

Lignes de divergence pour les graphes à courbure moyenne constante

Laurent Mazet

Université Paul Sabatier, MIG Laboratoire Emile Picard, UMR 5580, 31062 Toulouse cedex 9, France

Reçu le 28 septembre 2005 ; reçu en forme révisée le 30 mars 2006 ; accepté le 2 juin 2006

Disponible sur Internet le 19 décembre 2006

Résumé

Cet article est consacré à l'étude de la convergence des suites de solutions de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante H . Nous définissons le lieu de convergence de la suite. Le principal théorème (théorème 8) caractérise le complémentaire de ce lieu de convergence : il montre que ce complémentaire est composé d'arcs de cercle de courbure $2H$. Nous donnons ensuite des résultats permettant d'exploiter ce théorème.

© 2006 Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

This paper is devoted to the study of convergence of sequences of solutions to the constant mean curvature H equation. The convergence domain is defined. The main theorem (Theorem 8) characterizes the complement of this convergence domain: it shows that circle arcs of curvature $2H$ compose this complement. We then give results which allow us to use this theorem.

© 2006 Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

0. Introduction

Le but de ce texte est de présenter une étude de la convergence des suites de solutions de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante :

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)=2H. \quad (\text{CMC})$$

Cette équation aux dérivées partielles elliptique impose au graphe de u d'être une surface à courbure moyenne constante H . Précisons que nous nous intéressons aux solutions classiques de cette équation qui sont de classe C^∞ . Nous étudions donc la convergence des suites (u_n) de solutions de (CMC) définies sur un domaine Ω . La convergence que nous considérons est la convergence C^k sur tout compact pour tout k .

Le cas $H = 0$ correspond au cas des surfaces minimales. Pour l'équation des surfaces minimales, une étude similaire à celle qui va être présentée a déjà été faite dans de précédents articles [6,7].

Dans la suite, nous allons nous restreindre au cas $H > 0$, sachant que le cas négatif en découle si on considère $-u$ au lieu de u .

Adresses e-mail : mazet@picard.ups-tlse.fr, laurent.mazet@lmpt.univ-tours.fr (L. Mazet).

Dans un article de 1972 [11], J. Spruck étudie le problème de Dirichlet attaché à l'équation (CMC). J. Spruck souhaite autoriser les valeurs $+\infty$ et $-\infty$ sur le bord du domaine et ainsi trouver un résultat similaire à celui de H. Jenkins et J. Serrin pour l'équation des surfaces minimales [4]. Pour mener ce travail à bien, J. Spruck s'intéresse à la convergence des suites monotones de solutions de (CMC). Dans ce cas, la suite converge sur une partie du domaine de définition et diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant la monotonie sur le reste du domaine. J. Spruck montre que le domaine où la suite diverge est délimité par des arcs de cercle de courbure $2H$. Il obtient grâce à cela des conditions d'existence similaires à celles du cas des surfaces minimales.

Dans notre article, nous allons montrer que ces arcs de cercle qui délimitent différents comportements dans la convergence de la suite existent aussi lorsque que l'on ôte l'hypothèse de monotonie.

Le principale résultat de l'article (théorème 8) affirme que, si en un point P du domaine la suite $(\nabla u_n(P))$ n'est pas bornée, il en est alors de même pour tout point Q appartenant à un arc de cercle de courbure $2H$ de Ω passant par P . Ces arcs de cercles sont appelés lignes de divergence de la suite (u_n) .

A l'image de l'étude des suites monotones, ce résultat peut être utilisé pour la résolution du problème de Dirichlet associé à (CMC). Il permet aussi d'obtenir des renseignements sur ces solutions [5].

Dans une première partie, nous allons présenter des notations et donner quelques résultats que nous utiliserons dans les parties suivantes.

Dans la deuxième partie, nous donnons la définition du domaine de convergence d'une suite, il s'agit d'une partie du domaine Ω où l'on peut assurer la convergence de (u_n) .

La partie 3 est consacrée à l'étude du complémentaire du domaine de convergence et à la démonstration du théorème 8. Cette partie aboutit à la définition des lignes de divergence de la suite (u_n) .

La dernière partie contient de nombreux résultats qui permettent d'exploiter le théorème 8 pour l'étude de la convergence ou de la divergence d'une suite (u_n) . Essentiellement, nous étudions les conséquences de contraintes sur $\partial\Omega$ par rapport à la convergence de la suite (u_n) .

1. Préliminaires

1.1. Quelques notations

Dans cette section nous allons fixer quelques notations que nous utiliserons par la suite.

Considérons Ω un domaine de \mathbb{R}^2 et P un point du bord de Ω . Comme dans [9,10] et [11], on définit la courbure extérieure de $\partial\Omega$ au point P comme le supremum des courbures en P de toutes les courbes C^2 passant par P et ne rencontrant pas Ω . Le signe de la courbure est fixé par rapport à la normale entrante dans Ω . La courbure extérieure en P est notée $\hat{\kappa}(P)$. Si aucune courbe C^2 n'existe, on pose $\hat{\kappa}(P) = -\infty$. Par exemple, si Ω est convexe, en tout point $P \in \partial\Omega$, $\hat{\kappa}(P) \geq 0$.

A plusieurs reprises, nous serons amenés à considérer des arcs de cercle de rayon $1/(2H)$. Si C est un tel arc de cercle, sauf mention du contraire, la normale à C que l'on considèrera sera toujours celle donnée par le vecteur de courbure. On notera ν cette normale, ainsi le vecteur de courbure sera $2H\nu$ (on rappelle que H est supposé positif). Par exemple, si C est l'arc de cercle paramétré par

$$c : s \longmapsto \left(x_0 + \frac{1}{2H} \cos(2Hs), y_0 + \frac{1}{2H} \sin(2Hs) \right)$$

avec $s \in I$, la normale est $\nu(c(s)) = (-\cos(2Hs), -\sin(2Hs))$.

Par abus de notation, il nous arrivera de voir le vecteur ν comme un vecteur horizontal de \mathbb{R}^3 en lui adjoignant une troisième coordonnée nulle. De même, il nous arrivera aussi de voir les vecteurs horizontaux de \mathbb{R}^3 comme des vecteurs de \mathbb{R}^2 .

1.2. L'équation des surfaces à courbure moyenne constante

Considérons un domaine Ω de \mathbb{R}^2 et u une fonction définie sur Ω . Sur le graphe de u , la normale que l'on considère est celle qui pointe vers le haut. Le graphe de u a alors une courbure moyenne constante H si u satisfait l'équation :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 2H. \tag{CMC}$$

Lorsque l'on étudie les solutions de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante, on introduit la forme différentielle

$$\omega_u = \frac{u_x}{W} dy - \frac{u_y}{W} dx.$$

On utilise les notations suivantes : u_x et u_y désignent les dérivées premières de u et $W = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$. Sur cette forme, l'équation (CMC) se traduit par $d\omega_u = 2H dx \wedge dy$. On constate aisément que $\|\omega_u\| \leq 1$; grâce à cela et à la remarque précédente, on peut définir l'intégrale de ω_u sur des arcs inclus dans le bord du domaine où la fonction u peut ne pas être définie ou dérivable. La forme différentielle ω_u est porteuse de nombreux renseignements sur la solution u (voir par exemple [11]) ; de plus, on a le lemme suivant.

Lemme 1. Soit Ω un domaine du plan et u une solution de (CMC) sur Ω . On considère C un arc du bord de Ω , C est orienté comme faisant partie du bord de Ω et on désigne par s la longueur d'arc le long de C . On a alors les deux propriétés suivantes :

- Si C est un arc de cercle de courbure $\hat{k} = 2H$ et $\omega_u = ds$ le long de C , u prend alors la valeur $+\infty$ le long de C .
- Si C est un arc de cercle de courbure $\hat{k} = -2H$ et $\omega_u = -ds$ le long de C , u prend alors la valeur $-\infty$ le long de C .

