de volume (cf. [2] [6]).

Nous nous proposons dans cet article d'établir l'existence et l'unicité

d'une solution  $\Gamma_t$  sur un intervalle de temps  $0 \leq t \leq T$  pour toute donnée initiale graphe d'une fonction suffisamment régulière ( $T > 0$  dépendant de  $\Gamma_0$ ).

La technique de démonstration, qui consiste à faire apparaître la solution comme point fixe d'un opérateur contractant à partir d'une formulation intrinsèque de l'équation d'évolution, est reprise de [1]. La difficulté consiste ici à obtenir des estimations suffisantes pour l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial v}$ .

Dans ce but, on est amené à estimer la norme, comme opérateurs sur  $L^2$ , de certains noyaux associés à l'interface  $\Gamma_t$ . Ceci peut se faire de deux façons ; soit en remarquant qu'on peut travailler avec assez de régularité sur  $\Gamma_t$  pour pouvoir calculer leur norme Hilbert-Schmidt, soit, plus brutalement, en estimant ces noyaux comme des noyaux singuliers définissant des opérateurs continus sur  $L^2$  d'après de récents résultats de Y. Meyer [5].

## § 1. ÉCRITURE DE L'ÉQUATION ET NOTATIONS

Dans ce travail, nous ne considérerons que des courbes lipschitziennes que nous supposerons paramétrées par l'abscisse curviligne :

$$\Gamma = \{ z(s) : s \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{C},$$

avec

$$z'(s) = e^{i\varphi(s)}, \quad |\varphi(s)| \leq \alpha < \pi/2.$$

Noter qu'alors :

$$|z(s) - z(\sigma)| \leq |s - \sigma| \leq \frac{1}{\cos \alpha} |z(s) - z(\sigma)|.$$

Notons  $\Omega$  l'ouvert situé au-dessus de  $\Gamma$ ,  $\tau = e^{i\varphi}$  le vecteur unitaire tangent,  $v = -ie^{i\varphi}$  le vecteur normal sortant et  $n = -v$ .

Nous désignerons par  $\frac{\partial f}{\partial v}(s)$  la trace dérivée normale (le problème de l'existence de cette trace pour  $f$  convenable sera examiné au § 4), au point  $z(s)$  de  $\Gamma$ , de la solution  $U$  du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{dans } \Omega, \\ U(z(s)) = f(s). \end{cases}$$

Enfin pour  $\Gamma$  suffisamment régulière, on notera  $K(s) = \varphi'(s)$  la courbure de  $\Gamma$  au point d'abscisse  $s$ , de sorte que :

$$\frac{d\tau}{ds} = Kn.$$

Décrivons maintenant l'évolution de l'interface.

Nous supposons l'interface infinie  $\Gamma_t$  donnée par la représentation paramétrique régulière  $\tilde{z}(t, \sigma)$ ,  $\sigma$  étant une abscisse curviligne sur  $\Gamma_t$ .

Nous allons montrer qu'on peut se ramener à prendre à chaque instant l'origine de l'abscisse curviligne sur une même trajectoire orthogonale aux  $\Gamma_t$ . Cela revient à chercher une fonction  $h(t)$  telle qu'en effectuant le changement de variable admissible  $(t, \sigma) \rightarrow (t, s)$ ,  $s = \sigma - h(t)$ , la nouvelle représentation paramétrique  $z(t, s) = \tilde{z}(t, s + h(t))$  vérifie :

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial t}(t, 0) \cdot \frac{\partial z}{\partial s}(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

et donc :

$$\frac{dh}{dt}(t) = - \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}(t, h(t)) \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \sigma}(t, h(t)).$$

Cette équation différentielle assure l'existence d'une solution locale unique  $h(t)$  pour toute donnée initiale. Nous supposons désormais  $\Gamma_t$  paramétrée par une telle représentation  $z(t, s)$ .

L'équation d'évolution de  $\Gamma_t$  s'écrit alors :

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t, s) \cdot v(t, s) = - \frac{\partial K}{\partial v}(t, s).$$

Calculons  $\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \tau$ , on a :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \tau \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \cdot \tau + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \mathbf{K}n = \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial v}$$

(car  $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \cdot \tau = \frac{\partial \tau}{\partial t} \cdot \tau = 0$ ), ce qui, avec (1), donne :

$$\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \tau = \int_0^s \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial v} d\sigma$$

d'où  $z(t, s)$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial v} v + \left( \int_0^s \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial v} d\sigma \right) \tau, \\ z(0, s) = z_0(s). \end{cases}$$

Dérivant cette équation par rapport à  $s$  (en remarquant que  $\frac{\partial v}{\partial s} = \mathbf{K} \tau$ ), on obtient :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \left( - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial v} - \mathbf{K} \int_0^s \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial v} d\sigma \right) v,$$

or  $\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} v$ , on obtient donc l'équation en  $\varphi$  :

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial K}{\partial v} = K \int_0^s K \frac{\partial K}{\partial v} d\sigma, & K = \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \\ \varphi(0, s) = \varphi_0(s). \end{cases}$$

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'étude de cette équation. Il nous arrivera fréquemment de désigner par  $D$  l'opérateur de dérivation par rapport à  $s$ .

## § 2. UN RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ LOCAL EN TEMPS

Précisons quelques notations : on note  $|f|_p$  la norme d'une fonction  $f$  dans  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ;  $H^2 = H^2(\mathbb{R})$  désigne l'espace de Sobolev habituel qu'on munira de la norme  $\|\varphi\| = \max_{j=0,1,2} |\varphi^{(j)}|_2$ . Nous noterons également  $\|\psi\| = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|\psi(t)\|$  la norme dans  $L^\infty(0, T; H^2)$ .

