ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

S. JAFFARD

Propriétés des matrices « bien localisées » près de leur diagonale et quelques applications

Annales de l'I. H. P., section C, tome 7, nº 5 (1990), p. 461-476
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1990__7_5_461_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 7, n° 5, 1990, p. 461-476. *Analyse non linéaire*

Propriétés des matrices « bien localisées » près de leur diagonale et quelques applications

par

S. JAFFARD

C.M.A.P., École polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, France
et C.E.R.M.A., E.N.P.C., La Courtine,
93167 Noisy-le-Grand, France

RÉSUMÉ. — Nous étudions dans cet article deux classes de matrices infinies (matrices dont les coefficients sont à décroissance exponentielle ou polynomiale en s'éloignant de la diagonale). Nous montrons qu'elles possèdent des propriétés du type « calcul symbolique » : L'inversibilité sur l^2 implique que les coefficients de la matrice inverse ont la même propriété de décroissance. De plus, l'inversion est une opération « locale » : Une perturbation des coefficients de A n'est pas ressentie sur son inverse loin de la zone de perturbation. Nous fournissons deux exemples d'applications concernant les propriétés des bases orthonormées d'ondelettes.

Mots clés : Algèbres de matrices, calcul symbolique, inversion de grandes matrices, approximation des inverses, estimations asymptotiques des ondelettes.

ABSTRACT. — In the following paper, two classes of infinite matrices are studied (matrices with exponentially or polynomially decreasing coefficients away from the diagonal). Properties of symbolic calculus type are shown: Inversibility on l^2 implies that the inverse has the same decay property. It is also shown that inversion is a "local" transformation of the matrix: A change in the coefficients is not felt far away from the area

Classification A.M.S. : 15 A 09.

changed. Two applications concerning the properties of orthonormal bases of wavelets are given.

INTRODUCTION

Soit M une grande matrice diagonale par blocs

$$M = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & (M_i) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

et supposons que chaque M_i soit inversible. L'inverse de M est encore une matrice diagonale par blocs et l'inversion est réalisée en inversant chaque M_i. Ainsi, l'éventuelle perturbation de l'une des M_i n'affecte pas le calcul de M^{-1} dans une région de M différente de M_i. Ce type de résultats est en général complètement faux si M n'est pas diagonale par blocs et le but de cet article est de montrer dans quelle mesure ils sont préservés si M est « bien localisée » près de sa diagonale; ce qui signifiera que les coefficients de M ont une décroissance exponentielle ou polynomiale en s'éloignant de la diagonale. Nous verrons que ce type de localisation est préservé par passage à l'inverse et que de grandes perturbations locales des coefficients de M peuvent ne pas affecter ceux de M^{-1} situés suffisamment loin de la perturbation.

Nous allons tout d'abord définir les espaces d'opérateurs sur lesquels nous travaillerons et montrer que ce sont des algèbres. Puis nous montrerons que, si un tel opérateur est inversible sur l^2, son inverse est du même type. Nous démontererons ensuite les propriétés de perturbation que nous avons mentionnées et enfin nous donnerons deux applications au comportement asymptotique des ondelettes.

Certains résultats qui suivent furent annoncés sans démonstration dans [J].

I. LES ALGÈBRES $\mathscr{E}_\gamma$ ET Q_α

Les matrices (ou opérateurs) que nous considérons seront (éventuellement) infinies et indexées par des ensembles assez arbitraires car ce contexte est utile pour certaines applications. Nous décrivons d'abord les espaces $\mathscr{E}_\gamma$.

Soit T un espace métrique discret muni d'une distance d telle que

$$\forall \varepsilon \exists c(\varepsilon) \text{ tel que } \sup_{s \in \mathrm{T}} \sum_{t \in \mathrm{T}} \exp(-\varepsilon d(s, t)) \leqq c(\varepsilon). \tag{1}$$

DÉFINITION 1. — *Une matrice* A *indexée par* T × T *appartient à* $\mathscr{E}_\gamma$ *si ses coefficients* A(*s*, *t*) *vérifient*

$$\forall \gamma' < \gamma, \quad |\mathrm{A}(s, t)| \leqq c'(\gamma') \exp(-\gamma' d(s, t)). \tag{2}$$

Les éléments de $\mathscr{E}_\gamma$ sont des opérateurs bornés sur $l^2(\mathrm{T})$. C'est une application immédiate du lemme suivant :

LEMME 1 (Schur). — *Si une matrice* A *vérifie*

$$\sup_{s \in \mathrm{T}} \sum_{t \in \mathrm{T}} |\mathrm{A}(s, t)| \leqq c \quad \textit{et} \quad \sup_{t \in \mathrm{T}} \sum_{s \in \mathrm{T}} |\mathrm{A}(s, t)| \leqq c,$$

alors A *est bornée sur* $l^2(\mathrm{T})$ *et* $\|\mathrm{A}\| \leqq c$.

Supposons maintenant que l'on ait

$$\sup_{s \in \mathrm{T}} \sum_{t \in \mathrm{T}} |1 + d(s, t)|^{-\mathrm{N}} < \infty \tag{3}$$

(par exemple $\mathrm{T} = \mathbb{Z}^d$ et $\mathrm{N} > d$). Alors

DÉFINITION 2. — *Soit* $\alpha > \mathrm{N}$. *Une matrice* A *appartient à* Q_α *si*

$$|\mathrm{A}(s, t)| \leqq c\,|1 + d(s, t)|^{-\alpha}. \tag{4}$$

Ici encore, en appliquant le lemme de Schur, on voit que A est bornée sur l^2. Montrons maintenant le résultat suivant.

