ANNALES DE L'I. H. P.

W. PAULI

Théorie quantique relativiste des particules obéissant à la statistique de Einstein=Bose

Annales de l'I. H. P., tome 6, nº 2 (1936), p. 137-152
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1936__6_2_137_0>

Théorie quantique relativiste des particules obéissant à la statistique de Einstein-Bose[1]

PAR

W. PAULI, Zürich

§ 1. Introduction

On sait que DIRAC a utilisé pour ses équations d'ondes de premier ordre à quatre composantes ψ_r (« spineurs »), le postulat que la densité $\rho(x)$ des particules doit être positive définie et de la forme

$$\rho(x) = \sum_r \psi_r^* \psi_r.$$

DIRAC pensait que ce postulat pouvait être imposé *a priori* en se basant sur la théorie générale des transformations de la mécanique ondulatoire et indépendamment du fait empirique que l'électron a un moment angulaire égal à $1/2\ h$. Cette argumentation est correcte tant qu'il s'agit du problème d'un seul corps, ou plus exactement aussi longtemps qu'on peut admettre sans contradiction qu'un seul corps est en jeu. Le développement postérieur de la théorie de DIRAC a conduit à supposer que la production et l'annihilation des paires de particules ayant des charges électriques opposées formait une partie inséparable de la théorie relativiste des particules matérielles. En ce cas, la situation change radicalement et l'argumenttion de DIRAC citée plus haut n'est plus applicable *a priori* ; en effet il s'agit dans ce cas

(1) Toutes les considérations suivantes résultent d'un travail commun avec M. V. WEISSKOPF, dont une partie seulement a été publiée dans *Helvetica Physica Acta* **7**.709, 1934.

de trouver non plus une expression de la densité des particules (qui en général ne sera plus mesurable dans un domaine spatial de l'ordre de grandeur h/mc), mais d'une part l'expression de la densité de charge électrique, avec des valeurs propres positives et négatives. et d'autre part, une expression de la densité d'énergie avec des valeurs propres uniquement positives. Je ne rapporterai pas ici comment on a tenté de résoudre ce dernier problème dans la théorie des trous de DIRAC, mais je veux insister sur le fait qu'en partant de l'équation d'onde de second ordre de SCHRŒDINGER-GORDON, il est possible de développer une théorie relativiste des particules sans spin et avec statistique d'EINSTEIN-BOSE, théorie qui implique la production des paires et qui est peut-être plus statisfaisante du point de vue logique et pédagogique que la théorie des trous de DIRAC. En effet, dans la théorie en question il n'est pas nécessaire d'introduire des méthodes artificielles de passage à la limite pour donner une valeur déterminée à la différence des deux sommes infinies, comme c'est le cas dans la théorie des trous. De plus, dans la théorie scalaire, la densité d'énergie est positive définie même dans le cas où l'on considère la fonction d'onde ψ et sa conjugée complexe ψ^* comme des nombres ordinaires. La superquantification découlant du formalisme général de HEISENBERG-PAULI est nécessaire pour obtenir la production et l'annihilation des paires par *quanta discontinus* de la charge électrique et de l'énergie. Nous donnons au paragraphe 2 l'application de ce formalisme de superquantification à l'équation scalaire relativiste dans le cas de l'absence de forces extérieures. Le paragraphe 3 contient une analyse détaillée des possibilités de développer formellement une théorie scalaire relativiste pour des particules sans spin, mais obéissant au principe d'exclusion. On arrive au résultat satisfaisant que les propriétés de mesurabilité de la densité électrique seraient beaucoup plus compliquées dans le cas du principe d'exclusion que dans le cas de la statistique d'EINSTEIN-BOSE, et que ce dernier cas se distingue du premier, même du point de vue purement formel. D'autre part, on doit admettre qu'il n'est pas certain qu'on puisse appliquer la théorie en question à la réalité, parce que les particules sans spin — comme la particule α — sont toutes complexes. Il est impossible de savoir dans quelle mesure les effets de structure de ces particules joueront un rôle dans le domaine relativiste. Néanmoins, nous donnerons au paragraphe 4 quelques brèves indications sur la grandeur de certains effets qui se produisent en présence des forces extérieures et nous comparerons ces résultats avec les résultats analogues de la théorie des trous.