$\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx$  désigne la transformée de Fourier d'une fonction  $f$

et  $f * g$  le produit de convolution de  $f$  et  $g$  lorsqu'il est défini.

Le but de cet article est de démontrer le résultat suivant :

**THÉORÈME.** — *Pour  $\varphi_0$  appartenant à l'espace  $H^2$ , avec  $|\varphi_0|_\infty < \pi/2$ , il existe  $T > 0$  et  $\varphi$  continue de  $[0, T]$  dans  $H^2$  solution de (E). De plus, il existe une boule de  $L^\infty(0, T; H^2)$  dans laquelle la solution est unique.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons transformer l'équation (E) en introduisant l'opérateur  $\Lambda$  qui donne explicitement  $\frac{\partial}{\partial v}$  lorsque  $\Gamma$  est une droite :

$$(\Lambda f) \hat{\gamma}(\xi) = 2\pi |\xi| \hat{f}(\xi).$$

Nous écrivons (E) sous la forme :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda^3 \varphi = K \int_0^s K \frac{\partial K}{\partial v} d\sigma + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial v} - \Lambda \right) K.$$

La solution de l'équation linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda^3 \varphi = F \\ \varphi(0, s) = \varphi_0(s) \end{cases}$$

s'écrit explicitement  $\varphi(t) = N_t * \varphi_0 + \int_0^t N_{t-\theta} * F(\theta) d\theta$ , où  $\widehat{N}_t(\xi) = e^{-t|2\pi\xi|^3}$ .  
Ainsi le problème (E) s'écrit :

$$\varphi(t) = N_t * \varphi_0 + \int_0^t N_{t-\theta} * F(\varphi(\theta)) d\theta,$$

où on a posé, pour  $\varphi \in H^2$  :

$$F(\varphi) = K \int_0^s K \frac{\partial K}{\partial v} d\sigma + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial v} - \Lambda \right) K.$$

Ou encore, en définissant  $\mathcal{J}\psi$  pour  $\psi \in L^\infty(0, T; H^2)$  par

$$\mathcal{J}\psi(t) = \int_0^t N_{t-\theta} * F(N_\theta * \varphi_0 + \psi(\theta)) d\theta,$$

(E) devient :

$$(E1) \quad \mathcal{J}\psi = \psi.$$

Nous allons commencer par montrer que pour  $T$  et  $r > 0$  assez petits, l'opérateur non linéaire  $\mathcal{J}$  envoie la boule fermée de rayon  $r$  de  $L^\infty(0, T; H^2)$  dans elle-même.

On a pour  $j = 0, 1, 2$  :

$$D^j \mathcal{J}\psi(t) = \int_0^t D^j N_{t-\theta} * F(N_\theta * \varphi_0 + \psi(\theta)) d\theta,$$

d'où :

$$|D^j \mathcal{J}\psi(t)|_2 \leq \int_0^t |D^j N_{t-\theta}|_1 |F|_2 d\theta.$$

Or,

$$|D^j N_{t-\theta}|_1 = (t - \theta)^{-j/3} a_j, \quad a_j = |D^j N_1|_1,$$

d'où :

$$|D^j \mathcal{J}\psi(t)|_2 \leq \frac{a_j}{1 - j/3} t^{1-j/3} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq \theta \leq T} |F(N_\theta * \varphi_0 + \psi(\theta))|_2.$$

Nous montrerons plus loin que pour  $\varphi \in H^2$  vérifiant  $\|\varphi\| \leq R$  et  $|\varphi|_\infty \leq \alpha < \pi/2$ , on a l'estimation :

$$(I) \quad |F(\varphi)|_2 \leq C(R, \alpha).$$

Or, si  $\varphi(t) = N_t * \varphi_0 + \psi(t)$ , on a  $\|\varphi(t)\| \leq a_0 \|\varphi_0\| + r$  et comme  $N_t * \varphi_0 \rightarrow \varphi_0$  dans  $L^\infty$  quand  $t \rightarrow 0$  et  $|\psi(t)|_\infty \leq \|\psi\| \leq r$ , pour  $T$  et  $r$  assez petits, on aura  $|\varphi(t)|_\infty \leq \alpha < \pi/2$  d'où :

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq \theta \leq T} |F(\varphi(\theta))|_2 \leq C(a_0 \|\varphi_0\| + r, \alpha).$$

On en déduit :

$$|D^j \mathcal{J}\psi(t)|_2 \leq \frac{a_j}{1 - j/3} t^{1-j/3} C(a_0 \|\varphi_0\| + r, \alpha),$$

il s'ensuit que pour  $T$  et  $r$  assez petits, on a :

$$|D^j \mathcal{J}\psi(t)|_2 \leq r \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T.$$

Autrement dit,  $\mathcal{J}$  envoie la boule de rayon  $r$  de  $L^\infty(0, T; H^2)$  dans elle-même.

Montrons de même que pour  $T$  assez petit  $\mathcal{J}$  est contractant sur cette boule. On a :

$$\begin{aligned} & |D^j \mathcal{J}\psi_1(t) - D^j \mathcal{J}\psi_2(t)|_2 \\ & \leq \frac{a_j}{1-j/3} t^{1-j/3} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq \theta \leq T} |F(N_\theta * \varphi_0 + \psi_1(\theta)) - F(N_\theta * \varphi_0 + \psi_2(\theta))|_2. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant une deuxième estimation essentielle qui sera démontrée plus loin :

$$(II) \quad |F(\varphi_1) - F(\varphi_2)|_2 \leq C_1(R, \alpha) \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

pour  $\varphi_i \in H^2$ ,  $\|\varphi_i\| \leq R$ ,  $|\varphi_i|_\infty \leq \alpha < \pi/2$ ,  $i = 1, 2$ .