PROPOSITION 1. — *Les espaces* $\mathscr{E}_\gamma$ *et* Q_α *sont des algèbres.*

En effet, supposons que A et B vérifient (2).

Soit $\gamma' < \gamma$ et $\varepsilon = \gamma - \gamma'$. Alors

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{t \in \mathrm{T}} \mathrm{A}(s, t)\,\mathrm{B}(t, u)\Big| &\leqq c \sum_{t \in \mathrm{T}} \exp(-\gamma d(s, t)) \exp(-\gamma' d(t, u)) \\ &\leqq c \sum_{t \in \mathrm{T}} \exp(-\varepsilon d(s, t)) \exp(-\gamma' d(s, u)) \\ &\leqq c' \exp(-\gamma' d(s, u)). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que A et B vérifient (4). On coupe la somme $\sum_{t \in \mathrm{T}} |\mathrm{A}(s, t)\,\mathrm{B}(t, u)|$ en deux parties suivant que $d(s, t) \leqq \frac{1}{2} d(s, u)$ ou $d(t, u) > \frac{1}{2} d(s, u)$. On a

$$\begin{aligned} &\sum_{d(s, t) \leqq (1/2)\, d(s, u)} |1 + d(s, t)|^{-\alpha}\, |1 + d(t, u)|^{-\alpha} \\ &\qquad \leqq \sum_{d(s, t) \leqq (1/2)\, d(s, u)} |1 + d(s, t)|^{-\alpha} \left|1 + \frac{1}{2} d(s, u)\right|^{-\alpha} \leqq c'\, |1 + d(s, u)|^{-\alpha}. \end{aligned}$$

La proposition qui suit est un outil classique en physique mathématique (*voir* [RS] par exemple) et nous n'en fournissons la démonstration que par soucis de complétude.

PROPOSITION 2. — *Si* $A \in \mathcal{E}_\gamma$ *et* A *est inversible comme opérateur sur* $l^2(T)$, $A^{-1} \in \mathcal{E}_{\gamma}$ *pour un certain* γ'.

On peut se restreindre au cas où A est définie positive; en effet

$$A^{-1} = A^*(AA^*)^{-1}$$

et il suffit donc de prouver le résultat pour AA^* qui est définie positive et appartient à $\mathcal{E}_\gamma$.

On a

$$A = \| A \| (\mathrm{Id} - R) \qquad \text{avec} \quad \| R \| = r < 1.$$

Donc

$$A^{-1} = \| A \|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} R_n.$$

On peut majorer le terme (s, t) de R^n par r^n.

D'autre part, $|R(s, t)| \leqq c \exp(-\gamma d(s, t))$.

Soit $\gamma' < \gamma$;

$$|R^n(s, t)| \leqq \sum_{s_1} \dots \sum_{s_{n-1}} c^n \exp(-\gamma d(s, s_1)) \dots \exp(-\gamma d(s_{n-1}, t))$$

$$\leqq \sum_{s_1} \dots \sum_{s_{n-1}} c^n \exp(-\gamma d(s, s_1)) \dots \exp(-\gamma d(s_{n-2}, s_{n-1})) \exp(-\gamma' d(s_{n-1}, t))$$

$$\leqq \sum_{s_1} \dots \sum_{s_{n-2}} c^n A \exp(-\gamma d(s, s_1)) \dots \exp(\gamma' d(s_{n-2}, t))$$

$$\dots$$

$$\leqq c^n A^n \exp(-\gamma' d(s, t)).$$

En prenant, pour le terme $R^n(s, t)$ la meilleure des deux estimations fournies, on obtient le résultat annoncé.

Le résultat analogue dans le cas de la décroissance en puissance est moins immédiat et fait l'objet de la partie qui suit.

Remarque. — L'hypothèse (1) est nécessaire pour démontrer la proposition 2, comme le montrent certains contre-exemples dus à P. Tchamitchian et P. G. Lemarié. Dans ces contre-exemples, les matrices sont indexées par les points du demi-plan supérieur de la forme $(k\, 2^{-j}, 2^{-j})_{j,\, l \in \mathbb{Z}}$, munis de la distance hyperbolique.

(1) n'est plus vérifiée que pour $\varepsilon > \varepsilon_0 > 0$. Les matrices à décroissance exponentielle pour cette distance forment des algèbres si l'exposant est suffisamment grand (*cf.* [M]) mais leurs inverses peuvent ne plus être à décroissance exponentielle (*cf.* [T], [M]).

II. CALCUL SYMBOLIQUE POUR LES ALGÈBRES Q_α

Le but de cette partie est de démontrer la proposition suivante, établie avec Jean-Lin Journé.

PROPOSITION 3. — *Si* A *appartient à* Q_α *et est inversible comme opérateur sur* l^2, A^{-1} *appartient à* Q_α.

Nous introduisons tout d'abord quelques notations.

$\| A \|$ désigne la norme de A comme opérateur $l^2 \to l^2$.

$\| A \|_\alpha = \sup\limits_{k,\, j} | a_{j,\, k} | (1 + d(k, j))^\alpha$

$\| A \|_{l^p} = \sup\limits_{j} [\sum\limits_{k} | a_{j,\, k} |^p]^{1/p} \vee \sup\limits_{k} [\sum\limits_{j} | a_{j,\, k} |^p]^{1/p}$.

