

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

GÉRARD BOURDAUD

## **Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel**

*Annales de l'I. H. P., section C*, tome 10, n° 4 (1993), p. 413-422

<[http://www.numdam.org/item?id=AIHPC\\_1993\\_\\_10\\_4\\_413\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1993__10_4_413_0)>

© Gauthier-Villars, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section C » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpc>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel

par

**Gérard BOURDAUD**

Université Paris-VII, C.N.R.S.-U.A. n° 212, Tour 45-55,  
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

---

**RÉSUMÉ.** — Soit  $F$  une fonction qui opère, par composition à gauche, sur l'espace de Besov — ou de Triebel —  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$  ( $s > 0$ ). On montre que  $F$  est localement lipschitzienne si  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$  s'injecte dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , globalement lipschitzienne sinon. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour  $0 < s < 1$ .

**ABSTRACT.** — Let  $F$  be a function which acts, via left composition, on the Besov — or Triebel — space  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$  ( $s > 0$ ). We prove that  $F$  is locally Lipschitz, if  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$  is imbedded into  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , and globally Lipschitz if not; these conditions are necessary and sufficient when  $0 < s < 1$ .

---

## 1. INTRODUCTION

Dans deux articles récents — dont l'un en collaboration avec Dalila Kateb ([BK1], [B3]), on a caractérisé les fonctions qui opèrent, par composition à gauche, sur l'espace de Besov  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  et sur l'espace de Triebel-Lizorkin  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , pour tout  $s \in ]0, 1[$ .

---

*Classification A.M.S.* : 46 E 35.

Nous nous proposons de revenir sur ces résultats, avec deux objectifs : (i) simplifier et unifier les démonstrations, (ii) montrer que les conditions de Lipschitz sont encore nécessaires pour  $s \geq 1$  ; ce résultat, nous l'avons déjà obtenu pour l'espace de Sobolev  $W^{m,p}$  ( $m$  entier,  $m \geq 2$ ), mais d'une manière fort laborieuse (voir notamment le paragraphe 6 de [B2]).

Précisons d'abord nos notations. On suppose  $q \in [1, +\infty]$ ,  $p \in [1, +\infty]$  ( $p < +\infty$ , dans le cas des espaces de Triebel) et, sauf précision contraire (voir le lemme 8),  $s > 0$  ; on note  $m$  le premier entier tel que  $m > s$  ;  $C$  désignera une constante positive, ne dépendant que de  $s, n, p, q$  et des fonctions auxiliaires  $\varphi$  et  $\omega$  ; la valeur de  $C$  peut changer d'une occurrence à l'autre.  $\Delta_h$  est l'opérateur de différence finie :

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Le nombre  $q$  jouant un rôle secondaire,  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$  désignera indifféremment l'espace de Besov  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  ou l'espace de Triebel  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  (voir [T1]) ; pour  $s$  entier,  $E_1^s(\mathbb{R}^n)$  et  $E_\infty^s(\mathbb{R}^n)$  désigneront aussi, respectivement, les espaces de Sobolev  $W^{s,1}(\mathbb{R}^n)$  et  $W^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$  qui, rappelons-le, ne sont ni des espaces de Besov, ni des espaces de Triebel. Quand il n'y a pas de risque de confusion, on note  $\|f\|$  la norme de  $f$  dans  $E_p^s$ . L'introduction du nombre  $\rho = (n/p) - s$  est justifiée par l'importante estimation

$$\|f(\cdot/\lambda)\| \leq \lambda^\rho \|f\| \quad (\forall \lambda \in ]0, 1]); \quad (1)$$

cette inégalité est vérifiée seulement pour  $s > 0$  ; nous verrons ultérieurement ce qu'il advient quand  $s = 0$  (lemme 8).