D'où il vient :

$$|D^j \mathcal{J}\psi_1(t) - D^j \mathcal{J}\psi_2(t)|_2 \leq \frac{a_j}{1-j/3} t^{1-j/3} C_1(a_0 \|\varphi_0\| + r, \alpha) \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

il s'ensuit que pour  $T$  assez petit,  $\mathcal{J}$  est contractant sur la boule de rayon  $r$  de  $L^\infty(0, T; H^2)$ .

En conséquence,  $\mathcal{J}$  possède un point fixe dans cette boule :

$$\psi \in L^\infty(0, T; H^2), \quad \|\psi\| \leq r, \quad \mathcal{J}\psi = \psi.$$

D'où en revenant à  $\varphi(t) = N_t * \varphi_0 + \psi(t)$ , il vient :

$$\varphi(t) = N_t * \varphi_0 + \int_0^t N_{t-\theta} * F(\varphi(\theta)) d\theta,$$

et comme  $F(\varphi(\theta)) \in L^\infty(0, T; L^2)$ ,  $\varphi$  est continue de  $[0, T]$  dans  $H^2$  et est solution (au sens des distributions) de

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda^3 \varphi = F(\varphi), \\ \varphi(0, s) = \varphi_0(s), \end{cases}$$

donc de (E). L'unicité est immédiate par contraction. ■

On voit que la démonstration repose sur les estimations (I) et (II) qui sont l'objet des paragraphes suivants; résumons-en les grandes lignes.

Posons :

$$A(\varphi) = K \int_0^s K \frac{\partial K}{\partial v} d\sigma$$

et

$$B(\varphi) = D \left( \frac{\partial}{\partial v} - \Lambda \right) K, \quad \text{de sorte que } F = A + B.$$

La majoration de  $|A(\varphi)|_2$  est simple, on écrit :

$$|A(\varphi)|_2 \leq |K|_2^2 \left| \frac{\partial K}{\partial v} \right|_2$$

et on utilise l'inégalité de Payne-Weinberger

$$\left| \frac{\partial K}{\partial v} \right|_2 \leq \text{Co}(\alpha) |DK|_2,$$

d'où

$$|A(\varphi)|_2 \leq \text{Co}(\alpha) \|\varphi\|^3.$$

Les autres estimations, celles de  $|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)|_2$ , de  $|B(\varphi)|_2$  et de  $|B(\varphi_1) - B(\varphi_2)|_2$ , résulteront de la formule

$$\frac{\partial}{\partial v} - \Lambda = (Y - \text{HX}) \left( \frac{1}{2} H + X \right)^{-1} D,$$

où X et Y sont les parties réelle et imaginaire de l'opérateur Z défini par le noyau

$$Z(s, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \frac{z(\sigma) - z(s) - (\sigma - s)z'(s)}{(\sigma - s)(z(\sigma) - z(s))}$$

suivant  $Zu(s) = \int Z(s, \sigma)u(\sigma)d\sigma$ .

H est la transformation de Hilbert :

$$Hu(s) = \text{v. p.} \frac{1}{\pi} \int \frac{u(\sigma)}{s - \sigma} d\sigma.$$

Nous montrerons l'inégalité  $\left\| \left( \frac{1}{2} H + X \right)^{-1} \right\|_{\text{op}} \leq 2 \text{Co}(\alpha)$  ( $\|\cdot\|_{\text{op}}$  désigne la norme d'opérateur sur  $L^2$ ).

Enfin, des majorations de  $\|Z\|_{\text{op}}$  et  $\|DZ\|_{\text{op}}$  en fonction de R et  $\alpha$ , et de  $\|Z_1 - Z_2\|_{\text{op}}$  et  $\|DZ_1 - DZ_2\|_{\text{op}}$  en fonction de R,  $\alpha$  et  $\|\varphi_1 - \varphi_2\|$ , nous permettent d'établir (I) et (II).

### § 3. ÉTUDE DE Z

On note  $V^{\frac{1}{2}} = V^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions  $u$  localement intégrables telles que  $\frac{u(\sigma) - u(s)}{\sigma - s} \in L^2(ds \otimes d\sigma)$ . On vérifie facilement (cf. [3]) que  $V^{\frac{1}{2}}$  est l'espace des distributions tempérées  $u$  telles que  $\widehat{u}'$  est localement



intégrable et  $\int |2\pi\xi|^{-1} |\widehat{u'}|^2 d\xi < +\infty$ . On définit alors  $\Lambda^{\frac{1}{2}}u$  par  $(\Lambda^{\frac{1}{2}}u)^\wedge = -i \operatorname{sgn} \xi |2\pi\xi|^{-\frac{1}{2}} \widehat{u'}$ , et on a :

$$\left| \frac{u(\sigma) - u(s)}{\sigma - s} \right|_2 = \sqrt{2\pi} |\Lambda^{\frac{1}{2}}u|_2.$$

Posons :

$$q(s, \sigma) = \frac{z(\sigma) - z(s)}{\sigma - s},$$

alors

$$Z(s, \sigma) = \frac{1}{2\pi q} \frac{\partial q}{\partial s}.$$

Commençons par calculer les normes des dérivées  $\frac{\partial^k q}{\partial s^k}$  dans l'espace  $L^2(ds \otimes d\sigma)$ .