On peut, comme précédemment, supposer que $A = I - B$ avec $\| B \| < 1$,

$$A^{-1} = \sum B^n$$

et l'on veut montrer que $\sum \| B^n \|_\alpha < +\infty$.

Pour simplifier les notations, nous supposons que les matrices sont indexées par $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Nous étudions tout d'abord le cas où $1 < \alpha < 2$.

LEMME 1 :

$$\forall p \in]1,2], \quad \| B \|_{l^p} \leqq c_p \| B \|_1^{(2/p)-1} \| B \|_{l^2}^{2-(2/p)}.$$

Démonstration. — On a :

$$(\sum_k | b_{k,\, j} |^p)^{1/p} \leqq [\sum_{| k-j | \leqq N} | b_{k,\, j} |^p]^{1/p} + \left[\sum_{| k-j | > N} \frac{\| B \|_1^p}{| k-j |^p}\right]^{1/p}$$

On a

$$\left[\sum_{k=-N}^{N} | a_k |^p\right]^{1/p} \leqq c\, N^{1/p-1/2} \left[\sum_{k=-N}^{N} | a_k |^2\right]^{1/2}$$

et

$$\sum_{k > N} \frac{1}{k^p} \leqq \frac{c}{N^{p-1}}$$

donc

$$\| B \|_{l^p} \leqq c\, N^{1/p-1/2} \| B \|_{l^2} + c'\, N^{1/p-1} \| B \|_1$$

En prenant N de l'ordre de grandeur de $\left(\dfrac{\| B \|_1}{\| B \|_{l^2}}\right)^2$, on obtient

$$\| B \|_{l^p} \leqq c_p \| B \|_1^{2/p-1} \| B \|_{l^2}^{2-2/p}.$$

D'où le lemme.

Mais $\| B \|_{l^2}$ est le sup des normes des images par B ou B* des vecteurs de la base canonique, donc $\| B \|_{l^p} \leqq c_p \| B \|_1^{2/p-1} \| B \|^{2-2/p}$.

On note $\tilde{b}_{k,j}=(k-j)\,b_{k,j}$. On a alors

LEMME 2. — *Si p est suffisamment proche de* 1, *et si* $\|M\|_{l^p}<\infty$ *et* $\|N\|_{l^p}<\infty$; *alors*

$$|(M\tilde{B}N)_{k,j}|\leqq c\,\|B\|_\alpha\,\|M\|_{l^p}\,\|N\|_{l^p}$$

Démonstration. — On remarque tout d'abord que la matrice $\tilde{B}$ est bornée de l^p dans $l^{p'}$ pour p suffisamment proche de 1, en effet

$$|\tilde{b}_{k,j}|\leqq\frac{c}{|k-j|^{\alpha-1}}$$

La suite $\dfrac{1}{|k|^{\alpha-1}}$ appartient à l^q si $q>\dfrac{1}{\alpha-1}$.

D'après l'inégalité de Young, $\tilde{B}$ sera continue de $l^p\to l^r$ si $\dfrac{1}{r}<\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1$. Si r est tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=1$ $(r=p')$, on en déduit $p<\dfrac{2}{3-\alpha}$.

Si (e_i) est la base canonique de l^2; on a

$$(M\tilde{B}N)_{i,j}=\langle M^t e_j\,|\,\tilde{B}N\,e_j\rangle$$
$$N\,e_j\in l^p \qquad \text{et} \qquad \|N\,e_j\|_{l^p}\leqq\|N\|_{l^p}$$

donc

$$\tilde{B}N\,e_j\in l^{p'} \qquad et \qquad \|\tilde{B}N\,e_j\|_{l^{p'}}\leqq\|B\|_\alpha\,\|N\|_{l^p}$$

$M^t\,e_j\in l^{p'}$; on en déduit par Hölder que

$$|\langle M^t e_j\,|\,\tilde{B}N\,e_j\rangle|\leqq c\,\|M\|_{l^p}\,\|B\|_\alpha\,\|N\|_{l^p}.$$

LEMME 3. — *On a* $\|B^n\|_1\leqq c_R\,R^n$ *pour tout* $R>\|B\|$.

Démonstration. — Soit $b_{n,k,j}$ le coefficient (k,j) de B^n. On a

$$b_{n,k,j}=\sum_{i_1}\dots\sum_{i_{n-1}} b_{k,i_1}\,b_{i_1,i_2}\dots b_{i_{n-1},j}$$

et donc

$$(5)\qquad \begin{aligned}(k-j)\,b_{n,k,j}&=\sum_{i_1}\dots\sum_{i_{n-1}}(k-i_1)\,b_{k,i_1}\quad\dots\quad b_{i_{n-1},j}\\ &\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\ &+\sum_{i_1}\dots\sum_{i_{n-1}}\,b_{k,i_1}\quad\dots\quad(i_{n-1}-j)\,b_{i_{n-1},j}\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 2, on obtient

$$\|B^n\|_1\leqq 2\,c\,\|B\|_\alpha\,\|B^{n-1}\|_{l^p}+c\sum_{i=1}^{n-2}\|B\|_\alpha\,\|B^i\|_{l^p}\,\|B^{n-i-1}\|_{l^p}$$