§ 2. La quantification du champ d'ondes en absence de champ

On sait qu'on peut écrire l'équation d'onde scalaire relativiste

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{h^2}\psi = 0 \tag{1}$$

dérivée d'une fonction de LAGRANGE

$$L = -h^2c^2\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - m^2c^4\psi^*\psi$$

$$= h^2\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} - h^2c^2\sum_{K=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - m^2c^4\psi^*\psi$$

en utilisant le principe de variation

$$\delta\int L\,dx_1dx_2dx_3dx_4 = 0.$$

Le tenseur relativiste de densité d'énergie-impulsion devient

$$T_{\mu\nu} = -h^2c^2\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}\right) - L\delta_{\mu\nu},$$

d'où l'on déduit pour l'énergie (fonction hamiltonienne)

$$\overline{H} = \int T_{44}dV = \int \left\{ h^2\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + h^2c^2\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + m^2c^4\psi^*\psi \right\} dV \tag{2}$$

et pour la quantité de mouvement

$$G_k = \frac{i}{c}\int T_{4k}dV = -\int h^2\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dV. \tag{3}$$

On voit, que l'expression de la densité d'énergie est définie positive.

Considérons maintenant ψ^* et ψ comme des opérateurs (nombres q)

et ψ^* comme le conjugué hermitique de ψ. D'après le formalisme canonique de la quantification il faut introduire les impulsions π et π^* canoniquement conjuguées à ψ et ψ^* par les équations

$$(4) \qquad \pi = \frac{1}{h}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} = h\frac{\partial\psi^*}{\partial t}, \qquad \pi^* = \frac{1}{h}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)} = h\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

et poser les relations de commutation

$$(\mathrm{I}) \quad i[\pi(x, t), \psi(x', t)] = \delta(x - x'), \qquad i[\pi^*(x, t), \psi^*(x', t)] = \delta(x - x'),$$

où $\delta(x)$ est la fonction connue de DIRAC et où le crochet [A, B] désigne le commutateur de A et B :

$$[A,B] = AB - BA.$$

Les quantités ψ, ψ^* et π, π^* sont commutables entre elles ; de même π commute avec ψ^* et π^* avec ψ.

On vérifiera la règle

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{i}{h}[\overline{H}, f]$$

pour les quantités ψ, ψ^*, π, π^* et de plus

$$(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial x^k} = -\frac{i}{h}[G_k, f].$$

La suite des facteurs dans l'expression de l'impulsion est choisie de telle sorte que cette dernière constitue un opérateur hermitique.

Considérons les expressions des composantes du quadrivecteur densité-courant électrique, qui s'écrivent $i_k = cS_k$ pour le courant, $S_4 = i\rho$ pour la densité et qui satisfont à l'équation de continuité

$$(6) \qquad \sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial S_\nu}{\partial x^\nu} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{i} = 0.$$

e étant la valeur absolue de la charge d'une particule, les S_ν sont donnés dans notre cas par

$$(17) \qquad S_\nu = ehci\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}\psi^*\right)$$

où

$$(7\,a) \qquad \rho = -ehi\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\psi^*\right)$$

$$(7\,b) \qquad S_k = ehci\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\psi^*\right)$$

L'ordre des facteurs dans ρ a été choisi de telle manière que — sans altérer le caractère hermitique de ρ — il n'existe aucune densité du point zéro dans le vide (comme nous verrons plus tard).

A l'aide de (4) nous pouvons écrire l'expression de ρ :

$$\rho = -ei(\pi\psi - \pi^*\psi^*). \tag{8}$$

Des équations (I) nous pouvons déduire la propriété fondamentale de ρ : *les valeurs de* ρ *en deux points spatiaux* x et x' *de l'espace sont commutables* :

$$[\rho(x), \rho(x')] = 0. \tag{9}$$

En effet, c'est cette propriété de $\rho(x)$ qui permet de parler d'une distribution mesurable de la charge électrique dans l'espace, même dans le cas, où il s'agit de domaines spatiaux dont les dimensions sont de l'ordre de h/mc.

Nous verrons plus tard que la charge totale

$$\bar{e} = \int \rho dV$$

a les valeurs propres $(0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N\dots)e$. Puisque les valeurs propres de $\rho\,(x)$ sont indépendantes de x il résulte de (9) que les valeurs propres de $\rho(x)$ sont

$$(0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm N \cdots)e \cdot \delta(x - x'),$$

x' ayant une valeur arbitraire (1).