LEMME 1. — Soit  $u$  une fonction telle que  $u^{(k)} \in V^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Alors, on a :

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \frac{u(\sigma) - u(s)}{\sigma - s} \right|_2 = \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \left| \frac{u^{(k)}(\sigma) - u^{(k)}(s)}{\sigma - s} \right|_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{2k+1}} |\Lambda^{\frac{1}{2}}u^{(k)}|_2.$$

Démonstration. — On a :

$$\frac{\partial^k}{\partial s^k} \frac{u(\sigma) - u(s)}{\sigma - s} = \frac{k!}{(\sigma - s)^{k+1}} \left[ u(\sigma) - u(s) - \dots - \frac{1}{k!} (\sigma - s)^k u^{(k)}(s) \right].$$

On pose  $\sigma = s + h$  et on calcule la transformée de Fourier de cette expression pour  $h$  fixé ; ce qui donne :

$$\frac{k!}{h^{k+1}} \left[ e^{2\pi i h \xi} - 1 - \dots - \frac{1}{k!} (2\pi i h \xi)^k \right] \widehat{u}(\xi).$$

Et en appliquant le théorème de Plancherel :

$$\begin{aligned} & \iint \left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \frac{u(\sigma) - u(s)}{\sigma - s} \right|^2 ds d\sigma \\ &= \iint \left| \frac{k!}{h^{k+1}} \left[ e^{2\pi i h \xi} - 1 - \dots - \frac{1}{k!} (2\pi i h \xi)^k \right] \widehat{u}(\xi) \right|^2 dh d\xi \\ &= \int |(2\pi i \xi)^{k+1} \widehat{u}(\xi)|^2 |2\pi \xi|^{-1} d\xi \int \left| k! \frac{e^{ix} - 1 - \dots - \frac{1}{k!} (ix)^k}{x^{k+1}} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

On calcule facilement :

$$\int \left| \frac{e^{ix} - 1}{x} \right|^2 dx = 2\pi.$$

Par récurrence sur  $k$ , l'intégrale

$$\int \left| k! \frac{e^{ix} - 1 - \dots - \frac{1}{k!} (ix)^k}{x^{k+1}} \right|^2 dx$$

s'y ramène, on trouve qu'elle vaut  $\frac{2\pi}{2k+1}$ , d'où l'égalité du lemme. ■

Du lemme 1, on déduit facilement :

LEMME 2. — Soit  $\Gamma$  une courbe lipschitzienne (avec les notations du § 1), alors si  $\varphi \in \mathcal{V}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R})$ , le noyau  $Z(s, \sigma)$  est de carré intégrable et donc définit un opérateur compact sur  $L^2$ .

Démonstration. — On a :

$$Z(s, \sigma) = \frac{1}{2\pi q} \frac{\partial q}{\partial s},$$

d'où

$$|Z(s, \sigma)|_2 \leq \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1}{q} \right|_{\infty} \left| \frac{\partial q}{\partial s} \right|_2 \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{3} \cos \alpha} \left| \frac{z'(\sigma) - z'(s)}{\sigma - s} \right|_2,$$

d'après le lemme 1. D'autre part,

$$|z'(\sigma) - z'(s)| = |e^{i\varphi(\sigma)} - e^{i\varphi(s)}| \leq |\varphi(\sigma) - \varphi(s)|,$$

d'où

$$|Z(s, \sigma)|_2 \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{3} \cos \alpha} \left| \frac{\varphi(\sigma) - \varphi(s)}{\sigma - s} \right|_2. \quad \blacksquare$$

#### § 4. POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE, EXPRESSION DE $\frac{\partial}{\partial v}$ ET MAJORATION DE $\left\| \left( \frac{1}{2} H + X \right)^{-1} \right\|_{\text{op}}$

On définit le potentiel de simple couche de densité  $g(s)$  sur  $\Gamma$ , pour  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , par :

$$\mathcal{L}g(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int \text{Log} \left| \frac{\zeta - z(\sigma)}{\zeta_0 - z(\sigma)} \right| g(\sigma) d\sigma$$

où  $\zeta_0$  est choisi arbitrairement. C'est une fonction continue sur  $\mathbb{C}$ , harmonique sur le complémentaire de  $\Gamma$ . On note :

$$Sg(s) = \mathcal{L}g(z(s)).$$

On sait (cf. [4]) que la dérivée normale  $\frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{S}g$ , obtenue par passage à la limite dans  $\Omega$ , existe presque partout et vaut :

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{S}g = -\frac{1}{2}g + Yg,$$

où  $Y$  est donné par le noyau  $Y(s, \sigma) = \text{Im } Z(s, \sigma)$ . De même, dans l'ouvert complémentaire de  $\overline{\Omega}$ , dont la normale sortante est  $n = -\nu$ , on a :

$$\frac{\partial}{\partial n} \mathcal{S}g = -\frac{1}{2}g - Yg.$$

Par ailleurs, un rapide calcul montre que :

$$DSg = \frac{1}{2}Hg + Xg$$

où  $X$  est l'opérateur donné par le noyau

$$X(s, \sigma) = \text{Re } Z(s, \sigma).$$

On montre alors :

LEMME 3. — Soit  $\Gamma$  une courbe lipschitzienne avec  $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ , alors l'opérateur  $\frac{1}{2}H + X$  est un isomorphisme sur  $L^2$ .

*Démonstration.* — On déduit du lemme 2 que  $X$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt, donc compact. D'après l'alternative de Fredholm, il nous suffit de montrer que  $\frac{1}{2}H + X$  est injectif. Soit donc  $g \in L^2$  telle que  $\left(\frac{1}{2}H + X\right)g = 0$ , c'est-à-dire  $\frac{d}{ds} \mathcal{S}g(z(s)) = 0$  :  $\mathcal{S}g(\zeta)$  est constante sur  $\Gamma$ , harmonique sur  $\Omega$ , et la fonction maximale  $(\nabla \mathcal{S}g)_*(z(s)) \in L^2(ds)$  (cf. [4]).

