ANNALES DE L'I. H. P.

MARSTON MORSE

Sur le calcul des variations

Annales de l'I. H. P., tome 9, n° 1 (1939), p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1939__9_1_1_0>

Sur le calcul des variations

par

Marston MORSE.

Cet exposé est une courte introduction à la théorie moderne des points critiques de fonctions et en particulier au calcul des variations du point de vue global (in the large).

Kronecker, Poincaré et Maxwell connaissaient l'existence de relations portant sur le nombre des points critiques de fonctions. Le « minimax principle » de Birkhoff est une relation de cette espèce. Ces premiers résultats étaient fragmentaires : on n'avait pas plus de deux relations. Aujourd'hui nous savons qu'il y a autant de relations entre le nombre des points critiques et les nombres de Betti du domaine de définition de la fonction qu'il y a de variables indépendantes.

Les problèmes aux limites du calcul des variations « in the large » peuvent être considérés comme des problèmes de la théorie des points critiques de fonctions d'une infinité de variables.

Nous suivrons l'ordre historique du développement de la théorie et nous considérerons d'abord une fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables, à points critiques non dégénérés. Nous continuerons par l'étude du cas non dégénéré dans le calcul des variations, en nous bornant, en général, à signaler les analogies avec le cas précédent; on verra ainsi apparaître la structure générale de la théorie.

Dans la dernière partie nous ne nous limiterons plus au cas non dégénéré. Nous introduirons une définition topologique des points critiques et nous utiliserons la théorie des groupes sous-jacents. Les cycles singuliers, primitivement employés, seront remplacés par des cycles de Vietoris. Nous donnerons ici, pour la première fois, un important exemple montrant la nécessité d'employer les cycles de Vietoris si l'on veut obtenir une généralité convenable. La notion de semi-continuité inférieure, si utile dans la théorie du minimum, apparaît ici inadéquate et elle est remplacée par celle de *réductibilité supérieure*. Nous allons tâcher de rendre claire la nécessité et l'importance de ces innovations.

I. — Le cas non dégénéré.

1. **La fonction F.** — Soit M une variété de dimension n, représentée localement sous la forme

$$x^i = x^i(u_1, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, \ldots, m > n)$$

où les fonctions du second membre sont de classe C‴, avec une matrice fonctionnelle de rang n. Nous supposons M connexe et compact. P étant un point quelconque de M, soit F(P) une fonction uniforme à valeurs réelles, localement représentable sous la forme

$$F = \varphi(u_1, \ldots, u_n) \tag{1}$$

où $\varphi(u)$ est de classe C‴. Un *point critique* de F est un point pour lequel les dérivées partielles de φ par rapport aux u_i sont nulles :

$$\varphi_{u_1} = \ldots = \varphi_{u_n} = 0. \tag{2}$$

Un point critique P est dit *non dégénéré* si le Hessien H de φ au point P n'est pas nul. Le nombre de racines caractéristiques négatives du déterminant H est appelé l'*index* ν du point critique P. Il peut prendre des valeurs comprises entre zéro et n. Si $\nu = 0$, F a un minimum relatif, si $\nu = n$, un maximum relatif.

Les points critiques sont isolés dans le cas non dégénéré car le jacobien des fonctions φ_{u_i} est précisément H qui doit alors être différent de zéro en P.

On a le théorème fondamental suivant :

Théorème 1.1. — *Si* R_k *est le k-ième nombre de Betti d'une variété* M *de classe* C‴ *à n dimensions, et* M_k *le nombre de points critiques d'index k d'une fonction de classe* C‴ *définie sur* M, *on a*

$$M_k \geqq R_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Les homologies qui définissent les nombres de Betti, ont pour coefficients des entiers naturels mod. 2. On peut aussi utiliser une topologie dans laquelle les cellules et cycles ont leurs coefficients pris dans un groupe abélien arbitraire.