Le lemme 1 fournit alors

$$\|B^n\|_1 \leqq c\|B\|_\alpha \left[\|B^{n-1}\|_1^{2/p-1}\|B\|^{(n-1)(2-2/p)} + \sum_{i=1}^{n-2} (\|B^i\|_1 \|B^{n-1-i}\|_1)^{2/p-1}\|B\|^{(n-1)(2-2/p)}\right].$$

Q_α étant une algèbre, il existe $R_0 > 0$ tel que

$$|b_{n,k,j}| \leqq \frac{R_0^n}{1+|k-j|}$$

et donc

$$\|B^n\|_1 \leqq R_0^n.$$

Donc on a

$$\|B^n\|_1 \leqq |c_r + n - 1| R_0^{(n-1)(2/p-1)}\|B\|^{(n-1)(2-2/p)}$$

Si $R_1 > R_0^{2/p-1}\|B\|^{2-2/p}$, on voit qu'il existe une constante $c(R_1)$ telle que

$$\|B^n\|_1 \leqq c(R_1) R_1^n.$$

Il suffit alors d'itérer cet argument en observant que $\|B\|$ est le seul point fixe de l'application

$$x \to x^{2/p-1}\|B\|^{2-2/p}$$

pour obtenir le lemme 3.

LEMME 4. — *Il existe* $\gamma > 0$ *tel que* $\forall R > \|B\|$ *ont ait*

$$\|B^n\|_{1+\gamma} \leqq c_R R^n.$$

Démonstration. — Comme dans le lemme 2, la matrice $|k-j|^{1+\gamma}|b_{j,k}|$ est bornée de l^p dans $l^{p'}$ pour un $p > 1$. D'autre part, du lemme 3, on déduit

$$\|B^n\|_{l^p} \leqq c_p(R) R^n \qquad \text{pour} \quad R > \|B\|.$$

On a

$$b_{n,k,j} = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_{n-1}} b_{k,i_1} b_{i_1,i_2} \dots b_{i_{n-1},j}$$

Comme

$$|k-j|^{1+\gamma} \leqq n[|k-i_1|^{1+\gamma} + \dots + |i_{n-1}-j|^{1+\gamma}], \qquad \text{si} \quad \gamma < 1$$

on en déduit

$$|k-j|^{1+\gamma}|b_{n,k,j}| \leqq n\sum_{i_1}|k-i_1|^{1+\gamma}|b_{k,i_1}||b_{n-1,i_1,j}| + \dots + n\sum_{i_l}\sum_{i_{l+1}}|b_{l,k,i_l}||i_l - i_{l+1}|^{1+\gamma}|b_{i_l,i_{l+1}}||b_{n-1-l,i_{l+1},j}| + n\sum_{i_{n-1}}|b_{n-1,k,i_{n-1}}||i_{n-1}-j|^{1+\gamma}|b_{i_{n-1},j}|.$$

On applique alors de nouveau la démonstration du lemme 3, et l'on obtient l'estimation désirée.

LEMME 5. — *Si* $A \in Q_\alpha$ *et est inversible sur* l^2, $A^{-1} \in Q_\gamma$ *pour un* $\gamma > 1$.

Le lemme 5 est une conséquence du lemme 4, car $\|B\| < 1$ et il suffit donc de choisir $R < 1$ pour avoir

$$\left\|\sum B^n\right\|_\gamma \leqq c'_R$$

qui est la majoration désirée.

Démonstration de la proposition 3. — Soit $A \in Q_\alpha$ et inversible sur l^2. L'égalité algébrique suivante est immédiate à vérifier

$$(k-j)\, a_{k,j}^{-1} = -\sum_l \sum_m a_{k,l}^{-1} (l-m)\, a_{l,m}\, a_{m,j}^{-1}$$

$$|a_{k,l}^{-1}| \leqq \frac{c}{|k-l|^{1+\gamma}} \qquad \text{et} \qquad |(l-m)\, a_{l,m}| \leqq \frac{c}{|l-m|^{\alpha-1}}.$$

On en déduit aussitôt

$$|(k-j)\, a_{k,j}^{-1}| \leqq \frac{c}{|k-j|^{\alpha-1}}$$

qui est l'estimation recherchée;

Cela provient du fait que, si $\beta > 1$ et $\varepsilon < 1$,

$$\sum_l \frac{1}{(1+|k-l|)^\beta}\, \frac{1}{(1+|l-j|)^\varepsilon} \leqq \frac{c_{\varepsilon,\beta}}{(|k-j|+1)^\varepsilon} \tag{6}$$

$\left(\text{on coupe la somme en } |l-j| \geqq \frac{1}{2}|k-j| \text{ et } |l-j| < \frac{1}{2}|k-j|\right)$.

Le cas $\alpha \geqq 2$ s'obtient par récurrence sur la partie entière de α à partir des formules (5) et (6). On en déduit

$$|a_{n,k,j}| \leqq \frac{c\, R^n}{|k-j|^\alpha} \qquad \text{pour} \quad R < \|B\| \tag{7}$$

d'où la proposition 3. On vérifie aisément que la même démonstration s'applique si la distance entre les points du réseau vérifie (3), pour $\alpha > N$.

III. LES « LEMMES DE LA FENÊTRE »

Nous allons montrer que, si $A \in \mathscr{E}_\gamma$, ou Q_α, une grande perturbation de A dans une certaine région affecte peu les éléments de A^{-1} qui sont éloignés de la perturbation.

Ce résultat fournit une estimation de l'erreur commise lorsqu'on approxime l'inverse d'une « matrice infinie » par l'inverse d'une sous-matrice finie. Il devrait donc être utile en analyse numérique.