Il s'ensuit que  $\mathcal{S}g(\zeta)$  est constante sur  $\Omega$ , d'où  $\frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{S}g = 0$ ; de même  $\frac{\partial}{\partial n} \mathcal{S}g = 0$  et donc  $g = 0$ . ■

Rappelons la définition de la fonction maximale  $(\nabla U)_*$ . Pour  $U$  fonction harmonique sur  $\Omega$ , on pose pour  $\zeta_0 \in \Gamma$  :

$$(\nabla U)_*(\zeta_0) = \sup_{\zeta \in C(\zeta_0)} |\nabla U(\zeta)|,$$

où  $C(\zeta_0) = \zeta_0 + C$  et  $C$  désigne le cône

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > M |x| \},$$

$M$  désignant un réel  $> 0$  fixé tel que  $M > \text{tg } \alpha$ .

Du lemme 3, on déduit immédiatement le résultat suivant :

LEMME 4. — Soit  $\Gamma$  une courbe lipschitzienne avec  $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}$ . Soit  $f(s)$  une fonction donnée telle que  $Df \in L^2$ . Alors le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{dans } \Omega, \\ U(z(s)) = f(s) \end{cases}$$

a une solution unique  $U$  telle que  $(\nabla U)_* \in L^2(ds)$ .

Démonstration. — La solution est donnée, à une constante additive près, par

$$U = \mathcal{S} \left( \frac{1}{2} H + X \right)^{-1} Df. \quad \blacksquare$$

On a ensuite, avec les hypothèses du lemme 4,

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial U}{\partial v} = \left( -\frac{1}{2} + Y \right) \left( \frac{1}{2} H + X \right)^{-1} Df.$$

D'autre part,

$$Df = \left( \frac{1}{2} H + X \right) \left( \frac{1}{2} H + X \right)^{-1} Df, \quad \Lambda = HD \quad \text{et} \quad H^2 = -1,$$

d'où  $\Lambda f = \left( -\frac{1}{2} + HX \right) \left( \frac{1}{2} H + X \right)^{-1} Df$  et finalement, on obtient l'expression de  $\frac{\partial}{\partial v}$  :

$$\frac{\partial}{\partial v} - \Lambda = (Y - HX) \left( \frac{1}{2} H + X \right)^{-1} D.$$

LEMME 5. — Si  $\Gamma$  est une courbe lipschitzienne avec  $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}$ , on a

$$\left\| \left( \frac{1}{2} H + X \right)^{-1} \right\|_{\text{op}} \leq 2 \text{Co}(\alpha)$$

et

$$\left\| Y \left( \frac{1}{2} H + X \right)^{-1} \right\|_{\text{op}} \leq \text{Co}(\alpha)$$

où

$$\text{Co}(\alpha) = \text{tg } \alpha + \sqrt{\text{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}},$$

on rappelle que  $\varphi$  vérifie  $|\varphi|_{\infty} \leq \alpha < \pi/2$ .

*Démonstration.* — Soit  $h \in L^2$ , posons  $g = \left(\frac{1}{2}H + X\right)^{-1} h$  et  $U = \mathcal{L}g$ .  
On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial v} &= -\frac{1}{2}g + Yg, \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= -\frac{1}{2}g - Yg.\end{aligned}$$

D'où  $-g = \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial n}$  et  $2Yg = \frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial U}{\partial n}$ .

D'après l'inégalité de Payne-Weinberger (cf. [4]), on a :

$$\left|\frac{\partial U}{\partial v}\right|_2 \leq \text{Co}(\alpha) |DSg|_2 \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|_2 \leq \text{Co}(\alpha) |DSg|_2.$$

D'où  $|g|_2 \leq 2 \text{Co}(\alpha) |h|_2$  et  $|Yg|_2 \leq \text{Co}(\alpha) |h|_2$ . ■

Remarquons que la condition  $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}$ , qui n'est pas nécessaire pour obtenir les résultats de ce paragraphe (ceci peut se faire par les techniques de [4] sous la seule hypothèse que  $\Gamma$  est une courbe lipschitzienne), simplifie la justification de ces propriétés grâce à la compacité de  $X$  et suffit à notre propos.

Nous considérerons maintenant deux fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  convenables :  $\varphi_i \in H^2$ ,  $|\varphi_i|_\infty \leq \alpha < \pi/2$ ; et nous noterons  $z_i, K_i, q_i, Z_i, X_i, Y_i$  et  $\frac{\partial}{\partial v_i}$  les fonctions, noyaux et opérateurs  $z, K, q, Z, X, Y$  et  $\frac{\partial}{\partial v}$  correspondants. Nous noterons  $R_j$  le maximum des normes  $L^2$  de  $\varphi_1^{(j)}$  et  $\varphi_2^{(j)}$ ,  $j=0, 1, 2$ ;  $\rho_j = |\varphi_1^{(j)} - \varphi_2^{(j)}|_2$ , et  $R = \max_j R_j$ . En norme  $H^2$ , on a  $\|\varphi_1\| \leq R$ ,  $\|\varphi_2\| \leq R$  et  $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = \max_j \rho_j$ .

### § 5. MAJORATIONS DE $|z_1^{(k)} - z_2^{(k)}|_2$ , $|z_1^{(k)} - z_2^{(k)}|_\infty$ ET $|q_1 - q_2|_\infty$

Nous commençons par majorer  $z'_1 - z'_2$  et ses dérivées en normes  $L^2$  et  $L^\infty$ .

On a

$$z'_1 - z'_2 = e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}$$

donc  $|z'_1 - z'_2| \leq |\varphi_1 - \varphi_2|$ .

De même

$$z''_1 - z''_2 = i\varphi'_1(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}) + i(\varphi'_1 - \varphi'_2)e^{i\varphi_2},$$

donc  $|z''_1 - z''_2| \leq |\varphi'_1| |\varphi_1 - \varphi_2| + |\varphi'_1 - \varphi'_2|$ .