Nous passerons maintenant aux expressions des diverses quantités physiques dans l'espace d'impulsion. Pour avoir dans cet espace des sommes au lieu d'intégrales, nous utiliserons la méthode qui consiste à introduire une condition de périodicité exprimant que les fonctions d'ondes sont périodiques relativement à un cube de côté L (et de volume $V = L^3$). Dans ce cas, les composantes du vecteur de propagation $\vec{k}$, qui intervient dans les phases $e^{i(\vec{k}\vec{x})}$ des ondes, doivent être égales à des multiples entiers de $\frac{2\pi}{L}$.

(1) Pour une démonstration directe voir *Helvetica Physica Acta, l. c.*

Nous pouvons écrire maintenant

$$(10\,a)\qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k q_k e^{i(\vec{k}\vec{x})}, \quad \psi^* = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k q_k^* e^{-i(\vec{k}\vec{x})},$$

$$(10\,b)\qquad \pi^* = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k p_k e^{i(\vec{k}\vec{x})}, \quad \pi = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k p_k e^{-i(\vec{k}\vec{x})},$$

avec les formules d'inversion

$$(10\,c)\qquad q_k = \frac{1}{\sqrt{V}}\int \psi e^{-i(\vec{k}\vec{x})} dV, \quad q_k^* = \frac{1}{\sqrt{V}}\int \psi^* e^{i(\vec{k}\vec{x})} dV,$$

$$(10\,d)\qquad p_k^* = \frac{1}{\sqrt{V}}\int \pi^* e^{-i(\vec{k}\vec{x})} dV, \quad p_k = \frac{1}{\sqrt{V}}\int \pi e^{i(\vec{k}\vec{x})} dV.$$

Les opérateurs p_k, q_k, p_k^*, q_k^* satisfont aux conditions de commutation

$$(\text{II})\qquad i[p_k, q_l] = \delta_{kl}, \quad i[p_k^*, q_k^*] = \delta_{kl},$$

toutes les autres variables étant commutables entre elles.

Si nous posons, pour abréger,

$$(11)\qquad E_k^2 = c^2(h^2k^2 + m^2c^2),$$

$$(11\,a)\qquad E_k = + c\sqrt{h^2k^2 + m^2c^2},$$

nous tirerons de (2) et (3) pour l'énergie et l'impulsion totales

$$(12)\qquad \overline{H} = \sum_k (p_k^* p_k + E_k^2 q_k^* q_k)$$

et

$$(13)\qquad \vec{G} = -ih\sum_k \vec{k}\,(p_k q_k - q_k^* p_k^*).$$

La règle (4) donne enfin

$$(14\,a)\qquad p_k = h\dot{q}_k^*, \quad p_k^* = h\dot{q}_k,$$

$$(14\,b)\qquad \dot{p}_k = -\frac{1}{h}E_k^2 q_k^*, \quad \dot{p}_k^* = -\frac{1}{h}E_k^2 q_k.$$

La charge électrique totale devient, d'après (8) :

$$(15)\qquad \bar{e} = \int \rho dV = -ei\sum_k (p_k q_k - p_k^* q_k^*)$$

et le courant total

$$\frac{1}{c}\vec{I} = \int \vec{S}\, dV = 2hc \sum_k \vec{k}\, q_k^* q_k. \tag{16}$$

Nous voulons montrer, que les parties de l'énergie, de l'impulsion et de la charge totale qui correspondent à une certaine oscillation propre $\vec{k}$, peuvent être décomposées simultanément en deux autres termes, qu'on peut interpréter d'une manière simple. Dans ce but, introduisons au lieu de p_k, p_k^*, q_k, q_k^* les variables a_k, a_k^*, b_k, b_k^* définies par les équations suivantes :

$$p_k = \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}}(a_k^* + b_k), \quad q_k = \frac{-i}{\sqrt{2}\sqrt{E_k}}(-a_k + b_k^*), \tag{17}$$

$$p_k^* = \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}}(a_k + b_k^*), \quad q_k^* = \frac{-i}{\sqrt{2}\sqrt{E_k}}(a^* - b_k), \tag{17*}$$

avec les formules d'inversion

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}}p_k^* - i\sqrt{E_k}q_k\right), \quad a_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}}p_k + i\sqrt{E_k}q_k^*\right), \tag{18 a}$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}}p_k - i\sqrt{E_k}q_k^*\right), \quad b_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{E_k}}p_k^* + i\sqrt{E_k}q_k\right). \tag{18 b}$$

Les nouvelles variables satisfont aux conditions de commutation très simples

$$[a_k, a_l^*] = \delta_{kl}, \quad [b_k, b_l^*] = \delta_{kl} \tag{III}$$

les crochets des autres paires de variables étant égaux à zéro.