Démonstration. Les deux cas se prouvent de façon identique, on ne donne donc que la preuve du premier point. Considérons P un point de C et notons D l'ensemble des points de Ω à distance r de P . Pour r suffisamment petit, le résultat de J. Spruck [11] concernant le problème de Dirichlet pour (CMC) nous dit qu'il existe v une solution de (CMC) sur D qui prend la valeur $+\infty$ sur la partie du bord de D incluse dans C et les mêmes valeurs que u sur le reste du bord de D . La preuve du lemme consiste alors à démontrer que $u = v$ sur D .

Si $u \neq v$, u ne tend pas vers $+\infty$ le long de C , on peut donc supposer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $D' = \{v - u > \eta\}$ soit non-vide. Le bord de D' est composé d'une partie incluse dans l'intérieur de D et éventuellement d'une partie incluse dans C . On a $d(\omega_v - \omega_u) = 0$, donc :

$$\int_{\partial D'} \omega_v - \omega_u = 0.$$

D'après les hypothèses et le lemme 4.3 de [11], le long de $\partial D' \cap C$, $\omega_u = ds = \omega_v$; ainsi l'intégrale sur cette partie du bord est nulle. Par ailleurs, d'après le lemme 2 dans [1], l'intégrale le long du reste du bord de D' est strictement négative car, sur D' , $v \geq u + \eta$. Ceci nous donne une contradiction et donc $u = v$. \square

Remarquons qu'il nous arrivera d'utiliser, par la suite, les notations usuelles suivantes : p et q pour désigner respectivement u_x et u_y les dérivées premières de u et r , s et t pour u_{xx} , u_{xy} et u_{yy} .

1.3. Une famille de solutions

Dans cette partie, nous allons présenter une famille particulière de solutions de (CMC) que nous utiliserons par la suite.

On cherche une solution $u(x, y)$ présentant une symétrie radiale : on suppose que u peut s'écrire $u(x, y) = f(r)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si u est solution de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante, on montre alors que f doit vérifier :

$$\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} = Hr + \frac{t}{r}$$

où t est un paramètre.

Pour que la fonction f existe, il faut et il suffit que $t < 1/(4H)$; on ne va s'intéresser qu'au cas où $t \in]0, 1/(4H)[$. On montre alors que f n'est définie que sur l'intervalle

$$r_1(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4tH}}{2H} \leq r \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 4tH}}{2H} = r_2(t)$$

et est dérivable sur l'intervalle ouvert. On normalise la solution f en posant $f(1/(2H)) = 0$.

Ainsi pour tout $t \in]0, 1/(4H)[$, cette fonction f définit une solution de (CMC) que l'on note h_t sur la couronne $r_1(t) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_2(t)$. Avec la normalisation de f , la fonction h_t est nulle sur le cercle de rayon $1/(2H)$. Le graphe de h_t correspond à un morceau d'onduloïde d'axe vertical.

Tout d'abord, on constate que lorsque t tend vers $1/(4H)$, les fonctions $r_1(t)$ et $r_2(t)$ tendent vers $1/(2H)$.

On constate aussi que la dérivée normale de h_t sur le cercle $r = r_1(t)$ vaut $-\infty$.

Notons C un arc du cercle d'équation $r = 1/(2H)$ orienté dans le sens direct. L'expression de f' montre que :

$$\int_C \omega_{h_t} = \left(\frac{1}{2} + 2Ht \right) \ell(C)$$

où $\ell(C)$ désigne la longueur de l'arc C . Ainsi lorsque t tend vers $1/(4H)$, on obtient :

$$\lim \int_C \omega_{h_t} = \ell(C).$$

2. Le domaine de convergence

On considère un domaine Ω de \mathbb{R}^2 et une suite (u_n) de solutions sur Ω de l'équation (CMC). Notre but est d'étudier la convergence éventuelle de la suite. L'objectif de cette partie est de déterminer le lieu où celle-ci converge.

Pour l'équation des surfaces à courbure moyenne constante, on connaît différents résultats de convergence, le principal est le suivant.

Théorème 2. *Soit (u_n) une suite de solutions de l'équation (CMC) sur un domaine Ω . On suppose que la suite est uniformément bornée sur Ω . Il existe alors une sous-suite qui converge sur Ω vers une solution u de (CMC). La convergence est la convergence C^k sur tout compact de Ω et ce pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Ce théorème est un résultat classique de compacité pour les solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques. Maintenant, les suites que nous allons étudier ne sont pas, en général, uniformément bornées sur le domaine ni même sur tout compact du domaine. Par exemple, si u est une solution de (CMC) et c_n est une suite de réels, la suite $(u + c_n)$ ne converge que si c_n converge. Cette remarque justifie que dans la suite on s'autorisera des translations verticales pour assurer la convergence ; une autre façon de voir cela est de dire que l'on s'intéresse essentiellement à la convergence de la suite des dérivés.

La convergence qui nous intéresse est celle du théorème 2, c'est-à-dire la convergence C^k sur tout compact. Entre autre, ceci implique que, si une suite de solutions de (CMC) converge, la suite de ses gradients ou la suite (W_n) reste uniformément bornée sur tout compact inclus dans Ω . Cette remarque est liée à notre premier résultat.

Lemme 3. *Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 et u une solution de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante sur Ω . On considère P un point de Ω et on note $M = W(P)$. Il existe alors $R > 0$ qui ne dépend que de H , M et de la distance de P au bord de Ω tel que, sur le disque de centre P et de rayon R , la fonction W soit majorée par $2M$.*

Démonstration. Tout d'abord, on note r_0 la distance de P au bord de Ω . La preuve du lemme repose essentiellement sur une estimée des dérivées secondes de u par W qui est due à R. Finn [2]. Dans son article, il démontre (théorème 2) qu'il existe une constante $C(H, d)$ ne dépendant que de H et de la distance d au bord de Ω telle que, pour tout point Q :

$$r^2(Q) + s^2(Q) + t^2(Q) \leq C(H, d)W^6(Q).$$

L'expression de C est complexe car faisant intervenir des intégrales elliptiques. Toutefois, sa régularité nous permet de dire qu'il existe une constante C' ne dépendant que de H et de r_0 telle que, pour tout point Q dans le disque de centre P et de rayon $r_0/2$, on ait :

$$r^2(Q) + s^2(Q) + t^2(Q) \leq C'W^6(Q).$$

Maintenant, on a $\nabla W = (\frac{r p + s q}{W}, \frac{s p + t q}{W})$; ainsi sur le disque $D(P, r_0/2)$ on a $\|\nabla W\| \leq \tilde{C} W^3$ (\tilde{C} ne dépendant que de H et r_0). Considérons z une solution du problème de Cauchy : $z' = \tilde{C} z^3$ et $z(0) = M$; z est définie sur $[0, \frac{1}{2M^2\tilde{C}}[$ par :

$$\frac{1}{M^2} - \frac{1}{z^2} = 2\tilde{C}r.$$

Ainsi, pour $r \leq \frac{3}{8M^2\tilde{C}}$, $z \leq 2M$. Posons $w(r) = W(r, \theta)$ avec (r, θ) les coordonnées polaires centrées en P et un θ fixé. La majoration de ∇W nous dit que $w'(r) \leq \tilde{C} w^3(r)$. On a $w(0) = M = z(0)$ et $w'/w^3 \leq z'/z^3$; ainsi, par intégration, $w \leq z$ et $w(r)$ est majorée par $2M$ sur $0 \leq r \leq 3/(8M^2\tilde{C})$. Donc W est majoré par $2M$ sur le disque $D(P, \min(r_0/2, 3/(8m^2\tilde{C})))$; ceci est le résultat cherché. \square

Nous posons alors la définition suivante.

Définition 4. Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 et (u_n) une suite de solutions de (CMC) sur Ω . On appelle *domaine de convergence* de la suite (u_n) l'ensemble :

$$\mathcal{B}(u_n) = \{Q \in \Omega \mid (W_n(Q))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

Le lemme 3 permet alors de prouver la proposition suivante qui explique la définition ci-dessus.