$E_p^s(\mathbb{R}^n)$  est qualifié de *sur-critique* s'il s'injecte dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , de *sous-critique* dans le cas contraire ; voici la liste *exhaustive* des espaces sur-critiques :

- (i)  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ , pour  $s > n/p$ ,
- (ii)  $B_{p,1}^{n/p}(\mathbb{R}^n)$ , pour  $p \in [1, +\infty]$  ([T1]),
- (iii)  $F_{1,q}^1(\mathbb{R}^n)$ , pour  $q \in [1, +\infty]$  ([J]),
- (iv)  $W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$  ;

en fait tous ces espaces s'injectent dans  $B_{\infty,1}^0(\mathbb{R}^n)$ , lui-même sous-espace de  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

THÉORÈME. — Soit  $H : C \rightarrow C$ , une fonction opérant, par composition à gauche, sur l'espace  $E_p^s$ . Alors :

- (i)  $H$  est lipschitzienne, si  $E_p^s$  est sous-critique ;
- (ii)  $H$  est localement lipschitzienne, si  $E_p^s$  est sur-critique.

En combinant le théorème avec les caractérisations de  $E_p^s$  au moyen de l'opérateur de différence finie (voir [T2]), on obtient le

COROLLAIRE. — Soit  $s \in ]0, 1[$  ( $s = 1$ , dans le cas où  $E_p^s$  est l'espace de Sobolev  $W^{1,p}$ ) et  $p < +\infty$  ; alors une condition nécessaire et suffisante pour

que  $H$  opère sur  $E_p^s$  est :

- (i)  $H$  lipschitzienne et  $H(0)=0$ , dans le cas sous-critique ;
- (ii)  $H$  localement lipschitzienne et  $H(0)=0$ , dans le cas sur-critique.

Le corollaire s'étend évidemment au cas  $p = +\infty$  : il suffit d'ignorer la condition  $H(0)=0$ . En fait, c'est une version plus forte du théorème que nous prouverons : à une exception près (le cas  $s=1/p$ , en dimension 1), dès que  $H$  envoie  $E_p^s$  dans  $B_{p,\infty}^s$ ,  $H$  est lipschitzienne (resp. localement lipschitzienne).

Le théorème n'est évidemment qu'un premier pas vers une description complète du calcul fonctionnel dans  $E_p^s$ , pour  $s > 1$ , analogue à celle obtenue pour les espaces de Sobolev  $W^{m,p}$  [B2] ; on montre en effet aisément qu'il existe alors des fonctions lipschitziennes qui n'opèrent pas sur  $E_p^s$ . En outre ([R], [B4]) le calcul fonctionnel est trivial dans la « zone interdite »  $1 + (1/p) \leq s < n/p$ . Dans les bons cas, autrement dit pour  $1 \leq s < 1 + (1/p)$  et pour  $s \geq n/p$ , on dispose de conditions suffisantes, vérifiées notamment si  $H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et  $H(0)=0$ , pour que la fonction  $H$  opère sur  $E_p^s$  (voir [BM], [BK2], [MC]) ; malheureusement, aucune de ces conditions n'est nécessaire.

## 2. PREUVE DU THÉORÈME : LE CAS SOUS-CRITIQUE

Nous commencerons par vérifier que l'opérateur de composition est, en un sens faible, borné :

LEMME 1. — Soit  $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , une fonction s'annulant à l'origine telle que, pour tout  $f \in E_p^s$ , on ait  $H \circ f \in B_{p,\infty}^s$ . Alors il existe des nombres  $M > 0$  et  $\delta > 0$  tels que l'implication

$$\|f\| \leq \delta \Rightarrow \|H \circ f\|_{B_{p,\infty}^s} \leq M, \tag{2}$$

soit vérifiée par toute fonction portée par le cube unité  $Q = [-1/2, +1/2]^n$ .

Preuve. — Nous allons montrer une propriété apparemment plus faible : l'existence d'un cube  $R$  et de nombres  $\delta$  et  $M$  tels qu'on ait (2) pour toute fonction portée par  $R$ . L'invariance de nos espaces par dilatations et translations donnera aussitôt la propriété annoncée.

Supposons, au contraire, que, pour tout cube  $R$  et tous nombres  $M$  et  $\delta$ , on puisse trouver une fonction  $f$ , portée par  $R$ , telle que  $\|f\| \leq \delta$  et  $\|H \circ f\|_{B_{p,\infty}^s} \geq M$ .