On tire, d'autre part, de (12), (13), (15), (16) :

$$\bar{H} = \sum_k E_k \frac{1}{2}(a_k a_k^* + a_k^* a_k + b_k^* b_k + b_k b_k^*) = \sum_k E_k(a_k^* a_k + b_k^* b_k + 1). \tag{19}$$

$$\vec{G} = h \sum_k \vec{k}\, \frac{1}{2}(a_k^* a_k + a_k a_k^* - b_k^* b_k - b_k b_k^*) = h \sum_k \vec{k}\,(a_k^* a_k - b_k^* b_k), \tag{20}$$

$$\bar{e} = e \sum \frac{1}{2}(a_k^* a_k + a_k a_k^* - b_k^* b_k - b_k b_k^*) = e \sum_k (a_k^* a_k - b_k^* b_k). \tag{21}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{c}\vec{I} &= e \sum_k \frac{hc\vec{k}}{E_k}(a_k^* a_k + b_k b_k^* - a_k^* b_k^* - a_k b_k) \\ &= e \sum_k \frac{hc\vec{k}}{E_k}(a_k^* a_k + b_k^* b_k - a_k^* b_k^* - a_k b_k + 1). \end{aligned}\right. \tag{22}$$

En appliquant la règle (4) — ou en comparant (18*a*), (18*b*) avec (14*a*), (14*b*) — on trouve

$$\dot{a}_k = -i\frac{E_k}{h}a_k, \qquad \dot{b}_k = -i\frac{E_k}{h}b_k, \tag{23}$$

où

$$a_k = a_k(0)e^{-i\frac{E_k}{h}t}, \qquad b_k = b_k(0)e^{-i\frac{E_k}{h}t}, \tag{24}$$

$$a_k^* = a_k^*(0)e^{+i\frac{E_k}{h}t}, \qquad b_k^* = b_k(0)e^{+i\frac{E_k}{h}t}. \tag{24*}$$

On peut dire par conséquent, que a_k et b_k appartiennent à une fréquence négative et a_k^*, b_k^* à une fréquence positive. Ou, en tenant compte de (17), que $\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{a_k}{\sqrt{E_k}}$ est la partie de q_k correspondante à une fréquence négative et $\frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{b_k^*}{\sqrt{E_k}}$ la partie de q_k correspondante à une fréquence positive, $\frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}}b_k$ et $\frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2}}a_k^*$ étant les parties analogues de p_k. Ces résultats joueront un rôle important dans la suite.

En passant à l'interprétation physique des formules (19) à (22), remarquons qu'il résulte de (III) que $a_k^*a_k$ et $b_k^*b_k$ ont les valeurs propres 0, 1, 2... En tenant compte en particulier de (20) et (21) nous pouvons dire que :

les N_k^+ et N_{-k}^- définis par

$$N_k^+ = a_k^*a_k, \qquad N_{-k}^- = b_k^*b_k \tag{25}$$

sont, respectivement, le nombre de particules de charge $+e$ et d'impulsion $+h\vec{k}$ et le nombre de particules avec de charge $-e$ et d'impulsion $-h\vec{k}$.

Les termes à coefficient $+1$, dans (19) et (22) peuvent être interprétés comme l'énergie et le courant du point zéro c'est-à-dire du vide (quantités inobservables). Les termes en a_kb_k et $a_k^*b_k^*$ dans l'expression de $\vec{I}$ sont très importants. Ils empêchent que le courant total soit constant par rapport au temps et correspondent exactement au « mouvement de tremblement » de Schrœdinger, puisque selon (24) ils varient, dépendent du temps par l'intermédiaire des facteurs $e^{-\frac{i}{h}2E_kt}$ et $e^{+\frac{i}{h}2E_kt}$. Ainsi que nous le verrons au paragraphe 4 ce sont des termes de structure analogue, qui dans le cas d'un champ donnent lieu à la production et à l'annihilation de paires.