Proposition 5. Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 et (u_n) une suite de solutions de (CMC) sur Ω . On a les deux propriétés suivantes :

- (1) L'ensemble $\mathcal{B}(u_n)$ est un ouvert de Ω .
- (2) Soit $P \in \mathcal{B}(u_n)$ et C la composante connexe du domaine de convergence contenant P , il existe alors une sous-suite de $(u_n - u_n(P))$ qui converge sur C (rappelons que la convergence que nous considérons est la convergence C^k sur tout compact pour tout k).

Démonstration. La propriété (1) est une conséquence directe du lemme 3. Pour la seconde propriété, on remarque tout d'abord que le lemme 3 implique que la suite (∇u_n) est uniformément bornée sur tout compact inclus dans $\mathcal{B}(u_n)$. Ainsi, sur tout compact inclus dans C , la suite $(u_n - u_n(P))$ est uniformément bornée et le théorème 2 permet de construire une sous-suite qui converge. En considérant une suite exhaustive de compacts de C , un argument de type diagonale de Cantor permet alors de prouver la seconde propriété. \square

La propriété (2) illustre l'utilisation de translations verticales pour assurer la convergence d'une sous-suite. Maintenant la compréhension de la convergence éventuelle d'une suite passe par l'étude du complémentaire du domaine de convergence.

3. Les lignes de divergence

Le but de cette partie est de comprendre ce qui se passe si un point P n'appartient pas au domaine de convergence d'une suite (u_n) de solutions de (CMC). La première étape consiste à traduire le fait que la suite $(W_n(P))$ n'est pas bornée. Tout d'abord, on remarque que la normale au graphe au dessus du point P est donnée par :

$$N_n(P) = \left(\frac{-p_n}{W_n}, \frac{-q_n}{W_n}, \frac{1}{W_n} \right) (P).$$

On rappelle que l'on a choisi la normale qui pointe vers le haut. Comme $(W_n(P))$ n'est pas bornée, il existe une sous-suite de normales qui converge vers un vecteur unitaire horizontal. C'est, en fait, cette situation que l'on va essayer de comprendre. On a un premier résultat.

Proposition 6. Soit (u_n) une suite de solutions de (CMC) définies sur le disque $D(0, r)$; on suppose que la suite des normales au dessus de l'origine $(N_n(0))$ converge vers le vecteur $(1, 0, 0)$. On considère $\alpha \in]0, 1[$ et on note alors D_n

le disque géodésique du graphe de u_n de rayon αr centré en $(0, 0, u_n(0))$. Quitte à translater verticalement D_n , une sous-suite de (D_n) converge vers le disque géodésique de rayon αr centré en $(0, 0, 0)$ du cylindre vertical d'équation

$$\left(x - \frac{1}{2H}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2H}\right)^2.$$

Démonstration. On commence par translater verticalement D_n dans le but de fixer le centre des disques en l'origine. Tout point de D_n est à distance supérieure à $(1 - \alpha)r$ du bord du graphe de u_n . Il existe donc une constante M telle que, pour tout entier n et tout point $Q \in D_n$, la courbure de Gauss en Q soit bornée par M en valeur absolue. La courbure étant bornée, il existe une sous-suite de (D_n) qui converge vers D un disque géodésique de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon αr (voir [8]). D est à courbure moyenne constante H et la normale en son centre est $(1, 0, 0)$. On note N^3 la troisième coordonnée de la normale à D . D étant la limite d'une suite de graphe, N^3 est positive ou nulle ; par ailleurs, N^3 satisfait l'équation suivante :

$$\Delta_D N^3 = -(4H^2 - 2K)N^3.$$

Cette équation est la traduction de l'harmonicité de l'application de Gauss sur une surface à courbure moyenne constante [3]. $(4H^2 - 2K)$ est positif ou nulle ainsi N^3 est sur-harmonique. Or N^3 est nulle en l'origine, elle y atteint donc son minimum ; ceci implique que N^3 est constante et donc $N^3 = 0$. D est donc à courbure moyenne constante H et à normale horizontale : ceci implique que D est inclus dans le cylindre d'équation :

$$\left(x - \frac{1}{2H}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2H}\right)^2. \quad \square$$

Cette proposition a pour conséquence la convergence de la normale vers des vecteurs horizontaux au dessus d'un arc de cercle du domaine.

Proposition 7. Soit (u_n) une suite de solutions de (CMC) définies sur $D(0, r)$; on suppose que $N_n(0)$ converge vers le vecteur $(1, 0, 0)$. Alors pour tout $\alpha \in]0, 1[$, il existe une sous-suite de (N_n) que l'on note $(N_{n'})$ telle que, pour presque tout $s \in [-\alpha r, \alpha r]$, on ait :

$$N_{n'}(c(s)) \longrightarrow (\cos(2Hs), -\sin(2Hs), 0)$$

où c est l'arc de cercle :

$$c(s) = \left(\frac{1}{2H} - \frac{1}{2H} \cos(2Hs), \frac{1}{2H} \sin(2Hs)\right).$$

Démonstration. Considérons $\beta \in]\alpha, 1[$. On applique la proposition 6 aux disques géodésiques $D_n(\beta r)$. Alors, pour une sous-suite que l'on note $(D_{n'}(\beta r))$, ces disques convergent vers D un disque géodésique inclus dans un cylindre vertical de rayon $\frac{1}{2H}$. Ce disque contient, entre autre, la courbe Γ paramétrée par : $s \mapsto (c(s), 0)$ pour $s \in [-\alpha r, \alpha r]$. Sur $D_{n'}$ et D , on définit les formes différentielles $\Omega = dX \wedge N$ où $dX = (dx_1, dx_2, dx_3)$ et N est la normale à la surface ; on note alors Ω_3 la troisième coordonnée de Ω . Remarquons que ces formes différentielles ont une dépendance en n que l'on ne marque pas.

Grâce à la convergence $D_{n'}(\beta r) \rightarrow D$, il existe dans le graphe de $u_{n'}$ une courbe $\Gamma_{n'}$ telle que la suite $(\Gamma_{n'})$ converge de façon lisse vers Γ . Plus précisément, on peut, entre autre, assurer que :

- (1) si $\gamma_{n'}$ est la projection de $\Gamma_{n'}$ sur le plan xy , alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\gamma_{n'}$ est dans un ε voisinage de c pour n' assez grand ;
- (2) $\int_{\Gamma_{n'}} \Omega_3 \rightarrow \int_{\Gamma} \Omega_3$, ceci car la convergence des disques géodésiques est régulière.

On a $\int_{\Gamma} \Omega_3 = -2\alpha r$; ainsi $\lim \int_{\Gamma_{n'}} \Omega_3 = -2\alpha r$. Par ailleurs, $\int_{\Gamma_{n'}} \Omega_3 = \int_{\gamma_{n'}} \omega_{n'}$ où $\omega_{n'}$ est la forme différentielle ω_{u_n} introduite dans la première partie. On note $A = c(-\alpha r)$ et $B = c(\alpha r)$ les extrémités de c et $A_{n'}$ et $B_{n'}$ les extrémités de $\gamma_{n'}$ correspondantes. Considérons $\varepsilon > 0$, pour n' suffisamment grand, $\gamma_{n'}$ est dans le ε -voisinage de c . On peut alors relier A à $A_{n'}$ et B à $B_{n'}$ par des segments de longueur inférieure à ε . On crée ainsi un lacet inclus dans le ε -voisinage

de c et dont la majeure partie est composée de c et $\gamma_{n'}$. Comme $d\omega_{n'} = 2H dx \wedge dy$, l'intégration de $\omega_{n'}$ le long de ce lacet nous donne la majoration suivante :

$$\left| \int_c \omega_{n'} - \int_{\gamma_{n'}} \omega_{n'} \right| \leq \left| \int_{[A, A_{n'}] \cup [B, B_{n'}]} \omega_{n'} \right| + 2H \text{Aire}(\varepsilon\text{-voisinage de } c) = O(\varepsilon).$$