Comme illustration du théorème, considérons un tore dans l'espace des x, y, z, ayant l'axe des y comme axe de révolution. Prenons comme fonction F la valeur de z sur M. F a quatre points critiques sur M, les points p_1 et p_2 où F a son maximum et son minimum sur le tore, et les points p_3 et p_4 où F a son maximum et son minimum sur l'équateur intérieur du tore. Les index de p_1, p_2, p_3, p_4 sont respectivement 0, 2, 1, 1. De plus

$$R_0 = 1, \quad R_1 = 2, \quad R_2 = 1$$

et l'on voit que ces valeurs satisfont au théorème 1.1.

Nous allons donner de brèves indications sur la démonstration du théorème. Elle repose sur la théorie des groupes sous-jacents.

2. Théorie des groupes sous-jacents. — Soit G un groupe abélien écrit additivement et qui admette un domaine d'opérateurs dont les éléments forment un corps Δ. A certains éléments de G, nous associons un élément $\rho(u)$ dans un ensemble d'éléments simplement ordonné $[\rho]$. L'ensemble $[\rho]$ peut en particulier être l'ensemble des nombres réels. Nous appelons $\rho(u)$ le *rang* de u. Le rang $\rho(0)$ n'est pas défini. Les éléments de G avec rang, auxquels nous adjoignons O, ne forment pas en général un groupe. Un sous-groupe g de G sera appelé un sous-groupe permis si, quand u est dans g et δ dans Δ, δu est dans g. Soit A une propriété de certains des éléments de G. Par un sous-groupe de G ayant la propriété A, nous entendons un sous-groupe de G dont tous les éléments, à l'exception éventuelle de l'élément O, ont la propriété A. Le groupe g sera appelé maximal s'il n'est sous-groupe propre d'aucun sous-groupe de G ayant la propriété A.

Nous supposons que le rang $\rho(u)$ satisfait aux conditions suivantes :

I. Si u a un rang et si $\delta \neq 0$

$$\rho(u) = \rho(\delta u).$$

II. Si u, v et $u + v$ ont des rangs

$$\rho(u + v) \leqq \max[\rho(u), \rho(v)].$$

III. Si u et v ont des rangs inégaux, $u + v$ a un rang.

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Soit g un sous-groupe permis de* G *dont les éléments ont des rangs, et dont la dimension est au plus aleph-zéro. Dans ce cas, g est somme directe de sous-groupes maximaux $g(\rho)$ de g, de rangs respectifs ρ.*

La première démonstration de ce théorème est due à R. Baer. L'auteur avait antérieurement démontré un théorème analogue quand les rangs sont bien ordonnés, comme dans le cas qui nous occupe; sans restrictions convenables sur le rang, un théorème de cette espèce serait faux.

3. **Démonstration du théorème 1.1.** — Soit H une classe d'homologie non triviale de k-cycles u sur M. La classe H est composée de k-cycles homologues non frontières. Si u se trouve sur la région de M où $F \leqq C$, nous appelons C une *limite de cycle* pour u et H. La plus grande limite inférieure de toutes les limites de cycles de k-cycles dans H sera appelée le rang s de H. Ce rang est déterminé par chacun des k-cycles u dans H. Nous le noterons $s(u)$ et l'appellerons le rang de u. Nous énonçons le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Si les points critiques de* F *sont non-dégénérés, il existe un cycle* V *dans la classe d'homologie* H *qui appartient à la région de* M *où* $F \leqq s(V)$.

Le théorème 3.1 serait faux si l'on omettait l'hypothèse de non dégénérescence, comme nous verrons dans le paragraphe 8. C'est ce point qui nous conduit à l'emploi des cycles de Vietoris.

Pour illustrer la notion de rang, revenons à la fonction $F = z$, définie sur le tore d'axe Oy dans l'espace x, y, z. Soit H la classe d'homologie d'un point arbitraire u sur M; alors $s(u)$ est égal au minimum de F. Soit H la classe d'homologie définie par un cercle générateur du tore; alors $s(u)$ est égal au minimum de F sur l'équateur intérieur. Si H est la classe d'homologie définie par l'équateur intérieur, $s(u)$ sera égal au maximum de F sur l'équateur intérieur. Finalement, si H est la classe d'homologie définie par le tore lui-même, $s(u)$ sera égal au maximum de F. Le théorème 3.1 est satisfait dans chacun de ces cas.