§ 3. Généralisations possibles de la théorie
Le problème d'une théorie scalaire avec principe d'exclusion

Pour savoir si une théorie des particules avec spin nul mais obéissant au principe d'exclusion est possible, il faut aborder une discussion plus détaillée de la signification physique des variables a_k, a_k^* et b_k, b_k^*. Nous avons déjà remarqué que $\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{a_k}{\sqrt{E_k}}$ et $\frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{b_k^*}{\sqrt{E_k}}$ sont les termes de q_k ayant respectivement une fréquence négative et positive.

Formons maintenant les termes correspondants de $\psi(x)$ (voir 10a) :

$$(26)\quad \psi_1(\vec{x},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{a_k}{\sqrt{E_k}}e^{i(\vec{k}\vec{x})}, \qquad \psi_2(\vec{x},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{b_k^*}{\sqrt{E_k}}e^{i(\vec{k}\vec{x})}$$

et

$$(26a)\quad \left\{\begin{aligned} \psi_1^*(\vec{x},t) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{a_k^*}{\sqrt{E_k}}e^{-i(\vec{k}\vec{x})},\\ \psi_2^*(\vec{x},t) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{b_k}{\sqrt{E_k}}e^{-i(\vec{k}\vec{x})}. \end{aligned}\right.$$

Nous trouvons les relations de commutation en tenant compte de (III)

$$[\psi_1(\vec{x},t),\ \psi_1^*(\vec{x}',t)]=\frac{1}{2}\frac{1}{V}\sum_k\frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}}{E_k}=\frac{1}{2}\frac{1}{V}\sum_k\frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}}{\sqrt{h^2k^2+m^2c^2}}.$$

$$[\psi_2(\vec{x},t),\ \psi_2^*(\vec{x}',t)]=-\frac{1}{2}\frac{1}{V}\sum_k\frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}}{E_k}=-\frac{1}{2}\frac{1}{V}\sum_k\frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}}{\sqrt{h^2k^2+m^2c^2}}.$$

Définissons la fonction $g(x)$ par

$$(27)\quad g(x)=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{V}\sum_k\frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{\sqrt{h^2k^2+m^2c^2}}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{\sqrt{h^2k^2+m^2c^2}}dk_1dk_2dk_3.$$

Nos relations s'écrivent en négligeant la différence entre L fini et L infini

$$(28_1)\qquad [\psi_1(\vec{x}, t),\ \psi_1^*(\vec{x}', t)] = \frac{1}{2}\, g(\vec{x} - \vec{x}'),$$

$$(28_2)\qquad [\psi_2(\vec{x}, t),\ \psi_2^*(\vec{x}', t)] = -\frac{1}{2}\, g(\vec{x} - \vec{x}').$$

Toutes les quantités d'indice 1 *sont commutables avec toutes les quantités d'indice* 2. Nous pouvons aussi écrire la définition de $g(x)$ d'une manière symbolique en remarquant que la fonction $\delta(x)$ de DIRAC est égale à

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i(\vec{k}\vec{x})}\, dk_1 dk_2 dk_3,$$

et que $h^2k^2 + m^2c^2$ correspond à l'opérateur $-h^2\Delta + m^2c^2$:

$$(27a)\qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}}\cdot \delta(x).$$

Plus généralement et pour une fonction $f(x)$ quelconque

$$\frac{1}{\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}}\cdot f(x) = \int g(\vec{x} - \vec{x}')f(\vec{x}')dV'.$$

On trouve, de plus, d'après (23)

$$\pi_1^* = h\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{a_k}{\sqrt{2}}\sqrt{E_k}\, e^{i(\vec{k}\vec{x})}, \quad \pi_2^* = h\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{b_k^*}{\sqrt{2}}\sqrt{E_k}\, e^{i(\vec{k}\vec{x})}$$

ou avec l'expression symbolique précédente

$$(29)\qquad \begin{cases} \pi_1^* = h\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t} = -i\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}\cdot\psi_1\,; \\ \pi_2^* = h\dfrac{\partial\psi_2}{\partial t} = +i\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}\cdot\psi_2. \end{cases}$$

$$(29^*)\qquad \begin{cases} \pi_1 = h\dfrac{\partial\psi_1^*}{\partial t} = +i\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}\cdot\psi_1^*\,; \\ \pi_2 = h\dfrac{\partial\psi_2^*}{\partial t} = -i\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}\cdot\psi_2^*. \end{cases}$$

Les fonctions ψ_1, ψ_2 *et* ψ_1^*, ψ_2^* *sont des scalaires par rapport au groupe de* LORENTZ. En fait, la propriété d'une fonction d'onde d'avoir seulement des fréquences du même signe est conservée par les transformations de LORENTZ.