Donnons-nous une suite  $R_j$  de cubes disjoints et des fonctions  $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telles que  $\varphi_j(x) = 1$  sur  $(1/2)R_j$  et  $\varphi_j(x) = 0$  hors de  $R_j$ . Désignons par  $M_j$  la norme de l'opérateur  $f \rightarrow f\varphi_j$ , agissant sur  $B_{p,\infty}^s$ , et choisissons des fonctions  $f_j$  telles que

$$\text{Supp } f_j \subset (1/2)R_j, \quad \|f_j\| \leq 2^{-j}, \quad \|H \circ f_j\|_{B_{p,\infty}^s} \geq jM_j.$$

Alors la fonction  $f = \sum_{j \geq 0} f_j$  appartient à  $E_p^s$  et  $(H \circ f) \varphi_j = H \circ f_j$ ; il vient alors

$$j M_j \leq \| (H \circ f) \varphi_j \|_{B_{p, \infty}^s} \leq M_j \| H \circ f \|_{B_{p, \infty}^s},$$

ce qui est absurde.

LEMME 2. — Dans le cas sous-critique, il existe une suite  $(\theta_v)_{v \geq 1}$  de fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ , portées par  $Q$ , telles que  $\theta_v(x) = 1$  sur le cube  $2^{-v}Q$  et  $\lim_{v \rightarrow \infty} \|\theta_v\| = 0$ .

Preuve. — Donnons-nous une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\varphi(x) = 1$  sur  $Q$  et  $\varphi(x) = 0$  hors de  $2Q$ .

Le cas  $s < n/p$  est très simple: on pose  $\theta_v(x) = \varphi(2^v x)$ ; l'estimation  $\|\theta_v\| \leq 2^{-vp} \|\varphi\|$  permet de conclure.

Supposons maintenant  $s = n/p$  et posons

$$\theta_v(x) = v^{-1} \sum_{1 \leq j \leq v} \varphi(2^j x);$$

on a aussitôt  $\theta_v(x) = 0$  hors de  $Q$  et  $\theta_v(x) = 1$  sur  $2^{-v}Q$ .

Pour estimer les normes des  $\theta_v$ , on fait appel à la théorie « moléculaire » des espaces de Besov et de Triebel, telle qu'elle est développée par Frazier et Jawerth. Si  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , il existe une constante  $C = C(f, s, p, q, n) > 0$  telle que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}^n$  et tout  $j \geq 0$ , la fonction  $x \rightarrow C 2^{j p} f(2^j x - k)$  soit une molécule de  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$  (dans le cas  $s > 0$ , qui seul nous intéresse ici, il n'est pas nécessaire de supposer que  $f$  a des moments nuls); les théorèmes 3.1 de [FJ1] et 5.3 de [FJ2] s'écrivent alors

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{j, k} 2^{j p} f(2^j(\cdot) - k) \right\|_{B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \left( \sum_{j \geq 0} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_{j, k}|^p \right)^{1/q} \right), \\ & \left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{j, k} 2^{j p} f(2^j(\cdot) - k) \right\|_{F_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq C \left\| \left( \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (|\alpha_{j, k}| 2^{j n/p} \chi(2^j(\cdot) - k))^q \right)^{1/q} \right\|_p, \end{aligned}$$

où  $\chi$  désigne la fonction caractéristique de  $Q$ . En revenant aux  $\theta_v$ , on en déduit aussitôt

$$\|\theta_v\|_{B_{p, q}^{n/p}} \leq C v^{(1/q)-1}.$$

De même

$$\|\theta_v\|_{F_{p, p_1}^{n/p}} \leq C v^{-1} \left\| \sum_{1 \leq j \leq v} 2^{j n/p} \chi_j \right\|_p,$$

où  $\chi_j$  désigne la fonction caractéristique du cube  $2^{-j}Q$ ; pour estimer la norme  $L^p$  qui apparaît au second membre, on pose

$$\begin{aligned} S_k &= (2^{-k}Q) \setminus (2^{-k-1}Q) \quad (k = 1, \dots, v-1), \\ S_v &= 2^{-v}Q; \end{aligned}$$

la fonction  $\sum_{1 \leq j \leq v} 2^{jn/p} \chi_j$  valant constamment  $\sum_{1 \leq j \leq k} 2^{jn/p}$  sur  $S_k$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|\theta_v\|_{F_p^{n/p}} &\leq C v^{-1} \left( \sum_{1 \leq k \leq v} |S_k| 2^{kn} \right)^{1/p} \\ &\leq C' v^{(1/p)-1} \quad (\text{C.Q.F.D.}). \end{aligned}$$