Le rang $s(u)$ satisfait aux conditions du paragraphe 2, de sorte que le théorème **2**. 1 est valable avec $\rho(u) = s(u)$. On prend pour groupe G le groupe de tous les k-cycles, pour sous-groupe g un sous-groupe maximal de k-cycles non frontières. Dénotons les rangs respectifs de k-cycles non frontières par $s_1, \ldots, s_q$. En vertu du théorème **2**. 1, g est une somme directe

$$g = g_1 + \ldots + g_q \tag{3.1}$$

dans laquelle g_i est un sous-groupe maximal de k-cycles de g de rang s_i. Mais le nombre de Betti R_k est égal à la dimension de g_k de sorte que de (**3**. 1) il résulte

$$R_k = \dim g_1 + \ldots + \dim g_q. \tag{3.2}$$

On montre ensuite que le nombre de points critiques d'index k pour lesquels $F = s_i$ est au moins égal à la dimension g_i, de sorte qu'il résulte de (**3**. 2) que

$$\dim g_1 + \ldots + \dim g_q \leqq M_k. \tag{3.3}$$

Le théorème **1**. 1 résulte alors de (**3**. 2) et de (**3**. 3).

Nous allons donner maintenant les résultats correspondants dans le calcul des variations.

4. Calcul des variations. — La fonction F est ici une intégrale sur la variété M, qui est localement de la forme

$$F = \int_C f(u_1, \ldots, u_n; u'_1, \ldots, u'_n)\, dt$$

avec des conditions aux limites sur C. Pour simplifier, supposons que la courbe C joigne deux points fixes A et B, et que F soit, par exemple, la longueur de la courbe sur M, quoique la théorie s'applique également au cas où $f > 0$, quand $(u') \neq 0$ et que le problème est régulier positif au sens de Hilbert.

L'analogue d'un point critique est une courbe critique, c'est-à-dire une géodésique g joignant A et B. Le cas non dégénéré est celui où A et B ne sont pas des points conjugués sur g. La définition de la non dégénérescence peut aussi être donnée de façon analogue à celle du paragraphe **1**. Commençons par choisir un système de coordonnées locales $(x, y_1, \ldots, y_n)$, $m = n - 1$, au voisinage de g, tel que l'équation de g soit de la forme $y_1 = \ldots = y_m = 0$, $a \leqq x \leqq b$. L'intégrale de la longueur est alors sous forme non paramétrique et on a les équations classiques de Jacobi correspondant à g

$$I_i(\eta) = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta'_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

où Ω est une forme quadratique par rapport à m variables η_i et leurs dérivées η'_i par rapport à x, les coefficients de la forme étant des fonctions de x. Rappelons qu'un point critique p de la fonction φ du paragraphe 1 est non dégénéré si aucune des racines caractéristiques λ_j du Hessien H de φ en p n'est nulle. L'analogue de l'équation caractéristique du Hessien est ici la suivante

$$(4.2) \qquad \begin{cases} I_i(\eta) - \lambda \eta_i = 0 \\ \eta_i(a) = \eta_i(b) = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Il existe une infinité de solutions $\eta_i(x)$ de (4.2) avec des valeurs constantes de λ

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \ldots$$

s'arrêtant seulement à $+\infty$. Poursuivons l'analogie avec le paragraphe 1; g est appelé *non-dégénéré* si aucune de ses racines caractéristiques ne s'annule. On montre aisément que cette condition est équivalente à la condition que A et B ne soient pas conjugués sur g. L'index ν de g se définit maintenant comme le nombre de racines λ_i négatives. Toujours comme dans le paragraphe 1, M_k sera le nombre de courbes critiques d'index k. k parcourt l'ensemble des entiers non négatifs et M_k peut être infini.