Remarquons que les relations de commutation sont aussi invariantes par rapport au groupe de la relativité, puisqu'en vertu de (24) on peut les généraliser pour $t \neq t'$ de la manière suivante. Définissons

$$(30) \qquad g_+(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i(\vec{k}\vec{x} + \sqrt{h^2k^2 + m^2c^2}\, ct)}}{\sqrt{h^2k^2 + m^2c^2}} dk_1 dk_2 dk_3,$$

$$(30^*) \quad g_-(\vec{x}, t) = g_+(\vec{x}, -t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i(\vec{k}\vec{x} - \sqrt{h^2k^2 + m^2c^2}\, ct)}}{\sqrt{h^2k^2 + m^2c^2}} dk_1 dk_2 dk_3.$$

On peut remplacer ces expressions par :

$$g_+(\vec{x}, 0) = g_-(\vec{x}, 0) = \frac{1}{\sqrt{-h^2\Delta + m^2c^2}} \cdot \delta(x),$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial g_+}{\partial t}\right)_{\vec{x}, 0} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial g_-}{\partial t}\right)_{\vec{x}, 0} = i\delta(\vec{x}),$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{h^2}\right) g_\pm = 0.$$

On a alors

$$(31_1) \qquad [\psi_1(\vec{x}, t), \ \psi_1^*(\vec{x'}, t')] = \frac{1}{2} g_-(\vec{x} - \vec{x'}, t - t'),$$

$$(31_2] \qquad [\psi_2(\vec{x}, t), \ \psi_2^*(\vec{x'}, t')] = -\frac{1}{2} g_+(\vec{x} - \vec{x'}, t - t').$$

et on voit d'après (30) que les fonctions du second membre sont des scalaires relativistes.

Il est vrai que les définitions données pour ψ_1, ψ_2 et leur relation de commutation ne sont invariantes que pour des particules libres et qu'il est nécessaire de les modifier dans le cas de la présence de champs électromagnétiques. On peut, semble-t-il — peut être pas univoquement — résoudre ce problème d'après la méthode que DIRAC (1) a donnée pour le problème analogue dans la théorie des trous. Le principe de cette méthode est de caractériser la fonction $g(\vec{x}, t)$ par ses singularités sur le « cône de lumière » $\vec{x}^2 - c^2t^2 = 0$ plutôt que par (30).

Nous ne discuterons pas ce dernier problème et nous passerons à la discussion de l'expression pour le quadrivecteur densité-courant

(1) P. A. M. DIRAC, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **30**, 150, 1934.

dans le cas de l'absence des forces. En substituant $\psi = \psi_1 + \psi_2$ dans (7) on obtient trois groupes de termes :

$$
(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} S_\nu = ehci \Bigg[& \left(\frac{\partial \psi_1^*}{\partial x^\nu} \psi_1 - \psi_1^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} \right) + \left(\psi_2 \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x^\nu} \psi_2^* \right) \\ & + \left(\frac{\partial \psi_1^*}{\partial x^\nu} \psi_2 - \psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x^\nu} \psi_1 - \psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x^\nu} \right) \Bigg]. \end{aligned} \right.
$$

On voit que nous avons changé l'ordre d'un certain nombre de fateurs. En effet on a :

$$
\psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} \psi_2^*, \qquad \psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x^\nu} \psi_1^*
$$

et d'après (28), (29)

$$
- \psi_1^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} + \psi_2 \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x^\nu} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} \psi_1^* + \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x^\nu} \psi_1.
$$

Ce changement de l'ordre des facteurs se révèlera opportun pour la statistique de FERMI.

Il est essentiel de remarquer que chacun des trois groupes de termes est covariant par rapport au groupe de la relativité et cela indépendamment des deux autres. *Par conséquent, on peut tenter de généraliser la théorie en posant*

$$
(32\,a) \qquad \left\{ \begin{aligned} S_\nu = hci \Bigg[& c_1 \left(\frac{\partial \psi_1^*}{\partial x^\nu} \psi_1 - \psi_1^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} \right) + c_2 \left(\psi_2 \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x^\nu} \psi_2^* \right) \\ & + c_3 \left(\frac{\partial \psi_1^*}{\partial x^\nu} \psi_2 - \psi_2^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x^\nu} \psi_1 - \psi_1^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x^\nu} \right) \Bigg] \end{aligned} \right.
$$

avec des coefficients réels c_1, c_3, c_2 indéterminés. On constate aisément que cette expression est : 1) hermitique ; 2) covariante du point de vue relativité, et 3) qu'elle satisfait à l'équation de continuité $\sum_\nu \frac{\partial S_\nu}{\partial x^\nu} = 0$.