Voici une autre application immédiate des théorèmes de Frazier et Jawerth:

LEMME 3. — *Pour toute fonction  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha_k g((\cdot) - k) \right\| \leq C \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_k|^p \right)^{1/p}.$$

Soit  $H$  une fonction satisfaisant l'hypothèse du lemme 1; on suppose l'espace  $E_p^s$  sous-critique et on se propose de mettre en évidence des constantes  $\sigma > 0$  et  $K > 0$  telles que  $|a - b| \leq \sigma$  entraîne

$$|H(a) - H(b)| \leq K |a - b|,$$

quels que soient  $a$  et  $b$ .

Posons  $\tau = (2m + 1)^{-1}$ ,  $g(x) = \varphi((2m + 1)x)$ , où  $\varphi$  est la fonction plateau introduite dans la preuve du lemme 2, puis

$$f(x) = (b - a) \sum_{|k_j| \leq \mu} g(r^{-1}x - k) + a \theta_v(x);$$

la somme  $\sum_{|k_j| \leq \mu} \dots$  est étendue aux  $k \in \mathbb{Z}^n$  tels que  $|k_j| \leq \mu$  pour tout

$j = 1, \dots, n$ ; les entiers positifs  $v$  et  $\mu$ , ainsi que le nombre  $r \in ]0, 1]$ , seront précisés dans un instant. C'est une version rudimentaire de la fonction  $f$  ( $g$  et  $\theta_v$  étaient alors des fonctions caractéristiques d'intervalles) qui a permis à S. Igari de décrire le calcul fonctionnel dans l'espace de Sobolev  $H^s(\mathbb{R})$  ( $0 < s < 1/2$ ) [I].

Le lemme 2 nous autorise à choisir  $v$  tel que  $|a| \|\theta_v\| \leq \delta/2$ ; le lemme 3 et l'inégalité (1) conduisent à l'estimation

$$\left\| \sum_{|k_j| \leq \mu} g(r^{-1}(\cdot) - k) \right\| \leq C r^\rho \mu^{n/p},$$

de sorte que  $\mu$  et  $r$  devront satisfaire les relations:

$$\delta (3|a - b|)^{-1} \leq C r^\rho \mu^{n/p} \leq \delta (2|a - b|)^{-1}, \tag{3}$$

$$r \mu \leq 2^{-v-2}. \tag{4}$$

La relation (3) entraînera  $\|f\| \leq \delta$ , alors que (4) nous donnera

$$f(x) = b \text{ sur } r(\tau Q + k), \quad f(x) = a \text{ sur } r(Q + k) \setminus r(2\tau Q + k), \tag{5}$$

pour tout  $k$  tel que  $|k_j| \leq \mu$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

Voici comment réaliser ces deux inégalités. Pour  $\rho > 0$ , il suffit de poser

$$r = \{ \delta (2C |a-b|)^{-1} \mu^{-n/p} \}^{1/\rho},$$

alors  $r\mu$  est de l'ordre de grandeur de  $\mu^{1-(n/p\rho)}$ ; l'hypothèse  $s > 0$  entraîne

$$1 - (n/p\rho) < 0$$

et le choix d'un grand entier  $\mu$  permet d'obtenir (4).

Supposons maintenant  $\rho = 0$ ; si  $\delta(3|a-b|)^{-1}$  est assez grand (ce qui s'écrit  $|a-b| \leq \sigma!$ ), il est possible de trouver un entier  $\mu \geq 1$  tel qu'on ait (3); on choisit alors  $r$  assez petit pour avoir (4).

Nous allons achever la démonstration en exploitant convenablement l'inégalité  $\|H \circ f\|_{B_{p,\infty}^s} \leq M$ .