5. L'espace Ω. — Nous arrivons maintenant aux analogues des nombres de Betti R_i. On peut les définir de manière purement topologique quand M est donné. Soit Ω l'ensemble de toutes les courbes continues qui joignent A à B sur M. Ces courbes peuvent avoir des points multiples et ne pas avoir une longueur finie. A deux éléments λ, μ, de Ω nous assignons la distance de Fréchet habituelle, à savoir, la plus grande limite inférieure de la distance ordinaire de deux points correspondants de λ et μ dans un homéomorphisme quelconque entre λ et μ. Si $d(\lambda, \mu) = 0$, nous considérons λ et μ comme confondus. Cette métrique satisfait aux axiomes classiques. Nous pouvons maintenant parler de k-cycles singuliers sur Ω. Le nombre de Betti R_k de Ω est de nouveau la dimension d'un groupe maximal de k-cycles non frontières sur Ω. Le groupe g n'est plus dorénavant supposé de dimension finie, mais on peut montrer que sa dimension est au plus aleph-zéro. Nous attribuons comme précédemment, des rangs $s(u)$ aux k-cycles non frontières et ces rangs satisfont aux conditions I, II, III du paragraphe 2.

L'ensemble des différents rangs s_i est au plus dénombrable et, comme tout à l'heure, on a la décomposition en somme directe

$$g = g_1 + G_2 + \ldots,$$

où g_i est un sous-groupe maximal de k-cycles de rang s_i. Nous opérons maintenant exactement comme au paragraphe 3 et nous obtenons le théorème suivant :

Théorème. — *Si M_k est le nombre de courbes critiques d'index k joignant A et B sur M, et R_k le $k^{\text{ième}}$ nombre de Betti de l'espace fonctionnel $\Omega(M)$, on aura*

$$M_k \leqq R_k.$$

Ici R_k peut être infini et dans ce cas M_k doit aussi être infini. On montre que les nombres R_k sont indépendants des extrémités A, B, choisies sur M. Leur indépendance à l'égard d'une transformation topologique de M est évidente.

6. Exemple : Géodésiques sur l'image d'une n-sphère. — Supposons que M soit l'image topologique d'une n-sphère, $n > 1$, et que A et B soient deux points fixes sur M. Dans ce cas, les nombres de Betti sont $R_k = 1$ pour

$$k = (n-1)r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6.1}$$

tandis que les autres sont nuls. Supposons que A et B soient tels que A n'est conjugué à B sur aucune des géodésiques joignant A à B. Il résulte du théorème (5.1) que, pour tout k donné par (6.1), il y a au moins une géodésique g_k joignant A à B sur M, sur laquelle il y a exactement k points conjugués de A. La longueur g_k devient infinie avec k.

Nous pouvons dire que le cas non dégénéré est le plus *probable* dans le sens suivant. Nous considérons la paire (A, B) comme un point de l'espace produit $M \times M$, et nous assignons à $M \times M$ la métrique produit. On montre sans difficulté que les points (A, B) de $M \times M$ tels que A ne soit conjugué de B sur aucune géodésique, ont la même mesure de Lebesgue que l'espace $M \times M$.

II. — La théorie générale.

7. **Points critiques homotopiques.** — Nous commencerons par donner une définition topologique d'un point critique, qui éliminera la nécessité de distinguer entre les fonctions d'un nombre fini ou infini de variables. Nous partons de nouveau d'un espace métrique Ω de points $p, q, \ldots$. Soit $F(p)$ une fonction réelle uniforme de p sur Ω. Si F est continue, un point p sera dit *ordinaire homotopique* s'il existe une déformation continue d'un voisinage de p, relatif à l'ensemble $F \leqq F(p)$, pour laquelle F décroit pour tout point déplacé, et pour laquelle p est effectivement déplacé. Un point qui n'est pas ordinaire homotopique est appelé point *critique homotopique*. Par exemple, dans le plan des x, y, l'origine est un point critique homotopique pour les fonctions x^2+y^2, x^2-y^2, $-x^2-y^2$, mais non pour la fonction x^3.