Cette majoration montre que $\lim \int_c \omega_{n'} = \lim \int_{\gamma_{n'}} \omega_{n'} = -2\alpha r$. Maintenant on note N^1 et N^2 les deux premières composantes de la normale. Alors :

$$\int_c \omega_{n'} = \int_{-\alpha r}^{\alpha r} -\cos(2Hs)N_{n'}^1(c(s)) + \sin(2Hs)N_{n'}^2(c(s)) ds.$$

Or, on a $-\cos(2Hs)N_{n'}^1(c(s)) + \sin(2Hs)N_{n'}^2(c(s)) \geq -1$; la convergence de $\int_c \omega_{n'}$ implique donc que

$$-\cos(2Hs)N_{n'}^1(c(s)) + \sin(2Hs)N_{n'}^2(c(s))$$

converge vers -1 dans $\mathbb{L}^1([-\alpha r, \alpha r])$. Ceci implique qu'il existe une sous-suite que l'on indice n'' telle que, pour presque tout s :

$$-\cos(2Hs)N_{n''}^1(c(s)) + \sin(2Hs)N_{n''}^2(c(s)) \longrightarrow -1.$$

Ceci se traduit par :

$$\begin{pmatrix} N_{n''}^1(c(s)) \\ N_{n''}^2(c(s)) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos(2Hs) \\ -\sin(2Hs) \end{pmatrix}.$$

Ce qui achève la démonstration. \square

Les deux propositions précédentes sont des résultats locaux ; on en déduit le résultat global suivant.

Théorème 8. Soit Ω un domaine et (u_n) une suite de solutions de l'équation des surfaces à courbure moyenne constante sur Ω . On considère P un point de Ω et N un vecteur unitaire horizontal. On note C l'arc de cercle inclus dans Ω passant par P et de vecteur de courbure $2HN$ en P . Finalement, pour $Q \in C$, on note $\nu(Q)$ le vecteur unitaire horizontal normal à C tel que $2H\nu(Q)$ soit le vecteur de courbure de C en Q ($\nu(P) = N$).

Si la suite de normale $(N_n(P))$ converge vers N alors, pour tout $Q \in C$, $(N_n(Q))$ converge vers $\nu(Q)$.

Dans la démonstration, nous allons utiliser la terminologie d'extraction : une extraction θ est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . Ainsi toute sous-suite de (u_n) peut s'écrire $u_{\theta(n)}$ avec θ une extraction. Une sous-extraction θ' d'une extraction θ est une extraction s'écrivant $\theta' = \theta \circ \beta$ avec β une extraction.

Démonstration. Tout d'abord on paramétrise l'arc C par longueur d'arc, on définit ainsi $c :]a, b[\rightarrow \Omega$ avec $c(0) = P$. C est orienté de telle façon que $(\nu(c(s)), c'(s))$ soit une base orthonormée directe.

On commence par considérer θ une extraction, on va alors montrer qu'il existe une sous-extraction θ' de celle-ci telle que $N_{\theta'(n)}(Q) \rightarrow \nu(Q)$ pour presque tout $Q \in C$. Pour cela, on note \mathcal{F} l'ensemble des $\varepsilon > 0$ tel qu'il existe θ' sous-extraction de θ avec $N_{\theta'(n)}(Q) \rightarrow \nu(Q)$ pour presque tout $Q \in c(]a + \varepsilon, b - \varepsilon[)$. Comme $N_{\theta(n)}(P) \rightarrow \nu(P)$, la proposition 7 montre que \mathcal{F} est non-vidé. Soit $\varepsilon_0 = \inf \mathcal{F}$, nous allons montrer que $\varepsilon_0 = 0$; pour cela, supposons que $\varepsilon_0 > 0$. On considère $P_1 = c(a + \varepsilon_0)$ et $P_2 = c(b - \varepsilon_0)$. On choisit R tel que les disques $D(P_i, R)$ soient inclus dans Ω . Maintenant, d'après la définition de ε_0 ; il existe $Q_1 = c(s_1)$ avec $s_1 \in]a + \varepsilon_0, a + \varepsilon_0 + R/3[$, $Q_2 = c(s_2)$ avec $s_2 \in]b - \varepsilon_0 - R/3, b - \varepsilon_0[$ et une sous-extraction θ_1 de θ telle que $\lim N_{\theta_1(n)}(Q_i) = \nu(Q_i)$ et $\lim N_{\theta_1(n)}(Q) = \nu(Q)$ pour presque tout $Q \in c(]a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0[)$. On a $D(Q_i, 2R/3) \subset \Omega$, donc on peut appliquer la proposition 7 aux points Q_i avec $\alpha = 3/4$. Il existe alors une sous-extraction θ_2 de θ_1 telle que N_{θ_2} converge vers ν pour presque tout point de $c(s_1 - R/2, s_1 + R/2)$ et $c(s_2 - R/2, s_2 + R/2)$. Or $s_1 - R/2 < a + \varepsilon_0$ et $b - \varepsilon_0 < s_2 + R/2$, donc ε_0 ne peut être strictement positif. ε_0 étant nul, le procédé diagonal de Cantor permet de construire la sous-extraction θ' de souhaitée.

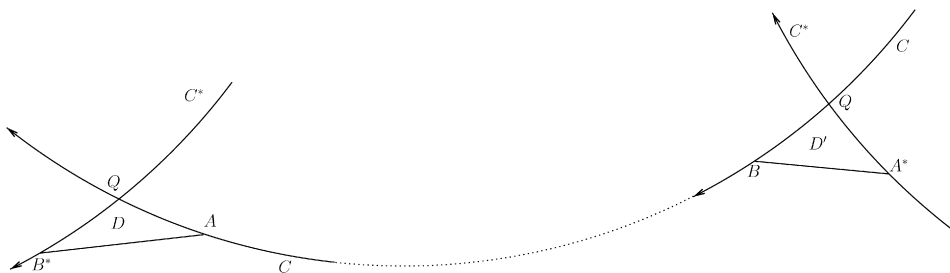


Fig. 1.

Entre autre, il existe des extractions θ telles que $N_{\theta(n)}$ converge vers ν pour presque tout $Q \in C$; considérons θ une telle extraction. On va montrer qu'en fait on a la convergence pour tout Q de C . Soit $Q \in C$ tel que $N_{\theta(n)}(Q)$ ne converge pas vers $\nu(Q)$. Tout d'abord, comme dans tout voisinage de Q , il existe des points de C où $N_{\theta(n)}$ converge vers ν , Q n'appartient pas au domaine de convergence de la suite (u_n) . Ainsi il existe θ^* une sous-extraction de θ telle que $N_{\theta^*(n)}(Q)$ converge vers N^* un vecteur unitaire horizontal différent de ν . A ce vecteur N^* est associé un arc de cercle C^* de rayon $1/(2H)$ passant par Q comme dans l'énoncé du théorème; on définit aussi la normale ν^* le long C^* . D'après ce que l'on vient de montrer, il existe une sous-extraction que l'on notera toujours θ^* telle que $N_{\theta^*(n)}$ converge vers ν^* pour presque tout point de C^* .

Quitte à changer l'origine de c on peut supposer que $c(0) = Q$. On paramétrise C^* par longueur d'arc par c^* avec $c^*(0) = Q$; C^* est orienté comme C par rapport à N^* . Soit $\varepsilon > 0$, on note alors $A = c(-\varepsilon)$ et $B^* = c^*(\varepsilon)$. Les arcs de cercles \widehat{AQ} et $\widehat{QB^*}$ héritent de l'orientation de C et C^* . On considère alors D le domaine bordé par les deux arcs de cercles \widehat{AQ} et $\widehat{QB^*}$ et le segment $[B^*, A]$, pour ε suffisamment petit D est un vrai domaine inclus dans Ω . De même avec $B = c(\varepsilon)$ et $A^* = c^*(-\varepsilon)$, le domaine D' bordé par les arcs de cercles $\widehat{A^*Q}$ et \widehat{QB} et le segment $[B, A^*]$ est inclus dans Ω pour ε petit. Suivant les cas, soit l'orientation AQB^* correspond à celle de ∂D en tant que bord de D soit c'est celle de A^*QB qui correspond à celle de $\partial D'$; on se reporte à la Fig. 1.