Rappelons que la norme  $B_{p,\infty}^s$  est équivalente à  $\|f\|_p + N_1(f)$ , où

$$N_1(f) = \sup_{h \neq 0} |h|^{-s} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |(\Delta_h)^m f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Posons alors  $Q^+ = [0, 1/2]^n$ ; les relations (5) entraînent

$$(\Delta_{r\tau e_1})^m (H \circ f)(x) = H(b) - H(a)$$

sur le cube  $r(\tau Q^+ + k)$ , pour tout  $k$  tel que  $|k_j| \leq \mu$  ( $j = 1, \dots, n$ ); on en déduit

$$\begin{aligned} r^{sp} \tau^{sp} M^p &\geq \sum_{|k_j| \leq \mu} \int_{r(\tau Q^+ + k)} |(\Delta_{r\tau e_1})^m (H \circ f)(x)|^p dx \\ &= |H(a) - H(b)|^p (2\mu + 1)^n \text{vol}(r\tau Q^+); \end{aligned}$$

autrement dit, grâce à l'encadrement (3),

$$|H(a) - H(b)| \leq CM r^{-\rho} \mu^{-n/p} \leq C' M \delta^{-1} |a-b|.$$

### 3. PREUVE DU THÉORÈME: LE CAS SUR-CRITIQUE

Suivant la démarche de S. Igari [I], on introduit une version locale de l'opérateur de composition :

$$(S_a f)(x) = \varphi(x) (H(a + f(x)) - H(a)).$$

On a encore

$$(S_a f)(x) = \varphi(x) (H(\varphi(x/2)(a + f(x))) - H(a\varphi(x/2)));$$

autrement dit

$$S_a f = \varphi \{ H \circ (a\varphi(\cdot/2) + \varphi(\cdot/2)f) - (H \circ a\varphi(\cdot/2)) \}.$$

Si  $H$  opère sur  $E_p^s$ , il en est de même pour l'opérateur non-linéaire  $S_a$ .

LEMME 4. — Soit  $H: C \rightarrow C$ , une fonction opérant, par composition à gauche, sur  $E_p^s$ . Alors, quel que soit  $a \in C$ , il existe des nombres  $\delta > 0$ ,  $M > 0$  et un cube  $Q' \subset Q$  tels que

$$\|f\| \leq \delta \Rightarrow \|S_a f\| \leq M,$$

pour toute fonction  $f$ , portée par  $Q'$ . La même conclusion est vraie, mutatis mutandis, si  $H$  opère de  $E_p^s$  dans  $B_{p, \infty}^s$ .

Nous omettrons la preuve du lemme 4, essentiellement identique à celle du lemme 1.

LEMME 5. — Soient  $\varepsilon > 0$ , assez petit,  $r > 0$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Si  $f$  est une fonction, appartenant à  $B_{p, \infty}^s(\mathbb{R}^n)$ , telle que

$f(x) = a$  sur  $\xi + rQ$ ,  $f(x) = b$  sur  $(\xi + 2rQ) \setminus (\xi + r(1 + \varepsilon)Q)$ , (6)  
alors la norme de  $f$  dans  $B_{p, \infty}^s(\mathbb{R}^n)$  est minorée par  $C|b - a|r^\rho \varepsilon^{(1/p) - s}$ .

Preuve. — Nous supposons  $\varepsilon \leq 1/2m$ . Dans le cas  $\xi = 0$  et  $r = 1$ , on intègre  $|(\Delta_{\varepsilon e_1})^m f(x)|^p$  sur le pavé  $P_\varepsilon$  défini par

$$(1 - \varepsilon)/2 \leq x_1 \leq 1/2, \quad |x_j| \leq 1/2 \quad (j = 2, \dots, n);$$

il vient

$$N_1(f) \geq \varepsilon^{-s} |a - b| (\text{vol } P_\varepsilon)^{1/p} = 2^{-1/p} |a - b| \varepsilon^{(1/p) - s}.$$

Pour obtenir le cas général, on pose  $f(x) = f_0(r^{-1}(x - \xi))$ , ce qui donne

$$(\Delta_h)^m f(x) = (\Delta_{h/r})^m f_0(r^{-1}(x - \xi)),$$

et donc  $N_1(f) = r^\rho N_1(f_0)$ .

Le lemme 5 est destiné à servir notamment dans le cas  $s = n/p$ , de sorte que, curieusement, il ne nous sera d'aucun secours en dimension 1; un autre énoncé lui est alors substitué:

LEMME 6. — Soit  $\varepsilon > 0$ , assez petit,  $r > 0$  et  $\xi \in \mathbb{R}$ . Si  $f$  est une fonction appartenant à  $B_{p, 1}^{1/p}(\mathbb{R})$  [resp.  $F_{1, \infty}^1(\mathbb{R})$ ], vérifiant (6), alors la norme de  $f$  est minorée par  $C|a - b| |\text{Log } \varepsilon|$ .