De plus, on obtient de (29) pour la charge totale.

$$
(21\,a) \qquad \bar{e} = \int \rho dV = \sum_k (c_1 a_k^* a_k - c_2 b_k^* b_k)
$$

au lieu de (21). La signification des constantes c_1 et $-c_2$ est par conséquent la charge des particules 1 et 2, tandis que c_3 détermine la fréquence des processus de production des paires.

La question suivante se pose: de quelle manière le cas $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ de notre théorie du paragraphe 1 se distingue-t-il du cas général ? *La réponse est donnée par la condition* (9) *de permutabilité de* $\rho(x)$ *et* $\rho(x')$. Si on calcule $[\rho(x), \rho(x')]$ avec l'expression (31*a*) générale, on trouve après un calcul un peu long, que cette expression n'est égale à zéro, que si on a

$$c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 \qquad \text{et} \qquad c_1 c_3 = c_2 c_3$$

c'est-à-dire $c_1 = c_2$ et $c_3 = \pm c_1$. Mais le signe de c_3 est arbitraire, parce qu'on peut substituer ψ_2 et ψ_2^* par $-\psi_2$ et $-\psi_2^*$ sans changer les relations de commutation. *Le cas de la théorie du paragraphe* 1 *est par conséquent le seul, où* $\rho(x)$ et $\rho(x')$ *sont commutables.*

On peut maintenant établir la théorie pour le cas du principe d'exclusion. Pour que N_k^+ et N_{-k}^- aient les valeurs propres 0, 1 il faut poser

$$\text{(III}') \quad [a_k, a_l^*]_+ = \delta_{kl},\ [b_k, b_l^*]_+ = \delta_{kl}, [a_k, b_l^*]_+ = [a_k^*, b_l]_+ = [a_k, a_l]_+ = [b_k, b_l]_+ = 0,$$

où $[A, B]_+$ est l'abréviation de $AB + BA$ et on trouve

$$(28') \quad [\psi_1(\vec{x}, t), \psi_1^*(x', t)]_+ = \frac{1}{2}\, g(\vec{x} - \vec{x'}) \quad [\psi_2(\vec{x}, t), \psi_2^*(x', t)]_+ = +\frac{1}{2}\, g(\vec{x} - \vec{x'}).$$

Les relations (29) restent valables également pour le cas de la statistique de FERMI. (32*a*) est déjà écrit de telle manière que les conditions de covariance relativiste et l'équation de continuité soient satisfaites, Il est important de signaler que les coefficients c_1, c_2, c_3 doivent être réels pour que $\rho(x)$ soit hermitique. Si on cherche les conditions pour que $[\rho(x), \rho(x')]_- = 0$ dans le cas du principe d'exclusion, on trouvera

$$c_1^2 = c_2^2 = -c_3^2, \qquad c_1 c_3 = c_2 c_3.$$

Le signe — devant c_3^2 a pour effet, que la seule solution à coefficients réels possible est la solution banale $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. On peut donc résumer : *Dans le cas du principe d'exclusion il est impossible de satisfaire simultanément à l'invariance relativiste de la théorie et à la condition, que* $\rho(x)$ *et* $\rho(x')$ *soient commutables.*

Nous n'avons pas essayé de vérifier la possibilité d'une théorie avec des $\rho\,(x)$ non commutables en différents points de l'espace, — théorie, qui certainement donnerait lieu à des difficultés pour les relations de commutation du champ électromagnétique — et nous nous sommes contentés de constater, que le cas de la statistique d'EINS-

TEIN-BOSE se distingue par sa simplicité dans le cas de la théorie scalaire relativiste.