Premier lemme « de la fenêtre »

Si A *et* B *sont deux éléments inversibles de* $\mathscr{E}_\gamma$ *et* $\Omega \subset T$. *Si*

$$|A(s,t)-B(s,t)| \leqq c\exp(-\gamma(d(s,\Omega)+d(t,\Omega))) \tag{8}$$

alors il existe c' *et* γ' *tels que*

$$|A^{-1}(s,t)-B^{-1}(s,t)| \leqq c'\exp(-\gamma'(d(s,\Omega)+d(t,\Omega))).$$

L'ensemble Ω est fixé. Si A et B appartiennent à $\mathscr{E}_\gamma$, nous dirons que $A \sim B$ si (5) est vérifiée pour un certain γ'.

LEMME 6. — *Si* $A \sim B$ *et* $C \sim D$, $AC \sim BD$.

Il suffit de prouver que $A \sim B \Rightarrow AC \sim BC$.

$$\begin{aligned}|(AC-BC)(s,t)| &\leqq \sum_u |A(s,u)-B(s,u)||c(u,t)|\\ &\leqq \sum_u c\exp(-\gamma\, d(s,\Omega))\exp(-\gamma\, d(u,t))\end{aligned}$$

d'après (3.1). Donc

$$|(AC-BC)(s,t)| \leqq c\exp(-\gamma\, d(s,\Omega)) \tag{9}$$

Si $d(s,u) \leqq \frac{1}{4}d(t,\Omega)$ alors $d(s,\Omega) \geqq \frac{1}{4}d(t,\Omega)$ et donc

$$\begin{aligned}\sum |A(s,u)-B(s,u)||c(u,t)| &\leqq c\sum\exp\left(-\frac{\gamma'}{4}d(t,\Omega)\right)\exp(-\gamma\, d(u,t))\\ &\leqq c'\exp\left(-\frac{\gamma'}{4}d(t,\Omega)\right).\end{aligned}$$

Si $d(s,u) \geqq \frac{1}{4}d(t,\Omega)$,

$$\begin{aligned}\sum |A(s,u)-B(s,u)||c(u,t)| &\leqq c\sum\exp\left(-\frac{\gamma}{4}d(t,\Omega)\right)\exp(-\gamma\, d(u,t))\\ &\leqq c'\exp\left(-\frac{\gamma}{4}d(t,\Omega)\right)\end{aligned}$$

En prenant la moyenne géométrique de cette dernière estimation et de (9), on obtient le lemme 6.

A cause de « l'astuce » classique $A^{-1}=(A^*A)^{-1}A^*$ et du lemme 6, on voit que pour démontrer le lemme de la fenêtre, on peut se restreindre au cas où A et B sont des opérateurs auto-adjoints positifs, donc finalement au cas où

$$\begin{array}{ccc} A = I - R \quad \text{et} \quad B = I - S & \text{avec} & \|R\| < 1 \quad \text{et} \quad \|S\| < 1. \\ A^{-1} = \sum R^k & \text{et} & B^{-1} = \sum S^k \\ |R^k(s, t)| \leqq \rho^k & \text{et} & |S^k(s, t)| \leqq \rho^k, \end{array}$$

donc

$$(10) \qquad |R^k(s, t) - S^k(s, t)| \leqq 2\rho^k.$$

Nous allons montrer par récurrence qu'il existe c', γ' tels que

$$(11) \qquad |R^k(s, t) - S^k(s, t)| \leqq c'^k \exp(-\gamma'(d(s, \Omega) + d(t, \Omega))).$$

Cette estimation est vraie pour $k=1$ et $c=c'$. Supposons la vraie pour k. On a

$$(12) \qquad |R^k(s, t)| \leqq c^k \exp(-\gamma\, d(s, t))$$

(utilisé dans la démonstration de la proposition 2).

On a

$$\begin{aligned} &|R^k(s, t) - S^k(s, t)| \\ &\quad = \Big|\sum_u (R^k(s, u) - S^k(s, u)) R(u, t) + S^k(s, u)(R(u, t) - S(u, t))\Big| \\ &\quad \leqq \sum_u c'^k \exp(-\gamma'(d(s, \Omega) + d(u, \Omega)))\, c \exp(-\gamma\, d(u, t)) \\ &\qquad\qquad + \sum_u c^k \exp(-\gamma\, d(s, u))\, c \exp(-\gamma\, |d(u, \Omega) + d(t, \Omega)|). \end{aligned}$$

Soit $\gamma' < \gamma$, $\varepsilon = \gamma - \gamma'$ et $c_0 = \sup_t \sum_u \exp(-\varepsilon\, d(u, t))$

$$\begin{aligned} |R^{k+1}(s, t) - S^{k+1}(s, t)| \leqq\ & c'^k c c_0 \exp(-\gamma'(d(s, \Omega) + d(t, \Omega))) \\ & + c^k c c_0 \exp(-\gamma(d(s, \Omega) + d(t, \Omega))) \end{aligned}$$

d'où (10) à l'ordre $k+1$ en prenant $c' = \sup(2c, 2cc_0)$.

De (10) et (9) on obtient, pour tout k_0,

$$|A^{-1}(s, t) - B^{-1}(s, t)| \leqq \sum_{k=0}^{k_0} c'^k \exp(-\gamma'(d(s, \Omega) + d(t, \Omega))) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \rho^k.$$

Le choix optimal de k_0 fournit l'estimation cherchée (pour un autre γ').