Plus généralement, on peut ne pas supposer que F soit continue, ni même semi-continue inférieurement, et alors la définition ci-dessus doit être légèrement modifiée comme nous allons voir.

Nous dirons qu'une déformation continue D d'un sous-ensemble A de Ω admet une fonction de déplacement $\delta(e)$ sur A si, chaque fois que q précède r sur une trajectoire de D et que $\operatorname{dist}(qr) > e > 0$, on a

$$F(q) - F(r) > \delta(e),$$

où $\delta(e)$ est une fonction réelle positive uniforme de e. Une déformation continue d'un sous-ensemble E de Ω, qui possède une fonction de déplacement sur chaque sous-ensemble compact de E, est appelé une F-déformation de E. Un point p sera appelé *ordinaire-homotopique* s'il existe un voisinage de p, relatif à $F \leqq F(p)$, admettant une F-déformation qui déplace p. On a alors le théorème suivant :

Théorème 7.1. — *Pour les fonctions* F *du paragraphe* 1 *et du* *paragraphe 4 chaque point critique non dégénéré représente un point critique homotopique de* F.

Un point critique d'une fonction F, défini par l'annulation des dérivées de F sera appelé un point critique différentiel. On voit aisément que si F est localement de classe C'' un point qui est ordinaire différentiel, est aussi ordinaire homotopique.

8. Nécessité de l'emploi des cycles de Vietoris. — Le théorème 3.1 est fondamental dans la théorie générale. Il contient comme cas particulier la proposition : F prend son minimum absolu en au moins un point. Si l'on abandonne l'hypothèse de non-dégénérescence, le théorème 3.1 est faux. Le théorème serait encore faux si nous remplacions l'hypothèse de non-dégénérescence par la supposition que les valeurs critiques sont en nombre fini comme le montre l'exemple suivant.

Soit S une surface de la forme

$$z = z(x, y) = x^r \left[y - \sin \frac{1}{x} \right]^2 (x-1)^r \qquad (0 < x \leqq 1;\ -1 \leqq y \leqq 1)$$

avec $z = 0$ quand $x = 0$. Si r est suffisamment grand, $z(x, y)$ sera de classe prescrite C^n. Dans le plan (x, z), soit h une courbe simple, fermée, convexe, régulière, de classe C^n ayant les propriétés suivantes : la courbe h contient le segment k $(0 \leqq x \leqq 1)$ de l'axe réel; sur h, on a $z < 0$ excepté sur k. Soit S_1 la surface cylindrique de l'espace x, y, z, de génératrices parallèles à Oy, ayant pour trace dans le plan (x, z) la courbe $h - k$, et comprise entre $y = -1$ et $y = +1$. La surface $M = S + S_1$ est de classe C^n. Considérons la fonction $F = z$ sur S. Les seuls points critiques homotopiques de F sont les points de M pour lesquels z prend sa valeur absolue minima et les points du plan (x, y) appartenant à l'ensemble suivant :

(8.2) $\qquad x = 1 \qquad (-1 \leqq y \leqq 1),$

(8.3) $\qquad x = 0 \qquad (-1 \leqq y \leqq 1),$

(8.4) $\qquad y = \sin \frac{1}{x} \qquad (0 < x \leqq 1).$

Il y a exactement deux valeurs critiques.

Pour montrer que le théorème 3.1 est faux si la condition de dégénérescence n'est pas remplie, considérons la classe H d'homologie sur M définie par la section $y = 0$ de M. Cette section représente un 1-cycle. Il est clair qu'on peut joindre n'importe quel point de (8.2) à un point de (8.3) par une courbe située sur M et telle que $z \leqq e$, e étant une constante positive donnée. Or, si l'on prend $e = 0$, cette jonction est impossible. Il en résulte que le rang de la classe d'homologie H est zéro, mais qu'il n'y a pas de cycle V dans H sur $F \leqq 0$.