On suppose que le premier cas se produit (l'autre cas est identique). On intègre alors $\omega_{\theta^*(n)}$ le long du bord de D :

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AQ}} \omega_{\theta^*(n)} + \int_{\widehat{QB^*}} \omega_{\theta^*(n)} + \int_{[B^*, A]} \omega_{\theta^*(n)} &= \int_{\partial D} \omega_{\theta^*(n)} \\ &= 2H \text{ Aire}(D) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Or d'après la convergence des normales le long de C et C^* , on sait que

$$\lim \int_{\widehat{AQ}} \omega_{\theta^*(n)} = -\varepsilon \quad \text{et} \quad \lim \int_{\widehat{QB^*}} \omega_{\theta^*(n)} = -\varepsilon.$$

Donc, en utilisant $\|\omega_n\| < 1$, un passage à la limite nous donne $2\varepsilon < \ell([A, B^*])$; ceci contredit l'inégalité triangulaire.

On sait donc maintenant que $N_{\theta(n)}(Q)$ converge vers $\nu(Q)$ pour tout $Q \in C$. Soit Q un point de C et supposons que $N_n(Q)$ ne converge pas vers $\nu(Q)$. Pour une extraction α , on peut supposer que $N_{\alpha(n)}(Q)$ converge vers N' un vecteur unitaire différent de $\nu(Q)$. Or $N_{\alpha(n)}(P)$ converge vers $N = \nu(P)$ donc, d'après ce que l'on a déjà démontré, il existe α' une sous-extraction de α telle que $N_{\alpha'(n)}$ converge vers ν pour tout point de C . Entre autre, en Q , on a $N' = \lim N_{\alpha(n)}(Q) = \lim N_{\alpha'(n)}(Q) = \nu(Q)$.

Ceci finit de prouver que N_n converge vers ν pour tout point de C . \square

Il y a différentes conséquences que l'on doit retenir de ce résultat. Tout d'abord, le théorème 8 nous dit que le complémentaire du domaine de convergence $\mathcal{B}(u_n)$ est une union d'arcs de cercle de rayon $1/(2H)$. On pose d'ailleurs la définition suivante.

Définition 9. On considère C un arc de cercle inclus dans Ω de rayon $1/(2H)$ et on note ν la normale à C comme dans le théorème 8. Soit (u_n) une suite de solutions de (CMC) définies sur Ω . Alors s'il existe $(N_{n'})$ une sous suite

des normales aux graphes des u_n qui converge vers ν pour tout point Q de C , on dit que C est une *ligne de divergence* de la suite (u_n) . On dit de plus que la sous-suite d'indice (n') fait apparaître la ligne de divergence C .

Ainsi le complémentaire du domaine de convergence est l'union des lignes de divergence de la suite (u_n) .

Comme on l'a vu dans les démonstrations, la convergence de la suite des normales le long d'une ligne de divergence se traduit sur la convergence des intégrales des 1-formes ω_n . Ainsi, considérons C une ligne de divergence avec, par exemple, $N_{n_k}(Q) \rightarrow \nu(Q)$ pour tout point Q de C . On considère T un sous-arc de C et on suppose T orienté par un vecteur ν tangent en $P \in C$ tel que $(\nu(P), \nu)$ soit une base directe. On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_T \omega_{n_k} = -\ell(T)$$

où $\ell(T)$ désigne la longueur de l'arc T . D'une manière générale, c'est cette caractérisation des lignes de divergence qui est la plus utile.

4. Quelles lignes de divergence existent ?

Les deux sections précédentes nous expliquent les objets que l'on peut introduire lors de l'étude de la convergence d'une suite (u_n) de solutions de (CMC). Toutefois elles ne donnent pas de renseignements qui permettent de conclure sur la convergence de la suite. Le but de cette section est de donner des résultats qui permettent cette discussion.

Essentiellement, nous allons donner des résultats qui permettent d'interdire l'apparition de certaine ligne de divergence. L'idée est qu'une ligne de divergence a des extrémités sur le bord du domaine et donc des conditions sur $\partial\Omega$ permettent de contrôler les lignes de divergence de la suite.

4.1. Le cas des données infinies

Le premier résultat que l'on peut donner concerne le cas où les fonctions u_n prennent toutes des valeurs infinies le long d'une partie du bord de Ω . On sait, grâce à J. Spruck, que si une solution u de (CMC) prend la valeur $+\infty$ le long d'un arc A du bord de Ω alors A est un arc de cercle de courbure extérieure $\hat{\kappa} = 2H$. On a alors un premier résultat.

Proposition 10. *On considère Ω un domaine de \mathbb{R}^2 dont un arc A du bord est un arc de cercle de courbure extérieure $\hat{\kappa} = 2H$. On considère (u_n) une suite de solutions de (CMC) sur Ω telle que, pour tout n , la fonction u_n tende vers $+\infty$ en tout point de A . Alors aucune ligne de divergence de la suite (u_n) n'a pour extrémité un point intérieur à A .*

Démonstration. Tout d'abord, supposons qu'une telle ligne de divergence C existe et notons P l'extrémité de C appartenant à A . On peut supposer que l'arc de cercle A est l'arc paramétré par longueur d'arc de la façon suivante $a : s \mapsto (\frac{1}{2H} \cos(2Hs), \frac{1}{2H} \sin(2Hs))$ avec $a(0) = P$ et $-\eta < s < \eta$. On note ν la normale à C telle que, pour tout point Q de C , $N_{n'}(Q) \rightarrow \nu(Q)$. Quitte à symétriser Ω par rapport à $y = 0$ et considérer la suite $(u_n(x, -y))$ sur le nouveau domaine, on peut supposer que $(\nu(P), (-1, 0))$ forme une base directe. On suivra la suite des notations sur la Fig. 2. On note alors 2α l'angle entre la tangente à C en P et celle de A en P , α est inclus dans $]0, \pi/2[$. Considérons $\varepsilon > 0$, on note Q_1 le point de C à distance ε de P et Q_2 le point de A à distance ε de P appartenant à $y > 0$. On considère D le domaine compris entre les arcs de cercle $Q_1\widehat{P} \subset C$ et $P\widehat{Q_2} \subset A$ et le segment $[Q_2, Q_1]$. On a alors :

$$2H \text{ Aire}(D) = \int_{\partial D} \omega_{n'}.$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned} \int_{Q_1\widehat{P}} \omega_{n'} + \int_{P\widehat{Q_2}} \omega_{n'} &= 2H \text{ Aire}(D) - \int_{[Q_2, Q_1]} \omega_{n'} \\ &\leq 2H \text{ Aire}(D) + \ell([Q_2, Q_1]). \end{aligned}$$

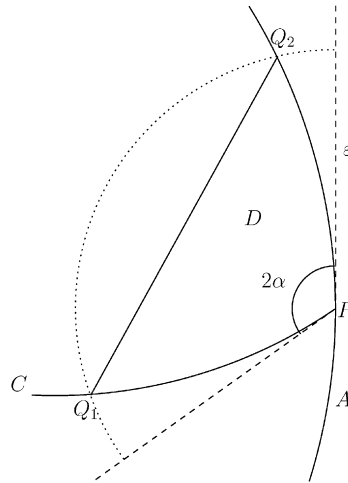


Fig. 2.