N.B. : Le type de résultats que nous avons montré pour les inverses s'étend immédiatement à d'autres « fonctions » que l'inverse; nous utiliserons notamment le même résultat pour $A^{-1/2}$ (quand A est définie positive).

Nous allons maintenant démontrer le résultat analogue dans le cas de la décroissance polynomiale.

Second lemme « de la fenêtre »

Si A *et* B *sont deux éléments inversibles de* Q_α *et* $\Omega \subset \mathbb{Z}$, *si*

$$|A(s, t) - B(s, t)| \leqq c(1 + d(s, \Omega) + d(t, \Omega))^{-\alpha}, \tag{12}$$

alors il existe c' *tel que*

$$|A^{-1}(s, t) - B^{-1}(s, t)| \leqq c'(1 + d(s, \Omega) + d(t, \Omega))^{-\alpha}.$$

La démonstration de ce lemme suit de façon assez proche celle du premier lemme de la fenêtre. On démontre tout d'abord que ces estimations sont stables par produit, c'est-à-dire que, si l'on note $A \sim B$ quand (12) est vérifiée, alors

LEMME 7. — *Si* $A \sim B$ *et* $C \sim D$, *alors* $AC \sim BD$.

Il suffit de prouver que $A \sim B \Rightarrow AC \sim BC$

$$\begin{aligned} |(AC - BC)(s, t)| &\leqq \sum_u |A(s, u) - B(s, u)| C(u, t)| \\ &\leqq \sum_u c(1 + d(s, \Omega))^{-\alpha} (1 + d(u, t))^{-\alpha} \\ &\leqq c(1 + d(s, \Omega))^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Si $d(u, t) \geqq \dfrac{1}{2} d(t, \Omega)$, alors

$$\begin{aligned} |(AC - BC)(s, t)| &\leqq \sum_u c(1 + d(s, \Omega))^{-\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} d(t, \Omega)\right)^{-\alpha} \\ &\leqq c\left(1 + d(t, \Omega)\right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Si $d(u, t) \leqq \dfrac{1}{2} d(t, \Omega)$, alors $d(u, \Omega) \geqq \dfrac{1}{2} d(t, \Omega)$, et

$$\begin{aligned} |(AC - BC)(s, t)| &\leqq \sum_u c(1 + d(t, \Omega))^{-\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} d(u, t)\right)^{-\alpha} \\ &\leqq c(1 + d(t, \Omega))^{-\alpha} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |(AC - BC)(s, t)| &\leqq c \inf(1 + d(s, \Omega))^{-m}, (1 + d(t, \Omega))^{-m} \\ &\leqq' (1 + d(s, \Omega) + d(t, \Omega))^{-m} \end{aligned}$$

d'où le lemme 7. On peut donc, pour démontrer le lemme de la fenêtre, se ramener au cas où A et B sont de la forme $\mathrm{Id} + A_1$ et $\mathrm{Id} + B_1$, avec

$$\|A_1\| \leqq r < 1 \qquad \text{et} \qquad \|B_1\| \leqq r < 1.$$

Notons $a_n(s, t)$ le terme (s, t) de A_1^n et $b_n(s, t)$ le terme (s, t) de B_1^n. D'après l'estimation (7), on a :

$$|a_n(s, t)| + |b_n(s, t)| \leqq cr^n |1 + d(s, t)|^{-\alpha}.$$

$$\begin{aligned}|b_1(s, u) - a_1(s, u)| &\leqq c \inf((1 + d(s, \Omega) + d(u, \Omega))^{-\alpha}, (1 + d(s, u))^{-\alpha}) \\ &\leqq c'(1 + d(s, \Omega) + d(u, \Omega) + d(s, u))^{-\alpha} \\ |B_1^i A_1^{n-i}(u, t)| &\leqq \sum_v |b_i(u, v) a_{n-i}(v, t)| \\ &\leqq cr^n (1 + d(s, t))^{-\alpha}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}&|((\mathrm{Id} + A_1)^{-1} - (\mathrm{Id} + B_1)^{-1})(s, t)| \\ &= \left|\sum_u (b_1(s, u) - a_1(s, u)) \sum_n \sum_{i=0}^{n} B_1^i A_1^{n-i}(u, t)\right| \\ &\leqq c \sum_u \frac{1}{(1 + d(s, \Omega) + d(u, \Omega) + d(s, u))^\alpha} \frac{\sum_n nr^n}{(1 + d(u, t))^\alpha} \\ &\leqq \frac{c}{(1 + d(s, \Omega) + d(t, \Omega))^\alpha}.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant fournir deux exemples d'applications de ces lemmes, concernant le comportement asymptotique des ondelettes.

IV. ESTIMATIONS ASYMPTOTIQUES DES ONDELETTES SUR UN OUVERT

Nous allons tout d'abord rappeler brièvement la méthode de construction des ondelettes sur un ouvert (*cf.* [JM]).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit le B-spline σ par $\hat{\sigma}(\xi) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\sin \xi_i}{\xi_i}\right)^{2m+2}$.

Les espaces de splines emboîtés V_j sont les espaces engendrés par les fonctions $\sigma_{j,k}(x) = 2^{nj/2} \sigma(2^j x - k)$ telles que $\operatorname{supp} \sigma_{j,k} \subset \Omega$. On note Λ_j l'ensemble des $\frac{k}{2^j}$ correspondants.