Enfin,

$$z_1''' - z_2''' = i\varphi_1''(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}) + i\varphi_1'(z_1'' - z_2'') + i(\varphi_1'' - \varphi_2'')e^{i\varphi_2} - (\varphi_1' - \varphi_2')\varphi_2'e^{i\varphi_2},$$

d'où

$$|z_1''' - z_2'''| \leq |\varphi_1''| |\varphi_1 - \varphi_2| + |\varphi_1'|^2 |\varphi_1 - \varphi_2| + |\varphi_1'| |\varphi_1' - \varphi_2'| + |\varphi_1'' - \varphi_2''| + |\varphi_1' - \varphi_2'| |\varphi_2'|.$$

Prenant les normes  $L^2$  et  $L^\infty$  et utilisant l'inégalité :

$$|u|_\infty \leq |u|_2^{\frac{1}{2}} |u'|_2^{\frac{1}{2}},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} |z_1' - z_2'|_2 &\leq \rho_0 \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \\ |z_1' - z_2'|_\infty &\leq \sqrt{\rho_0\rho_1} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \\ |z_1'' - z_2''|_2 &\leq \sqrt{R_1R_2\rho_0} + \rho_1 \leq (R + 1)\|\varphi_1 - \varphi_2\|, \\ |z_1'' - z_2''|_\infty &\leq \sqrt{R_1R_2\rho_0\rho_1} + \sqrt{\rho_1\rho_2} \leq (R + 1)\|\varphi_1 - \varphi_2\|, \\ |z_1''' - z_2'''|_2 &\leq R_2\sqrt{\rho_0\rho_1} + R_1R_2\rho_0 + \sqrt{R_1R_2\rho_1} + \rho_2 + \sqrt{R_1R_2\rho_1} \\ &\leq (R^2 + 3R + 1)\|\varphi_1 - \varphi_2\|. \end{aligned}$$

Remarquant que :

$$q(s, \sigma) = \int_0^1 z'(s + \lambda(\sigma - s))d\lambda,$$

on a aussi

$$|q_1 - q_2|_\infty \leq |\varphi_1 - \varphi_2|_\infty \leq \sqrt{\rho_0\rho_1} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

§ 6. MAJORATION DE  $\|Z_1 - Z_2\|_{op}$

On a :

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_2 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial s} - \frac{1}{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial s} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{q_2 - q_1}{q_1q_2} \frac{\partial q_1}{\partial s} + \frac{1}{q_2} \frac{\partial}{\partial s} (q_1 - q_2) \right). \end{aligned}$$

Remarquons que  $\left| \frac{1}{q_i} \right|_\infty \leq \frac{1}{\cos \alpha}$ . Prenant la norme dans  $L^2(ds \otimes d\sigma)$  et appliquant le lemme 1, on obtient :

$$|Z_1 - Z_2|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{6\pi \cos^2 \alpha}} |q_1 - q_2|_\infty |\Lambda^{\frac{1}{2}} z_1'|_2 + \frac{1}{\sqrt{6\pi \cos \alpha}} |\Lambda^{\frac{1}{2}} (z_1' - z_2')|_2.$$

En remarquant que  $|\Lambda^{\frac{1}{2}}z'_1|_2 \leq |\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi_1|_2$  et que pour  $u \in H^1$ , on a :

$$|\Lambda^{\frac{1}{2}}u|_2 \leq |u|_{\frac{1}{2}} |u'|_{\frac{1}{2}},$$

on obtient finalement :

PROPOSITION 1. —  $\|Z_1 - Z_2\|_{\text{op}} \leq c_1(\mathbf{R}, \alpha) \|\varphi_1 - \varphi_2\|$ .

### § 7. MAJORATION DE $\left| \frac{\partial f}{\partial v_1} - \frac{\partial f}{\partial v_2} \right|_2$

Reprenons la formule :

$$\frac{\partial}{\partial v} - \Lambda = (\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{X}) \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} + \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{D},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_1} - \frac{\partial}{\partial v_2} &= (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{H}\mathbf{X}_1) \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} + \mathbf{X}_1 \right)^{-1} \mathbf{D} - (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{H}\mathbf{X}_2) \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} + \mathbf{X}_2 \right)^{-1} \mathbf{D} \\ &= [\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 - \mathbf{H}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)] \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} + \mathbf{X}_1 \right)^{-1} \mathbf{D} + (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{H}\mathbf{X}_2) \left[ \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} + \mathbf{X}_1 \right)^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} + \mathbf{X}_2 \right)^{-1} \right] \mathbf{D}. \end{aligned}$$

En écrivant

$$\left( \frac{1}{2} \mathbf{H} + \mathbf{X}_1 \right)^{-1} - \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} + \mathbf{X}_2 \right)^{-1} = \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} + \mathbf{X}_1 \right)^{-1} (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} + \mathbf{X}_2 \right)^{-1}$$

et en appliquant le lemme 5, on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v_1} - \frac{\partial f}{\partial v_2} \right|_2 \leq 4 \text{Co}(\alpha) \|Z_1 - Z_2\|_{\text{op}} |Df|_2 + 8 \text{Co}(\alpha)^2 \|Z_2\|_{\text{op}} \|Z_1 - Z_2\|_{\text{op}} |Df|_2,$$

c'est-à-dire :

PROPOSITION 2. —  $\left| \frac{\partial f}{\partial v_1} - \frac{\partial f}{\partial v_2} \right|_2 \leq c_2(\mathbf{R}, \alpha) \|\varphi_1 - \varphi_2\| |Df|_2$  pour toute fonction  $f(s)$  telle que  $Df \in L^2$ .