Comme $u_{n'}$ prend la valeur $+\infty$ le long de A , $\int_{P\widehat{Q_2}} \omega_{n'} = \ell(P\widehat{Q_2})$ avec $\ell(P\widehat{Q_2})$ la longueur de l'arc $P\widehat{Q_2}$. Comme C est une ligne de divergence et que $N_{n'}(Q) \rightarrow \nu(Q)$ pour tout $Q \in C$, un passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus donne $\ell(P\widehat{Q_1}) + \ell(P\widehat{Q_2}) \leq 2H \text{Aire}(D) + \ell([Q_2, Q_1])$. Or on sait que $\ell(P\widehat{Q_1}) = \ell(P\widehat{Q_2}) = \epsilon + o(\epsilon)$, $\ell([Q_2, Q_1]) \leq 2\epsilon \sin \alpha$ et $\text{Aire}(D) \leq \alpha \epsilon^2$. Donc on a $2\epsilon + o(\epsilon) \leq 2H\alpha\epsilon^2 + 2\epsilon \sin \alpha$; ceci implique $2 \leq 2 \sin \alpha$, ce qui est impossible puisque $\alpha \in]0, \pi/2[$. \square

On a aussi un résultat équivalent lorsque toutes les fonctions u_n prennent la valeur $-\infty$ le long du bord. J. Spruck a montré que, si une solution u de (CMC) prend la valeur $-\infty$ le long d'un arc B du bord de Ω , l'arc B est un arc de cercle de courbure extérieure $\hat{\kappa} = -2H$. Les techniques de la preuve de la proposition 10 s'adaptent alors pour démontrer le résultat suivant.

Proposition 11. *On considère Ω un domaine de \mathbb{R}^2 dont un arc B du bord est un arc de cercle de courbure extérieure $\hat{\kappa} = -2H$. On considère (u_n) une suite de solutions de (CMC) sur Ω telle que, pour tout n , la fonction u_n tende vers $-\infty$ en tout point de B . Alors aucune ligne de divergence de la suite (u_n) n'a pour extrémité un point intérieur à B .*

Un outil intéressant pour étudier les lignes de divergence ainsi que les limites sur le domaine de convergence est donné par le résultat suivant. Il permet de comprendre le comportement d'une éventuelle limite de la suite (u_n) sur le bord d'une composante du domaine de convergence.

Proposition 12. *On considère $D(r)$ le disque centré de rayon r et C l'arc de cercle d'équation $(x - 1/(2H))^2 + y^2 = 1/(4H^2)$ inclus dans $D(r)$ (rH est supposé petit). C sépare $D(r)$ en deux composantes connexes : l'une contient $(-r, 0)$, elle est noté D^- l'autre contient $(r, 0)$ elle est notée D^+ .*

On considère une suite (u_n) de solutions de (CMC) définies sur D^- qui converge vers une solution u ; on suppose de plus que l'on satisfait l'une des conditions suivantes :

- (1a) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n tend vers $-\infty$ sur C ou,*
- (1b) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est la restriction à D^- d'une solution v_n de (CMC) définie sur $D(r)$ et C est une ligne de divergence de (v_n) .*

Alors la fonction u tend vers $-\infty$ sur C .

De même, si on considère une suite (u_n) de solutions de (CMC) définies sur D^+ qui converge vers une solution u et que l'on suppose de plus que la suite satisfait l'une des conditions suivantes :

- (2a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n tend vers $+\infty$ sur C ou,
- (2b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est la restriction à D^+ d’une solution v_n de (CMC) définie sur $D(r)$ et C est une ligne de divergence de (v_n) .

Alors la fonction u tend vers $+\infty$ sur C .

Démonstration. Les démonstrations des quatre cas sont semblables, on va donc s’intéresser aux cas (1a) et (1b). On considère C_ε l’arc de cercle inclus dans D^- d’équation $(x - (1/(2H) - \varepsilon))^2 + y^2 = 1/(4H^2)$. On note alors Ω_ε la partie de D^- comprise entre C_ε et C . On oriente les arcs de C et C_ε dans le sens des y croissants.

On a alors pour tout n :

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \omega_{u_n} = 2H \text{Aire}(\Omega_\varepsilon).$$

Ceci nous donne, pour tout n :

$$\left| \int_C \omega_{u_n} - \int_{C_\varepsilon} \omega_{u_n} \right| \leq 2H \text{Aire}(\Omega_\varepsilon) + 2l_\varepsilon$$

où l_ε est la longueur de l’un des deux arcs de cercles qui forment l’intersection de $\partial\Omega_\varepsilon$ et $\partial D(r)$. Dans les deux cas (1a) et (1b), $\lim \int_C \omega_{u_n} = -\ell(C)$. Donc en passant à la limite dans l’inégalité ci-dessus, on obtient :

$$\left| -\ell(C) - \int_{C_\varepsilon} \omega_u \right| \leq 2H \text{Aire}(\Omega_\varepsilon) + 2l_\varepsilon.$$

Lorsque ε tend vers 0, $\text{Aire}(\Omega_\varepsilon)$ et l_ε tendent vers 0, donc $\int_C \omega_u = -\ell(C)$. Ceci prouve que, le long de C , $\omega_u = -ds$. Ainsi, d’après le lemme 1, u prend la valeur $-\infty$ le long de C . \square

4.2. Le cas des données bornées

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au cas où la suite (u_n) reste finie sur le bord. Dans deux articles [9,10], J. Serrin a étudié le problème de Dirichlet attaché à (CMC) pour des données finies sur le bord du domaine. Il a montré qu’une condition naturelle pour l’étude de ce problème est de supposer que la courbure extérieure est partout supérieure à $2H$ le long du bord. C’est donc sous cette hypothèse de courbure que nous allons donner un résultat concernant les lignes de divergence.

Proposition 13. On considère Ω un domaine de \mathbb{R}^2 dont un arc C du bord a une courbure extérieure $\hat{\kappa} \geq 2H$. On considère (u_n) une suite de solutions de (CMC) sur Ω , continues sur $\Omega \cup C$ telle qu’il existe $M \in \mathbb{R}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$ sur C . Alors, aucune ligne de divergence de la suite (u_n) n’a pour extrémité un point intérieur à C .

Démonstration. On remarque tout d’abord que, si C ne contient pas d’arc de cercle de courbure $\hat{\kappa} = 2H$, le lemme 3.3 de [11] démontre la proposition. En effet, celui-ci impose que, dans ce cas, la suite (u_n) soit bornée au voisinage de C . Ainsi, d’après les estimés de gradients, la suite $(W_n(Q))$ reste bornée pour tout Q dans un voisinage de C et il n’y a pas de ligne de divergence. Supposons donc maintenant que C soit un arc de cercle de courbure $\hat{\kappa} = 2H$.

D’après le lemme 3.3 de [11], il existe $c > 0$ et un voisinage de C tels que sur ce voisinage $u_n \leq M + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; autrement dit, la suite est uniformément majorée au voisinage de C . Supposons que la suite (u_n) admette une ligne de divergence C' ayant pour extrémité un point P intérieur à C . La suite (u_n) est uniformément majorée sur un voisinage de P . Comme dans la démonstration de la proposition 10, on suppose que l’arc de cercle C est l’arc paramétré par longueur d’arc de la façon suivante $c : s \mapsto (\frac{1}{2H} \cos(2Hs), \frac{1}{2H} \sin(2Hs))$ avec $c(0) = P$. On note ν la normale à C' telle que, pour tout point Q de C' , $N_{n_k}(Q) \rightarrow \nu(Q)$; pour simplifier, dans la suite on supposera que $N_n(Q) \rightarrow \nu(Q)$. Quitte à symétriser Ω par rapport à $y = 0$ et considérer la suite $(u_n(x, -y))$ sur le nouveau domaine, on peut supposer que $(\nu(P), (-1, 0))$ forme une base directe (voir Fig. 3(a)).

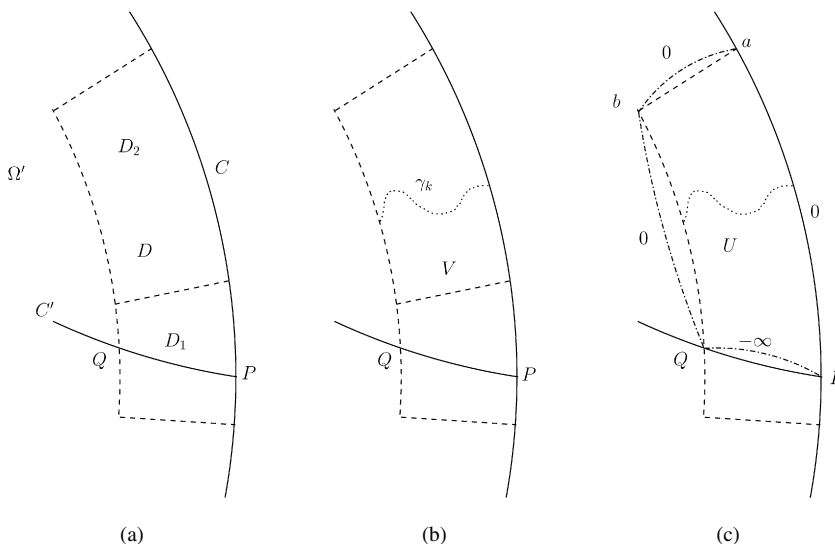


Fig. 3.