Une fonction de V_j est déterminée par ses valeurs aux points $\frac{k}{2^j}$. Plus précisément, si $f \in V_j$, il existe c_1 et c_2 telles que

$$c_1 \|f\|_2 \leqq \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} 2^{-nj} |f(\lambda)|^2\right)^{1/2} \leqq c_2 \|f\|_2.$$

Si $f \in V_j$, soit $G(f) = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \langle f | \sigma_{j,k} \rangle \sigma_{j,k}$.

On construit deux bases de V_j; la première est définie par

$$\varphi_{j,k} = G^{-1/2}(\sigma_{j,k}).$$

C'est une base orthonormée. La seconde est définie par

$$L_{j,k} = G^{-1}(\sigma_{j,k}).$$

C'est une base de « splines cardinaux » c'est-à-dire que $L_{j,k}\left(\frac{l}{2^j}\right) = \delta_{k,l}$.

Notons W_j le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1}.

On construit une base orthonormée de W_j en projetant sur W_j les fonctions $L_{j+1,k}$ telles que $\frac{k}{2^{j+1}} \in \Lambda_{j+1} \setminus \Lambda_j$, et en orthonormalisant la base ainsi obtenue par le « procédé d'orthonormalisation de Gram » que nous avons déjà utilisé pour obtenir les $\varphi_{j,k}$. On obtient ainsi les ondelettes $\psi_{j+1,k}$. La réunion de toutes ces ondelettes fournit une base orthonormée de $L^2(\Omega)$.

Si l'on réalisait la même construction avec $\Omega = \mathbb{R}^n$, nous obtiendrions les ondelettes « usuelles », c'est-à-dire que l'on aurait, en notant ces ondelettes sur $\mathbb{R}^n$ $\tilde{\varphi}_{j,k}$ et $\tilde{\psi}_{j,k}$

$$\tilde{\varphi}_{j,k}(x) = 2^{nj/2} \varphi(2^j x - k)$$

$$\tilde{\psi}_{j+1,k} = 2^{nj/2} \psi^{(i)}(2^j x - k) \qquad \text{avec} \quad k = 2k' + i$$

avec $i \in (0, 1)^n$ et i non nul.

Bien sûr, si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, les ondelettes n'ont plus une telle simplicité numérique. Nous allons voir que les ondelettes sont toutefois numériquement très proches des « ondelettes asymptotiques » $\tilde{\varphi}_{j,k}$ et $\tilde{\psi}_{j,k}$, pourvu qu'elles soient centrées suffisamment loin du bord. Plus précisément, on a

PROPOSITION 4. — *Pour tout* α *tel que* $|\alpha| \leqq 2m+1$, *et pour un* $\gamma > 0$,

$$\| \partial^\alpha (\varphi_{j,k} - \tilde{\varphi}_{j,k}) \|_\infty \leqq c\, 2^{((n/2)+\alpha) j} \exp\left(-\gamma 2^j d\left(\frac{k}{2^j}, \partial\Omega\right)\right)$$

$$\| \partial^\alpha (\psi_{j,k} - \tilde{\psi}_{j,k}) \|_\infty \leqq c\, 2^{((n/2)+\alpha) j} \exp\left(-\gamma 2^j d\left(\frac{k}{2^j}, \partial\Omega\right)\right)$$

Nous esquissons la démonstration de cette proposition. Elle est une conséquence immédiate du « lemme de la fenêtre » car, les fonctions splines $\sigma_{j,k}$ à partir desquelles sont construites les fonctions $\tilde{\varphi}_{j,k}$ et $\varphi_{j,k}$ sont les mêmes. La matrice de Gram des $\sigma_{j,k}$ dans le cas de l'ouvert est donc une restriction de la matrice de Gram dans $\mathbb{R}^n$. On prend comme distance sur les indices $d(\lambda, \lambda') = |k - k'|$ et, en appliquant le « lemme de la fenêtre » dans le cas de $G^{-1/2}$ (et non G^{-1}) on obtient aussitôt

$$(13) \qquad \|\varphi_{j,k}-\tilde{\varphi}_{j,k}\|_\infty \leqq c\, 2^{(n/2)j} \exp\left(-\gamma 2^j d\left(\frac{k}{2^j}, \partial\Omega\right)\right).$$

En effet, les $\sigma_{j,k}$ étant à support compact, G est une « matrice bande ». Les estimations sur les dérivées s'obtiennent de la même manière en dérivant la formule donnant $\varphi_{j,k}$ en fonction des $\sigma_{j,k}$.

En appliquant le « lemme de la fenêtre » pour G^{-1}, on obtient des estimations du type (13) pour les fonctions $L_{j,k}$.

Pour l'estimation sur les $\psi_{j,k}$ on montre que les estimations (13) sont conservées par projection sur V_j, puis qu'elles le sont encore par application de l'algorithme de Gram. L'application qui suit nous a été signalée par Yves Meyer.

IV. BASE DE FRANKLIN ET ONDELETTES DE STROMBERG

Dans ce qui suit les notations avec $\tilde{}$ concerneront des fonctions sur $\mathbb{R}$ et les ondelettes de Stromberg et les notations sans $\tilde{}$ l'intervalle [0, 1] et la base de Franklin (*cf.* [M]).

Le problème que résolvent le système de Franklin et les ondelettes de Stromberg est de construire à partir des fonctions continues et affines par morceaux sur les intervalles de la forme $[k\,2^{-j}, (k+1)\,2^{-j}]$ une base orthonormée de $L^2[0, 1]$ [respectivement $L^2(\mathbb{R})$].