### § 8. ESTIMATION DE $|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)|_2$

On a :

$$A(\varphi_1) - A(\varphi_2) = \mathbf{K}_1 \int_0^s \mathbf{K}_1 \frac{\partial \mathbf{K}_1}{\partial v_1} d\sigma - \mathbf{K}_2 \int_0^s \mathbf{K}_2 \frac{\partial \mathbf{K}_2}{\partial v_2} d\sigma,$$

d'où

$$|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)|_2 \leq |K_1 - K_2|_2 |K_1|_2 \left| \frac{\partial K_1}{\partial v_1} \right|_2 + |K_2|_2 |K_1 - K_2|_2 \left| \frac{\partial K_1}{\partial v_1} \right|_2 \\ + |K_2|_2^2 \left| \frac{\partial}{\partial v_1} (K_1 - K_2) \right|_2 + |K_2|_2^2 \left| \left( \frac{\partial}{\partial v_1} - \frac{\partial}{\partial v_2} \right) K_2 \right|_2.$$

Appliquant la proposition 2 et l'inégalité de Payne-Weinberger, nous obtenons :

PROPOSITION 3. —  $|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)|_2 \leq c_3(\mathbb{R}, \alpha) \|\varphi_1 - \varphi_2\|$ .

### § 9. ÉTUDE DE DZ

L'opérateur DZ est défini, pour une courbe  $\Gamma$  convenable, par le noyau

$$\frac{\partial Z}{\partial s}(s, \sigma) = \frac{1}{2\pi q} \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} - \frac{1}{2\pi q^2} \left( \frac{\partial q}{\partial s} \right)^2.$$

Commençons par étudier le premier terme, on a :

LEMME 6. — Soit  $\Gamma$  une courbe lipschitzienne avec  $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}$  et  $\varphi' \in V^{\frac{1}{2}} \cap L^\infty$ , alors le noyau

$$\frac{1}{2q} \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = \frac{\sigma - s}{z(\sigma) - z(s)} \cdot \frac{z(\sigma) - z(s) - (\sigma - s)z'(s) - \frac{1}{2}(\sigma - s)^2 z''(s)}{(\sigma - s)^3}$$

est de carré intégrable.

Démonstration. — En effet :

$$\left| \frac{1}{2q} \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} \right|_2 \leq \frac{1}{2 \cos \alpha} \left| \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} \right|_2,$$

et le lemme 1 donne

$$\left| \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} \right|_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left| \frac{z''(\sigma) - z''(s)}{\sigma - s} \right|_2,$$

comme

$$|z''(\sigma) - z''(s)| = |\varphi'(\sigma)e^{i\varphi(\sigma)} - \varphi'(s)e^{i\varphi(s)}| \\ \leq |\varphi'(\sigma) - \varphi'(s)| + |\varphi'(s)| |\varphi(\sigma) - \varphi(s)|,$$

il vient

$$|\Lambda^{\frac{1}{2}} z''|_2 \leq |\Lambda^{\frac{1}{2}} \varphi'|_2 + |\varphi'|_\infty |\Lambda^{\frac{1}{2}} \varphi|_2,$$

d'où le résultat. ■



*Remarque.* — Un récent théorème de Y. Meyer [5] relatif aux noyaux singuliers de la forme

$$\frac{1}{y-x} F(W_1, \dots, W_m)$$

où

$$W_k(x, y) = \left( f_k(y) - \sum_{j=0}^{j(k)} \frac{(y-x)^j}{j!} f_k^{(j)}(x) \right) / (y-x)^{j(k)+1},$$

$F$  est  $C^\infty$  et les fonctions  $f_k^{(j(k))}$  sont lipschitziennes, s'applique à notre noyau  $\frac{1}{q} \frac{\partial^2 q}{\partial s^2}$ , qui définit donc un opérateur borné sur  $L^2$ , en fait, dès que  $\Gamma$  est une courbe corde-arc (c'est-à-dire vérifie l'inégalité  $|\sigma - s| \leq \gamma |z(\sigma) - z(s)|$  pour une constante  $\gamma > 0$ ) avec  $z'' \in L^\infty$  (c'est-à-dire  $\varphi' \in L^\infty$ ).

En ce qui concerne le second terme  $\frac{1}{2\pi q^2} \left( \frac{\partial q}{\partial s} \right)^2$ , nous le majorerons en norme  $L^2$  par  $\frac{1}{2\pi \cos^2 \alpha} \left| \frac{\partial q}{\partial s} \right|_\infty \left| \frac{\partial q}{\partial s} \right|_2$ , en remarquant que  $\left| \frac{\partial q}{\partial s} \right|_\infty \leq \frac{1}{2} |\varphi'|_\infty$ .

Ainsi, sous les hypothèses du lemme 6, le noyau  $\frac{\partial Z}{\partial s}$  est de carré intégrable et donc l'opérateur  $DZ$  est un opérateur compact sur  $L^2$ .

#### § 10. MAJORATION DE $\|DZ_1 - DZ_2\|_{op}$

On a :

$$2\pi \left( \frac{\partial Z_1}{\partial s} - \frac{\partial Z_2}{\partial s} \right) = \left( \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \right) \frac{\partial^2 q_1}{\partial s^2} + \frac{1}{q_2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (q_1 - q_2) - \left( \frac{1}{q_1^2} - \frac{1}{q_2^2} \right) \left( \frac{\partial q_1}{\partial s} \right)^2 - \frac{1}{q_2^2} \left[ \left( \frac{\partial q_1}{\partial s} \right)^2 - \left( \frac{\partial q_2}{\partial s} \right)^2 \right],$$

d'où

$$2\pi \left| \frac{\partial Z_1}{\partial s} - \frac{\partial Z_2}{\partial s} \right|_2 \leq \left| \frac{q_2 - q_1}{q_1 q_2} \right|_\infty \left| \frac{\partial^2 q_1}{\partial s^2} \right|_2 + \left| \frac{1}{q_2} \right|_\infty \left| \frac{\partial^2}{\partial s^2} (q_1 - q_2) \right|_2 + |q_1 - q_2|_\infty \left| \frac{q_1 + q_2}{q_1^2 q_2^2} \right|_\infty \left| \frac{\partial q_1}{\partial s} \right|_\infty \left| \frac{\partial q_1}{\partial s} \right|_2 + \left| \frac{1}{q_2^2} \right|_\infty \left( \left| \frac{\partial q_1}{\partial s} \right|_\infty + \left| \frac{\partial q_2}{\partial s} \right|_\infty \right) \left| \frac{\partial}{\partial s} (q_1 - q_2) \right|_2.$$