La principale difficulté de la démonstration est de prouver que, pour s petit, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{c([0,s])} \omega_{u_n} = \ell(c[0, s]) = s. \tag{*}$$

On se ramène alors à une situation connue.

Pour montrer (*), on va comparer la suite (u_n) à des fonctions barrières que sont les fonctions h_t introduites dans la première partie.

On va utiliser les coordonnées polaires (r, θ) de telle façon que le point P soit le point de coordonnées polaires $(1/(2H), 0)$ et que C soit un arc de $r = 1/(2H)$. Soit $s_0 > 0$ et $\eta > 0$ tels que $c(]-\eta, s_0 + \eta[)$ soit inclus dans C . L'arc C' sépare un voisinage de C dans Ω en deux composantes connexes, on note Ω' la composante contenant $c(]0, s_0])$ (voir Fig. 3(a)).

On considère $0 < t < 1/(4H)$ tel que l'ensemble $D = \{(r, \theta) \mid r_1(t) < r \leq 1/2H, -\eta/2 \leq \theta \leq s_0\}$ soit inclus dans Ω et même dans un voisinage de C où $u_n \leq M + c$; pour t suffisamment proche de $1/(4H)$, on a ces inclusions. On va alors comparer la suite u_n à la fonction $h_t - M - 1$ qui est définie sur D . On considère $\mu_t > 0$ tel que μ_t tende vers 0 lorsque t tend vers $1/(4H)$. On pose s_t le plus petit $s \in [\mu_t, s_0]$ tel que l'ensemble $\{(r, \theta) \mid r_1(t) < r \leq 1/2H, -\eta/2 \leq \theta \leq s_t/2\}$ contiennent $D \cap C'$. Remarquons que, comme $r_1(t)$ converge vers $1/(2H)$ lorsque t tend vers $1/(4H)$, s_t converge vers 0 lorsque $t \rightarrow 1/(4H)$. On note alors :

$$D_1 = \{(r, \theta) \mid r_1(t) < r \leq 1/2H, -\eta/2 \leq \theta \leq s_t\},$$

$$D_2 = \{(r, \theta) \mid r_1(t) < r \leq 1/2H, s_t \leq \theta \leq s_0\}.$$

De plus on considère que t est suffisamment proche de $1/(4H)$ pour que $C' \cap D$ soit un arc de cercle ayant pour extrémité P et un point Q contenu dans $\{r = r_1(t)\}$ (voir Fig. 3(a)).

Par hypothèse, $|u_n| < M$ sur $C \cap D$; ainsi le long de cet arc, on a $h_t - M - 1 = -M - 1 < u_n$. On va montrer l'énoncé suivant.

Lemme 14. *A partir d'un certain rang n_0 , il n'existe plus de chemin injectif γ dans D_2 joignant $C \cap D_2$ à $\{r = r_1(t)\} \cap D_2$ le long duquel $u_n > h_t - M - 1$.*

Supposons au contraire qu'il existe une sous-suite (n_k) d'indice telle que, pour tout k , on puisse trouver un chemin γ_k satisfaisant la propriété ci-dessus. γ_k sépare D en deux composantes connexes dont l'une contient D_1 , on note V l'intersection de cette composante avec Ω' (voir Fig. 3(b)).

Lemme 15. *Pour k suffisamment grand, il existe des points de V où $u_{n_k} < h_t - M - 1$.*

Démonstration. Si ce n'est pas le cas, pour tout k , $u_{n_k} \geq h_t - M - 1$ sur $D_1 \cap \Omega'$. Ainsi la suite (u_{n_k}) est uniformément minorée sur $D_1 \cap \Omega'$; on sait par ailleurs que sur cette ensemble elle est majorée par $M + c$. Il existe donc une sous-suite de (u_{n_k}) qui converge vers u une solution de (CMC) sur $D_1 \cap \Omega'$. La fonction u est bornée en tant que limite d'une suite bornée. Le domaine $D_1 \cap \Omega'$ est en partie bordé par un sous-arc de C' qui est une ligne de divergence; d'après la proposition 12, u prend la valeur $+\infty$ le long de ce sous-arc. Ceci contredit le fait que u soit bornée et le lemme 15 est prouvé. \square

On sait maintenant que, pour k grand, il existe des points de V où $u_{n_k} < h_t - M - 1$. Plus précisément, on a :

Lemme 16. *Pour k suffisamment grand, il existe des points appartenant à $V \cap \{r = r_1(t)\}$ où $u_{n_k} < h_t - M - 1$.*

Démonstration. Si le lemme n'est pas vérifié, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout k , u_{n_k} est minorée par K sur $\partial V \setminus C'$. Notons a le point de coordonnées polaires $(1/(2H), s_0)$ et b celui de coordonnées $(r_1(t), s_0)$, il s'agit de deux sommets de D . Considérons alors le domaine U de \mathbb{R}^2 délimité par les arcs de cercles suivants :

- le sous-arc \widehat{Pa} de C ,
- un arc de cercle de courbure $2H$ joignant a à b ,
- un arc de cercle de courbure $2H$ joignant b à Q ,
- un arc de cercle de courbure $2H$ joignant Q à P .

Comme sur la Fig. 3(c), les arcs sont choisis de telle façon que par rapport à U leur courbure extérieure soit $2H$ pour \widehat{ab} et \widehat{bQ} et $-2H$ pour \widehat{QP} ; on remarque que U contient $\partial V \setminus C'$. Le théorème 6.2 de [11] nous dit qu'il existe alors une solution v de l'équation (CMC) définie sur U tel que v prenne pour valeur sur le bord 0 le long de $\widehat{Pa} \cup \widehat{ab} \cup \widehat{bQ}$ et $-\infty$ le long de \widehat{bQ} . La fonction v est majorée par 0. Ainsi, d'après le principe du maximum, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{n_k} \geq v + K$ sur $V \cap U \supset D_1 \cap U$. Par ailleurs (u_{n_k}) est uniformément majorée sur $D_1 \cap U$. Ainsi $D_1 \cap U$ est inclus dans le domaine de convergence de la suite (u_{n_k}) .

Regardons maintenant le comportement de la suite sur le domaine de \mathbb{R}^2 compris entre le sous-arc de C' joignant Q à P et l'arc \widehat{QP} bordant U . Si un point de ce domaine n'est pas dans le domaine de convergence, une ligne de divergence doit apparaître. Comme le long de C' , $N_n \rightarrow v$, cette ligne de divergence ne peut intersecter C' . Ainsi cette ligne de divergence intersecte l'arc \widehat{QP} bordant U et a des points dans $D_1 \cap U$, ce qui est impossible car $D_1 \cap U$ est inclus dans le domaine de convergence. Ainsi on vient de montrer que $D_1 \cap \Omega'$ est inclus dans le domaine de convergence de (u_{n_k}) .

Comme (u_{n_k}) est uniformément bornée sur $D_1 \cap U$, quitte à extraire, (u_{n_k}) converge vers une solution u de (CMC) sur $D_1 \cap \Omega'$. Comme $u_{n_k} \leq M + c$, $u \leq M + c$ sur $D_1 \cap \Omega'$. Par ailleurs la proposition 12 nous dit que u prend la valeur $+\infty$ le long du sous arc de C' bordant $D_1 \cap \Omega'$, ce qui nous donne la contradiction recherchée et démontre le lemme 16. \square

Reprenons la démonstration du lemme 14. Considérons k suffisamment grand de façon à ce que le lemme 16 soit satisfait. Le long de l'arc $D_1 \cap C$ on a $u_{n_k} > h_t - M - 1$, considérons alors la composante connexe de $\{u_{n_k} > h_t - M - 1\} \cap V$ contenant cet arc et notons U son complémentaire dans V . D'après les lemmes 15 et 16, U est non-vidé.