On note $T(x)$ la fonction $\sup(0, 1-|x|)$ et V_j (resp. $\tilde{V}_j$) l'espace des fonctions continues, affines par morceaux sur les intervalles $[k\,2^{-j}, (k+1)\,2^{-j}]$ et à support sur [0, 1] (respectivement sur $\mathbb{R}$).

Soit $T_{j,k}=2^{j/2}\,T(2^j x-k)$. On note V_j l'espace engendré par les $(T_{j,k})_{k=\{1,\ldots,2^j-1\}}$ et $\tilde{V}_j$ l'espace engendré par les $(T_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$. Les espaces V_j et $\tilde{V}_j$ sont des espaces emboîtés de fonctions splines. Nous allons construire les deux bases considérées (de Franklin et de Stromberg) par des algorithmes d'orthonormalisation très similaires.

La base de Franklin se construit par la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliquée à la suite $(T_{j,k})$ pour k impair (rangés dans l'ordre lexicographique, j étant l'indice principal). On obtient ainsi une famille de fonctions $\psi_{j,k}$ qui forme une base orthonormée de $L^2([0, 1])$.

La base de Stromberg se construit comme suit. Supposons que nous ayons une base orthonormée de V_j. On la complète en une base orthonormée de V_{j+1} en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la suite $T_{j,k}$ pour k-impair, et en commençant à $k=-\infty$. Cette formulation un peu imprécise signifie que, si l'on note $V_{j+1,k}$ l'espace engendré par V_j et les fonctions $(T_{j,k'})_{k'<k,\, k' \text{ impair}}$, alors $\tilde{\psi}_{j,k}$ est obtenue par projection orthogonale (et normalisation) de $T_{j,k}$ sur le complémentaire

orthogonal de $V_{j,k-2}$ dans $V_{i,k}$. Pour un j fixé, on voit que les procédés d'obtention des fonctions $\psi_{j,k}$ et $\tilde{\psi}_{j,k}$ sont très similaires.

Soient $P_{j,k}$ et $\tilde{P}_{j,k}$ les projections sur $V_{j,k}$ (resp. $\tilde{V}_{j,k}$). Soit $G_{j,k}$ la matrice de Gram des $(T_{j-1,l})$ et $(T_{j,l})_{l\leqq k}$ (id. pour $\tilde{G}_{j,k}$). Alors, la projection d'une fonction f sur $V_{j,k}$ est donnée par

$$P_{j,k}f=\sum_{l}\langle f\mid G_{j,k}^{-1}T_{j-1,l}\rangle T_{j-1,l}+\sum_{l\leqq k}\langle f\mid G_{j,k}^{-1}T_{j,l}\rangle T_{j,l}$$

En notant $d((j,k),(j',k'))=|j-j'|+|k-k'|$, on voit que les matrices G et $\tilde{G}$ sont des « matrices bande » et que leurs coefficients (j_1, k_1, j_2, k_2) sont identiques dès que $k_1\in\{1, \ldots, 2^{j_1-1}\}$ et $k_2\in\{1, \ldots, 2^{j_2-1}\}$. Les hypothèses du « lemme de la fenêtre » sont donc vérifiées, avec pour Ω l'ensemble des (k', j') tels que $k'\pi\notin\{1, \ldots, 2^{j'-1}\}$.

On note

$$\eta_{j,k}=(\mathrm{Id}-P_{j,k})T_{j,k+1}$$

et

$$\tilde{\eta}_{j,k}=(\mathrm{Id}-\tilde{P}_{j,k})T_{j,k+1}$$

On a alors :

$$\|\eta_{j,k}-\tilde{\eta}_{j,k}\|_\infty\leqq c\,2^{j/2}\exp(-\gamma\,2^j\inf(k\,2^{-j},\ 1-k\,2^{-j})).$$

Le système de Franllin est obtenu en appliquant le procédé d'orthonomalisation de Gram-Schmidt aux fonctions $T_{j,l}$. Il fournit la fonction $\eta_{j,k}$ normalisée.

L'ondelette de Stromberg est la fonction $\tilde{\eta}_{j,k}$ normalisée. Les propriétés de localisation de ces deux fonctions (que l'on obtient comme corollaire immédiat de la proposition 2) font que l'on a

$$\|\psi_{j,k}-\tilde{\psi}_{j,k}\|_\infty\leqq c\,2^{j/2}\exp(-\gamma\,2^j\inf(k-2^{-j},\ 1-k\,2^{-j}))$$

L'ondelette de Stromberg est donc « l'asymptotique » du système de Franklin, lorsque les fonctions sont localisées loin du bord.

N.B. : On a le même résultat en partant de splines plus régulières sur [0, 1].

N.B. : On a utilisé dans les deux applications ci-dessus le « lemme de la fenêtre » dans des cas où les deux ensembles d'indices étaient distincts; on se ramène au cas dans lequel le lemme est écrit en « complétant » les matrices finis par des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs, de façon à ce que les deux ensembles d'indices soient les mêmes.

Signalons enfin que les résultats d'estimation uniforme sur les fonctions du système de Franklin

$$|\tilde{\psi}_{j,k}(x)|\leqq c\,2^{j/2}\exp(-\gamma\,2^j(x-k/2^j))$$

sont une conséquence immédiate des lemmes.