§ 4. Cas de la présence d'un champ électromagnétique Comparaison des résultats avec la théorie des trous

En revenant à la théorie développée au paragraphe 2, passons à la discussion du cas où apparaît un champ électromagnétique. Pour simplifier considérons les potentiels Φ_μ et le champ $F_{\mu\nu}$ comme des nombres ordinaires. On a alors la fonction de LAGRANGE du champ matériel.

$$(33)\qquad L = -h^2c^2 \sum_{\nu=1}^{4} \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu} + \frac{ie}{hc}\Phi_\nu\psi^*\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - \frac{ie}{hc}\Phi_\nu\psi\right) - m^2c^4\psi^*\psi.$$

Les impulsions canoniquement conjuguées aux ψ, ψ^* deviennent

$$(34)\qquad \pi = \frac{1}{h}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} = h\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - ie\Phi_0\psi^*, \quad \pi^* = \frac{1}{h}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\psi^*}{\partial t}} = h\frac{\partial\psi}{\partial t} + ie\Phi_0\psi$$

expressions qui remplacent les expressions (4). La fonction hamiltonienne devient

$$(35)\qquad H = \int (\pi\dot\psi + \pi^*\dot\psi^* - L)dV = H_0 + H_1,$$

avec

$$(35_0)\qquad H_0 = \int \left\{ \pi\pi^* + h^2c^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + m^2c^4\psi^*\psi \right\} dV$$

et

$$(35_1)\ H_1 = ie\int \Phi_0(\pi^*\psi^* - \pi\psi)dV + \int\left\{ehc \sum_{k=1}^{3} \Phi_k\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\psi\right) + e^2\sum_{k=1}^{3}\Phi_k^2\psi^*\psi\right\}dV.$$

Ce sont les nouvelles expressions pour π et π^* qui remplissent les relations canoniques de commutation

$$(\mathrm{I})\qquad i[\pi(x, t), \psi(x', t)] = \delta(x - x'), \quad i[\pi^*(x, t), \psi^*(x', t)] = \delta(x - x').$$

Les composantes du quadrivecteur densité-courant électrique qui satisfont à l'équation de continuité (6), deviennent

$$S_\nu = ehci\left[\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu} + \frac{ie}{hc}\Phi_\nu\psi^*\right)\psi - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - \frac{ie}{hc}\Phi_\nu\psi\right)\psi^*\right] \tag{36}$$

où

$$\rho = -iS_4 = -ei[(h\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - ie\Phi_0\psi^*)\psi - (h\frac{\partial\psi}{\partial t} + ie\Phi_0\psi)\psi^*] = -ei(\pi\psi - \pi^*\psi^*), \tag{36a}$$

$$S_k = ihc\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\psi^*\right) - 2e\Phi_k\psi^*\psi. \tag{36b}$$

La seconde expression de ρ montre, que les énoncés de la propriété de commutation et des valeurs propres de $\rho(x)$ restent les mêmes ici comme dans le cas de l'absence de forces.

L'équation d'onde est, conformément à la règle (4),

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{ie}{hc}\Phi_k\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{ie}{hc}\Phi_k\right)\psi \\ &-\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{hc}\Phi_0\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{hc}\Phi_0\right)\psi - \frac{m^2c^2}{h^2}\psi = 0.\end{aligned}\right. \tag{37}$$

On peut introduire dans la fonction hamiltonienne l'espace d'impulsion et les variables a_k, a_k^*, b_k, b_k^* définies comme au paragraphe 2. H^0 est donné par la formule (19) et en introduisant l'élément de matrice f_{kl} correspondant à une fonction $f(x)$ définie par

$$f_{kl} = \frac{1}{V}\int f(x)e^{-i(\vec{k}-\vec{l})\vec{x}}dV\,; \tag{38}$$

on trouve pour H, définie par (35_1) :

$$\left\{\begin{aligned}H_1 = {}&\frac{1}{2}e\sum_k\sum_l \Phi^0_{kl}\left[\frac{E_k+E_l}{\sqrt{E_kE_l}}(a_k^*a_l - b_l^*b_k) + \frac{E_k - E_l}{\sqrt{E_kE_l}}(a_lb_k - a_k^*b_l^*)\right] \\ &+\frac{1}{2}\sum_k\sum_l\frac{1}{\sqrt{E_kE_l}}[hce(\vec{\Phi}_{kl}, \vec{k}+\vec{l}) - e^2(\vec{\Phi}^2)_{kl}] \\ &\times(a_k^*a_l + b_kb_l^* - a_k^*b_l^* - b_ka_l).\end{aligned}\right. \tag{39}$$

On voit aisément que ce sont des éléments de matrice provenant de a_lb_k et $a_k^*b_l^*$ qui donnent lieu à la production et l'annihilation des paires.