Mais  $\left| \frac{1}{q_i} \right|_{\infty} \leq \frac{1}{\cos \alpha}$ ,  $|q_1 - q_2|_{\infty} \leq |\varphi_1 - \varphi_2|_{\infty} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|$  et

$$\left| \frac{\partial q_i}{\partial s} \right|_{\infty} \leq \frac{1}{2} |\varphi'_i|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \mathbf{R}.$$

De même, on a vu que :

$$\left| \frac{\partial q_i}{\partial s} \right|_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} |\Lambda^{\frac{1}{2}} z'_i|_2 \leq \sqrt{\frac{2\pi}{3}} |\Lambda^{\frac{1}{2}} \varphi_i|_2 \leq \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \mathbf{R}$$

et

$$\left| \frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2} \right|_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{5}} |\Lambda^{\frac{3}{2}} z''_i|_2 \leq \sqrt{\frac{2\pi}{5}} (|\Lambda^{\frac{3}{2}} \varphi'_i|_2 + |\varphi'_i|_{\infty} |\Lambda^{\frac{1}{2}} \varphi_i|_2) \leq \sqrt{\frac{2\pi}{5}} (\mathbf{R} + \mathbf{R}^2).$$

Le lemme 1 donne également :

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} (q_1 - q_2) \right|_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} |\Lambda^{\frac{1}{2}} (z'_1 - z'_2)|_2 \leq \sqrt{\frac{2\pi}{3}} |z'_1 - z'_2|_{\frac{1}{2}} |z''_1 - z''_2|_{\frac{1}{2}},$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial s^2} (q_1 - q_2) \right|_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{5}} |\Lambda^{\frac{3}{2}} (z''_1 - z''_2)|_2 \leq \sqrt{\frac{2\pi}{5}} |z''_1 - z''_2|_{\frac{1}{2}} |z'''_1 - z'''_2|_{\frac{1}{2}}.$$

Il ne nous reste plus qu'à appliquer les inégalités du § 5 pour obtenir :

**PROPOSITION 4.** —  $\|\mathbf{DZ}_1 - \mathbf{DZ}_2\|_{\text{op}} \leq c_4(\mathbf{R}, \alpha) \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$

### § 11. ESTIMATION DE $|\mathbf{B}(\varphi_1) - \mathbf{B}(\varphi_2)|_2$

On a

$$\mathbf{B}(\varphi) = \mathbf{D} \left( \frac{\partial}{\partial v} - \Lambda \right) \mathbf{D} \varphi$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\varphi_1) - \mathbf{B}(\varphi_2) &= (\mathbf{DY}_1 - \mathbf{HDX}_1) \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} + \mathbf{X}_1 \right)^{-1} \mathbf{D}^2 \varphi_1 \\ &\quad - (\mathbf{DY}_2 - \mathbf{HDX}_2) \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} + \mathbf{X}_2 \right)^{-1} \mathbf{D}^2 \varphi_2; \end{aligned}$$

on procède comme au § 7, en utilisant l'estimation de  $\|\mathbf{DZ}_1 - \mathbf{DZ}_2\|_{\text{op}}$  et celle de  $\|\mathbf{DZ}_1\|_{\text{op}}$  ou  $\|\mathbf{DZ}_2\|_{\text{op}}$  qui s'en déduit en faisant  $\varphi_2 = 0$  ou  $\varphi_1 = 0$ .  
Ce qui donne :

**PROPOSITION 5.** —  $|\mathbf{B}(\varphi_1) - \mathbf{B}(\varphi_2)|_2 \leq c_5(\mathbf{R}, \alpha) \|\varphi_1 - \varphi_2\|$ , et  $|\mathbf{B}(\varphi)|_2 \leq c_6(\mathbf{R}, \alpha)$ .

Les propositions 3 et 5 donnent les inégalités :

(I)  $|\mathbf{F}(\varphi)|_2 \leq \mathbf{C}(\mathbf{R}, \alpha)$

et

$$(II) \quad |F(\varphi_1) - F(\varphi_2)|_2 \leq C_1(\mathbf{R}, \alpha) \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

qui complètent la preuve du théorème.

#### REMERCIEMENTS

Nous remercions Michelle Schatzman et Yves Meyer pour l'amical et stimulant intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

#### RÉFÉRENCES

- [1] P. BARAS, J. DUCHON et R. ROBERT, Évolution d'une interface par diffusion de surface. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **295**, série I, 1982, p. 611-614.
- [2] L. COUDURIER, N. EUSTATHOPOULOS, J. C. GJOURD, P. DESRE, Corrosion intergranulaire du cuivre par le plomb liquide sous l'effet des forces capillaires. *Journal de chimie physique*, t. **3**, 1977, p. 289-294.
- [3] J. DUCHON, R. ROBERT et P. WITOMSKI, Problème de Dirichlet dans l'image bilipschitzienne d'un demi-espace. *Numer. Math.*, t. **36**, 1981, p. 129-149.
- [4] Y. MEYER, *Théorie du potentiel dans les domaines lipschitziens d'après G. C. Verchota*. Séminaire GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ, 1982-1983, n° 5.
- [5] Y. MEYER, Communication personnelle.
- [6] W. W. MULLINS, Grain boundary grooving by volume diffusion. *Transactions of the metallurgical society of AIME*, t. **218**, 1960, p. 354-361.

(Manuscrit reçu le 13 mai 1984)