Comme $u_{n_k} > h_t - M - 1$ le long de γ_k , le bord de U se compose de trois parties (voir Fig. 4(a)) :

- la première, Γ_1 , est l'intersection de ∂U avec C' , il s'agit d'un sous-arc de C' qui est de la forme \widehat{QT} si il est non vide,
- la deuxième, Γ_2 , est l'intersection avec $\{r = r_1(t)\}$, il s'agit d'un sous-arc non-vidé d'après le lemme 16 et
- la dernière, Γ_3 , est la partie incluse dans l'intérieur de V le long de laquelle $u_{n_k} = h_t - M - 1$.

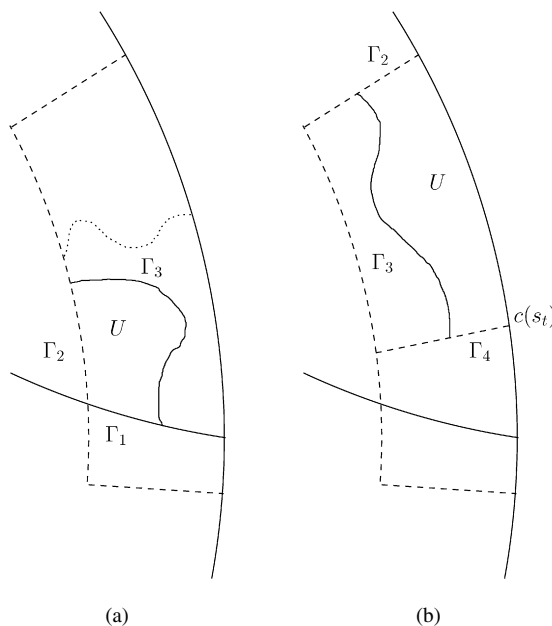


Fig. 4.

On a alors :

$$0 = \int_{\partial U} \omega_{u_{n_k}} - \omega_{h_t} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i} \omega_{u_{n_k}} - \omega_{h_t}.$$

Tout d’abord, le long de Γ_3 le vecteur $\nabla u_{n_k} - \nabla h_t$ pointe vers l’extérieur de U , donc, d’après le lemme 2 dans [1], $\int_{\Gamma_3} \omega_{u_{n_k}} - \omega_{h_t} > 0$. Deuxièmement, comme la dérivée normale de h_t en un point de $\{r = r_1(t)\}$ vaut $-\infty$,

$$\int_{\Gamma_2} \omega_{u_{n_k}} - \omega_{h_t} > 0.$$

Maintenant C' est une ligne de divergence et Γ_1 est de la forme \widehat{QT} ainsi pour k suffisamment grand $\int_{\Gamma_1} \omega_{u_{n_k}} \geq \int_{\Gamma_1} \omega_{h_t}$. Donc pour k suffisamment grand :

$$\int_{\partial U} \omega_{u_{n_k}} - \omega_{h_t} > 0.$$

Ceci nous donne une contradiction et prouve le lemme 14. \square

Reprenons maintenant la preuve de la proposition 13. On sait que le long de $\{r = 1/(2H)\} \cap D_2$ on a $u_n > h_t - M - 1$, considérons alors U la composante connexe de $\{u_n \geq h_t - M - 1\} \cap D_2$ contenant cet arc. Le lemme 14 nous dit que pour n suffisamment grand le bord de U ne rencontre pas $\{r = r_1(t)\}$. Ainsi le bord de U se décompose en quatre parties (voir Fig. 4(b)) :

- l’arc $c([s_t, s_0]) = \{r = 1/(2H)\} \cap D_2$,
- un segment Γ_2 inclus dans $\{\theta = s_0\}$,
- une courbe Γ_3 incluse dans D_2 joignant $\{\theta = s_0\}$ à $\{\theta = s_t\}$ le long de laquelle $u_n = h_t - M - 1$ et
- un segment Γ_4 inclus dans $\{\theta = s_t\}$.

Maintenant, on a :

$$0 = \int_{\partial U} \omega_{u_n} - \omega_{h_t}.$$

Cette égalité se réécrit :

$$\int_{c([s_t, s_0])} \omega_{u_n} = \int_{c([s_t, s_0])} \omega_{h_t} - \int_{\Gamma_3} \omega_{u_n} - \omega_{h_t} - \sum_{i \in \{2, 4\}} \int_{\Gamma_i} \omega_{u_n} - \omega_{h_t}.$$

Le long de Γ_3 le vecteur $\nabla u_n - \nabla h_t$ pointe à l'intérieur de U donc $\int_{\Gamma_3} \omega_{u_n} - \omega_{h_t} \leq 0$. Les segments Γ_2 et Γ_4 sont de longueur inférieure à $1/(2H) - r_1(t)$. On obtient donc l'inégalité :

$$\int_{c([s_t, s_0])} \omega_{u_n} \geq \int_{c([s_t, s_0])} \omega_{h_t} - 4 \left(\frac{1}{2H} - r_1(t) \right).$$

Cette inégalité nous donne :

$$\ell(c([0, s_0])) \geq \int_{c([0, s_0])} \omega_{u_n} \geq \int_{c([s_t, s_0])} \omega_{h_t} - 4 \left(\frac{1}{2H} - r_1(t) \right) - \ell(c([0, s_t])).$$

Lorsque t tend vers $1/(4H)$, s_t tend vers 0, $(1/(2H) - r_1(t))$ tend vers 0 et $\int_{c([s_t, s_0])} \omega_{h_t}$ tend vers $\ell(c([0, s_0]))$. Ainsi en laissant tendre t vers $1/(4H)$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{c([0, s_0])} \omega_{u_n} = \ell(c([0, s_0]))$$

et donc, pour tout $s < s_0$, on obtient (*) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{c([0, s])} \omega_{u_n} = \ell(c([0, s])) = s.$$

On se retrouve alors dans une situation similaire à celle de la proposition 10 dont on peut appliquer la démonstration avec de très légères modifications. \square

On remarque que la conclusion de la proposition 13 est aussi vraie lorsque l' on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_C u_n - \inf_C u_n \leq M$ où C est un arc du bord de courbure extérieure supérieure à $2H$. En effet, il suffit d'appliquer la proposition 13 à la suite $(u_n - u_n(P))$ où P est un point de C .

Références

- [1] P. Collin, R. Krust, Le problème de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales sur des domaines non bornés, Bull. Soc. Math. France 119 (1991) 443–462.
- [2] R. Finn, The Gauss curvature of an H -graph, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 2 (1987).
- [3] F. Hélein, Constant Mean Curvature Surfaces, Harmonic Maps and Integrable Systems, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 2001.
- [4] H. Jenkins, J. Serrin, Variational problems of minimal surface type II, Arch. Rational Mech. Anal. 21 (1966) 321–342.
- [5] L. Mazet, Some uniqueness results for constant mean curvature graphs, Pacific J. Math., in press.
- [6] L. Mazet, Construction de surfaces minimales par résolution du problème de Dirichlet, Thèse de Doctorat, Univ. Toulouse III, 2004.
- [7] L. Mazet, The Dirichlet problem for the minimal surfaces equation and the Plateau problem at infinity, J. Inst. Math. Jussieu 3 (2004) 397–420.
- [8] W.H. Meeks, A. Ros, H. Rosenberg, The Global Theory of Minimal Surfaces in Flat Spaces, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1775, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [9] J. Serrin, The Dirichlet problem for surfaces of constant mean curvature, Proc. London Math. Soc. (3) 21 (1970) 361–384.
- [10] J. Serrin, The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 264 (1969) 413–496.
- [11] J. Spruck, Infinite boundary value problems for surfaces of constant mean curvature, Arch. Rational Mech. Anal. 49 (1972/73) 1–31.