Preuve. — Comme dans celle du lemme 5, on se ramène aussitôt à  $\xi = 0$  et  $r = 1$ . La norme  $B_{p, 1}^{1/p}(\mathbb{R})$  est équivalente à  $\|f\|_p + N_2(f)$ , où

$$N_2(f) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |(\Delta_h)^2 f(x)|^p dx \right)^{1/p} |h|^{-1 - (1/p)} dh.$$

Supposons  $\varepsilon \leq h \leq 1/4$  et intégrons  $|(\Delta_h)^2 f(x)|^p$  sur l'intervalle  $[(1 + \varepsilon)/2 - h, 1/2]$ ; on obtient

$$\begin{aligned} N_2(f) &\geq |a - b| \int_{\varepsilon}^{1/4} (h - (\varepsilon/2))^{1/p} h^{-1 - (1/p)} dh \\ &\geq |a - b| 2^{-1/p} \int_{\varepsilon}^{1/4} h^{-1} dh \\ &\geq C|a - b| |\text{Log } \varepsilon|. \end{aligned}$$

La norme  $F_{1, \infty}^1(\mathbb{R})$  est équivalente à  $\|f\|_1 + N_3(f)$ , où

$$N_3(f) = \left\| \sup_{t>0} t^{-1} \int_{[-1, +1]} |(\Delta_{th})^2 f(\cdot)| dh \right\|_1$$

(voir [T2], théorème 2.3.6).

On suppose  $\varepsilon \leq 1/16$  et  $3/8 \leq x \leq 1/2$ ; pour tout  $h \in [1/2, 1]$  et tout  $t \in [1 + \varepsilon - 2x, (1-x)/2]$ , on a  $(\Delta_{th})^2 f(x) = b - a$ , d'où

$$\sup_{t>0} t^{-1} \int_{[-1, +1]} |(\Delta_{th})^2 f(x)| dh \geq (1/2) |b - a| (1 + \varepsilon - 2x)^{-1};$$

en intégrant sur l'intervalle  $[3/8, 1/2]$ , on obtient

$$N_3(f) \geq (1/2) |b - a| \text{Log}(1 + (4\varepsilon)^{-1}).$$

Nous allons établir maintenant les réciproques des lemmes 5 et 6; autrement dit, nous construirons des fonctions plateaux dont les normes sont estimées par  $\varepsilon^{(1/p)-s}$  (resp.  $|\text{Log } \varepsilon|$ ) quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

LEMME 7. — *Il existe une famille de fonctions  $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ( $0 < \varepsilon \leq 1/2$ ) telles que  $\psi_\varepsilon(x) = 1$  sur  $Q$ ,  $\psi_\varepsilon(x) = 0$  hors de  $(1 + \varepsilon)Q$  et*

- (i) *pour  $s > 1/p$ , la norme de  $\psi_\varepsilon$  dans  $E_p^s$  est majorée par  $C \varepsilon^{(1/p)-s}$ ;*
- (ii) *les normes de  $\psi_\varepsilon$  dans  $B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})$  et  $F_{1,q}^1(\mathbb{R})$  sont majorées par  $C |\text{Log } \varepsilon|$ .*

*Preuve.* — Nous construirons  $\psi_\varepsilon$  en dimension 1; en dimension supérieure, il suffira de poser  $\psi_{\varepsilon,n}(x) = \psi_\varepsilon(x_1) \dots \psi_\varepsilon(x_n)$ . On part d'une fonction  $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^+$ , portée par  $[0, 1]$ , telle que  $\int \omega(x) dx = 1$  et on pose

$$\omega_\varepsilon(x) = 2\varepsilon^{-1} \{ \omega(-\varepsilon^{-1}(2x+1)) - \omega(\varepsilon^{-1}(2x-1)) \};$$

la fonction  $\psi_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^x \omega_\varepsilon(t) dt$  est alors portée par  $|x| \leq (1 + \varepsilon)/2$  et vaut 1 pour  $|x| \leq 1/2$ .