Si, au contraire, nous utilisons des cycles de Vietoris, en définissant les limites et les rangs des cycles comme auparavant, nous avons le théorème général suivant :

THÉORÈME 8.1. — *Si les sous-ensembles* $F \leqq C$ *de* Ω *sont compacts, et si* u *est un cycle de Vietoris de rang* s, *il y a un cycle de Vietoris* V *dans la classe d'homologie de* u, *contenu dans la région* $F \leqq s$.

Le rang d'un cycle de Vietoris satisfait aux conditions de rang du paragraphe 2. Le théorème 2.1 conduit donc au théorème suivant :

THÉORÈME 8.2. — *La somme des dimensions des sous-groupes maximaux* $g(s)$ *des* k-*cycles de Vietoris non frontières de rangs* s, *est au moins égale au plus petit des deux nombres aleph-zéro et le* $k^{\text{ième}}$ *nombre de Betti* R_k *de* Ω.

9. **F-accessibilité et réductibilité supérieure.** — L'hypothèse de compacité pour les sous-ensembles $F \leqq C$ de Ω est satisfaite dans la théorie ordinaire des variations, en particulier quand F est la longueur, mais elle n'est pas nécessaire pour la conclusion du théorème 8.1. Cette conclusion est si importante que nous en faisons une de nos deux conditions sur F et Ω, sous le nom de *F-accessibilité*.

Sous l'hypothèse de F-accessibilité, tout k-cycle *non frontière qui est homologue à zéro mod.* $F < C + e$ *pour tout* e *positif*, *est homologue à un* k-*cycle sur* $F \leqq C$.

Dans la théorie classique du minimum $F \geqq 0$, les hypothèses fondamentales sont la compacité de Ω et la semi-continuité inférieure de F. La fonction F atteint alors son minimum absolu en un certain point p. Dans notre théorie, la F-accessibilité remplace la compacité et une condition de réductibilité supérieure remplace la semi-continuité inférieure. Le problème ici est le suivant : Sous quelles conditions existe-t-il des points critiques homotopiques dans lesquelles l'on obtienne pour F les différents rangs des cycles ? La condition de semi-continuité inférieure ne convient que quand les cycles sont de dimensions zéro, et elle est remplacée ici par la condition de réductibilité supérieure. Rappelons que F est continue en p si, à toute constante positive e, il correspond un voisinage de p pour lequel

$$F(p) - e < F(q) < F(p) + e.$$

L'inégalité de gauche sert à définir la semi-continuité inférieure et elle est satisfaite par les fonctions de la théorie des variations classiques. L'inégalité de droite n'est pas satisfaite en général. Mais elle est satisfaite après une F-déformation convenable du voisinage de p, en accord avec la condition suivante, appelée condition de *réductibilité supérieure*.

On dit qu'une fonction F est réductible supérieurement en p, si, à chaque constante positive e, il correspond un voisinage de p admettant une F-déformation en un ensemble où $F \leqq F(p) + e$. Une fonction F qui est semi-continue inférieurement n'est pas nécessairement réductible supérieurement, et réciproquement. On a le théorème important suivant :

THÉORÈME 9.1. — *Si* Ω *est* F*-accessible et si* F *est réductible supérieurement en chaque point, tout rang de cycle est donné par* F *pour un certain point critique homotopique.*

Retournant au calcul des variations, nous considérons l'espace Ω du paragraphe 5 et la fonction F définie sur Ω. On montre que Ω est F-accessible, et F réductible supérieurement, de sorte que le théorème 9.1 s'applique. De plus, on montre que les points critiques homotopiques dont ce théorème affirme l'existence, sont des extrémales ordinaires. Il est possible d'aller plus loin, de définir les index des points critiques d'une manière purement topologique et d'obtenir une forme plus générale pour le théorème 1.1.

L'exposé de cette généralisation ne saurait trouver place dans cette brève introduction. Nous renvoyons le lecteur au fascicule suivant du Mémorial des Sciences Mathématiques : Marston Morse, *Functional topology and abstract variational theory*, qui paraîtra sous peu. On y trouvera les autres références.

FIN.