Puisque la norme  $L^p$  de  $\psi_\varepsilon$  est majorée par  $3^{1/p}$ , il nous suffira d'estimer la norme de  $\omega_\varepsilon$  dans l'espace  $E_p^{s-1}$ . La double inclusion

$$B_{1,1}^{s-(1/p)} \subset B_{p,1}^{s-1} \subset E_p^{s-1}$$

nous conduit à calculer la norme de  $\omega_\varepsilon$  dans l'espace de Besov minimal  $B_{1,1}^{s-(1/p)}$ . Pour  $s > 1/p$ , l'inégalité (1) s'applique et donne l'estimation annoncée.

Pour  $s = 1/p$ , il s'agit d'estimer la norme de  $\omega_\varepsilon$  dans l'espace  $B_{1,1}^0$ :

LEMME 8. — *Dans l'espace de Besov  $B_{1,1}^0(\mathbb{R}^n)$ , on a*

$$\|f(\cdot/\lambda)\| \leq C \lambda^n |\text{Log } \lambda| \|f\|,$$

*quel que soit  $\lambda \in ]0, 1/2]$ .*

*Preuve.* — Soit  $f = \sum_{j \geq 0} L_j(f)$ , une décomposition de Littlewood-Paley (voir, par exemple, [B1], chapitre VI). Par définition, la norme de  $f$  dans  $B_{1,1}^0$  n'est autre que  $\sum_{j \geq 0} \|L_j f\|_1$ .

Soit  $k$  un entier positif tel que  $2^k \simeq \lambda^{-1}$ . La fonction  $L_j f(\cdot/\lambda)$  ayant son spectre dans une couronne  $|\xi| \simeq 2^{j+k}$  (pour  $j \geq 1$ ), on a classiquement

$$\left\| \sum_{j \geq 1} L_j f(\cdot/\lambda) \right\| \leq C \sum_{j \geq 1} \|L_j f(\cdot/\lambda)\|_1 \leq C \lambda^n \|f\|.$$

Par ailleurs, le spectre de  $L_0 f(\cdot/\lambda)$  est inclus dans une boule  $|\xi| \leq C 2^k$  et les opérateurs  $L_j$  sont uniformément bornés sur  $L^1$ ; on en déduit, pour un certain entier  $c$ ,

$$\begin{aligned} \|L_0 f(\cdot/\lambda)\| &\leq C \sum_{0 \leq j \leq k+c} \|L_j \{L_0 f(\cdot/\lambda)\}\|_1 \\ &\leq C' \sum_{0 \leq j \leq k+c} \|f(\cdot/\lambda)\|_1 \\ &\leq C'' \lambda^n |\text{Log } \lambda| \|f\|. \end{aligned}$$

Cela termine la preuve du lemme 8 et, par conséquent, celle du lemme 7.

Supposons que  $H$  opère sur l'espace sur-critique  $E_p^s$  (En fait, si on excepte les cas de  $B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})$  et  $F_{1,q}^1(\mathbb{R})$ , il nous suffit de supposer que  $H$  envoie  $E_p^s$  dans  $B_{p,\infty}^s$ ).

Le nombre  $a \in \mathbb{C}$  étant désormais fixé, on va mettre en évidence des nombres positifs  $\sigma, \sigma'$  et  $K$  tels que  $|b| \leq \sigma, |b'| \leq \sigma$  et  $|b - b'| \leq \sigma'$  entraînent  $|H(a+b) - H(a+b')| \leq K|b - b'|$ ; cela signifiera que  $H$  est lipschitzienne sur le disque  $|z - a| \leq \sigma$ .

Appliquons le lemme 4 et désignons par  $\xi$  et  $l$  le centre et le demi-côté de  $Q'$ . On pose

$$f(x) = (b' - b) \psi_\varepsilon(r^{-1}(x - \xi)) + b \varphi(l^{-1}(x - \xi));$$

le lemme 7 et l'inégalité (1) conduisent à l'estimation

$$\|\psi_\varepsilon(r^{-1}((\cdot) - \xi))\| \leq C \chi(\varepsilon) r^p \quad (0 < \varepsilon \leq 1/2),$$

où  $\chi(\varepsilon) = \varepsilon^{(1/p)-s}$ , si  $s > 1/p$ , et  $\chi(\varepsilon) = |\text{Log } \varepsilon|$  dans le cas d'égalité.

On commence par astreindre  $b$  à la condition

$$|b| l^p \|\varphi\| \leq \delta/2,$$

qui détermine la constante  $\sigma$ ; puis on se propose de réaliser

$$C |b' - b| r^p \chi(\varepsilon) = \delta/2, \tag{7}$$

$$2r \leq l. \tag{8}$$

L'égalité (7) entraînera  $\|f\| \leq \delta$ , alors que (8) nous donnera

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= b' \quad \text{sur } \xi + rQ, \\ f(x) &= b \quad \text{sur } (\xi + 2rQ) \setminus (\xi + r(1 + \varepsilon)Q) \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

Pour  $\rho < 0$ , on fixe  $\varepsilon = 1/2 m$  et on définit  $r$  par l'égalité (7); la condition (8) détermine alors la constante  $\sigma'$ . Pour  $\rho = 0$ , on pose  $r = l/2$  et on définit  $\varepsilon$ , assez petit, par l'égalité (7) (ce qui impose, là aussi,  $|b - b'| \leq \sigma'$ ). Les relations (9) conduisent à

$$\begin{aligned} S_a f(x) &= H(a + b') \quad \text{sur } \xi + rQ, \\ S_a f(x) &= H(a + b) \quad \text{sur } (\xi + 2rQ) \setminus (\xi + r(1 + \varepsilon)Q). \end{aligned}$$

Il reste à appliquer les lemmes 5 et 6 et, à nouveau, l'égalité (7); il vient

$$\begin{aligned} M \geq \|S_a f\| &\geq C |H(a + b') - H(a + b)| \chi(\varepsilon) r^\rho \\ &= \delta C' |H(a + b') - H(a + b)| |b - b'|^{-1} \quad (\text{C.Q.F.D.}). \end{aligned}$$

#### REMERCIEMENTS

Les observations du referee nous ont permis d'améliorer sensiblement la présentation de l'article. Qu'il trouve ici l'expression de notre gratitude.

#### RÉFÉRENCES

- [B1] G. BOURDAUD, *Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien*, Publ. Math. Paris-VII, vol. 23, 1987.
- [B2] G. BOURDAUD, Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev, *Invent. Math.*, vol. 104, 1991, p. 435-446.
- [B3] G. BOURDAUD, Le calcul fonctionnel dans l'espace de Besov critique, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 116, 1992, pp. 983-986.
- [B4] G. BOURDAUD, La trivialité du calcul fonctionnel dans  $H^{3/2}(\mathbb{R}^4)$ , *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 314, série I, 1992, pp. 187-190.
- [BK1] G. BOURDAUD, et D. KATEB, Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 112, 1991, p. 1067-1076.
- [BK2] G. BOURDAUD, et M. E. D. KATEB, Calcul fonctionnel dans l'espace de Sobolev fractionnaire, *Math. Zeit.*, vol. 210, 1992, pp. 607-613.
- [BM] G. BOURDAUD, et Y. MEYER, Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev, *J. Funct. Anal.*, vol. 97, 1991, p. 351-360.
- [FJ1] M. FRAZIER et B. JAWERTH, Decomposition of Besov Spaces, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 84, 1985, p. 777-799.
- [FJ2] M. FRAZIER et B. JAWERTH, A Discrete Transform and Applications to Distribution Spaces, *J. Funct. Anal.*, vol. 93, 1990, p. 34-170.
- [I] S. IGARI, Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace  $\hat{A}^2$ , *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. 15, 1965, p. 525-536.
- [J] B. JAWERTH, Some Observations on Besov and Lizorkin-Triebel Spaces, *Math. Scand.*, vol. 40, 1977, p. 94-104.
- [MC] Y. MEYER et R. R. COIFMAN, *Ondelettes et Opérateurs*, Tome III (Opérateurs multilinéaires), Hermann, Paris, 1991.
- [R] T. RUNST, Mapping Properties of Non-Linear Operators in Spaces of Triebel-Lizorkin and Besov Type, *Analysis Mathematica*, vol. 12, 1986, p. 313-346.
- [T1] H. TRIEBEL, *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1983.
- [T2] H. TRIEBEL, Local Approximation Spaces, *Z. Anal. Anwendungen*, vol. 8, 1989, p. 261-288.

(Manuscrit reçu le 4 juillet 1991;  
révisé le 6 janvier 1992.)