

ANNALES DE L'I. H. P.

P.A.M. DIRAC

Les transformations de jauge en Électrodynamique

Annales de l'I. H. P., tome 13, n° 1 (1952), p. 1-42

http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1952__13_1_1_0

© Gauthier-Villars, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Les transformations de jauge en Électrodynamique

par

P. A. M. DIRAC.

1. **Les transformations de jauge pour un champ électromagnétique donné.** — Considérons l'espace à quatre dimensions de la théorie de la relativité restreinte. Soient x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) les quatre coordonnées et $g^{\mu\nu}$ la métrique donnée par

$$g^{00} = 1, \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1, \quad g^{\mu\nu} = 0 \quad \text{pour } \mu \neq \nu.$$

Le champ électromagnétique est décrit par un tenseur antisymétrique du deuxième rang, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$). Ce tenseur satisfait aux équations de Maxwell,

$$(1) \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -j_\mu,$$

ou j_μ est le vecteur-densité de charge électrique et de courant. En différenciant (2) par rapport à x_μ , nous trouvons

$$(3) \quad \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0,$$

équation qui exprime la conservation de l'électricité. La conservation de la charge électrique est donc une conséquence des équations de champ de Maxwell.

Pour un champ électromagnétique donné $F_{\mu\nu}$, l'équation (1) montre que nous pouvons introduire des potentiels A_μ tels que

$$(4) \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}.$$

L'équation (2) devient

$$(5) \quad \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\nu \partial x^\mu} = j_\mu.$$

Les potentiels A_μ ne sont pas bien déterminés par le champ $F_{\mu\nu}$. Nous pouvons remplacer A_μ par $A_\mu + \frac{\partial S}{\partial x^\mu}$, où S est une fonction quelconque des quatre x_μ , sans changer $F_{\mu\nu}$. La transformation

$$(6) \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial S}{\partial x^\mu}$$

s'appelle une *transformation de jauge*, d'après une hypothèse que Weyl a proposée pour donner une signification géométrique à ces transformations dans la théorie de la Relativité générale.

Nous pouvons imposer aux potentiels A_μ la condition relativiste

$$(7) \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

L'équation (5) prend alors la forme plus simple

$$(8) \quad \square A_\mu = j_\mu.$$

Une transformation de jauge (6) qui conserve l'équation (7) doit satisfaire à

$$(9) \quad \square S = 0.$$

Ainsi, si nous imposons la condition (7), la variété des transformations de jauge est beaucoup plus restreinte.

Pour obtenir une description des phénomènes physiques, il faut établir un système d'équations dynamiques dans lequel les valeurs des composantes du champ en divers points apparaissent comme des variables dynamiques en interaction les unes avec les autres et avec les variables des particules. Il faut ensuite donner à ces équations la forme hamiltonienne et les quantifier pour obtenir une théorie de l'Électrodynamique quantique.

La théorie ordinaire d'Électrodynamique quantique, développée par Fermi (1) est basée sur les équations (4), (7) et (8) et contient seulement les transformations de jauge restreintes qui satisfont à (9). La

(1) FERMI, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 4, 1932, p. 87.

théorie que j'ai discutée dans mes conférences de 1939 à l'Institut Henri Poincaré est du même type (2). Je voudrais cette fois-ci montrer comment on peut établir une théorie de l'Électrodynamique quantique basée sur les équations (2) et (4) sans la condition (7), et contenant ainsi les transformations de jauge générales avec une fonction S quelconque. Nous obtiendrons ainsi une théorie qui est mathématiquement plus puissante et qui nous permettra d'écrire les équations sous des formes très différentes.

2. La fonction d'action. — La méthode la plus simple pour établir une théorie dynamique relativiste sous forme hamiltonienne est de prendre au début une fonction d'action invariante par rapport aux transformations de Lorentz. On peut prendre la dérivée de l'action par rapport au temps comme fonction de Lagrange et passer à la fonction d'Hamilton par des règles bien connues.

La fonction d'action est une intégrale sur tout l'espace à quatre dimensions

$$I = \int \mathcal{L} d^4x, \quad \text{où } d^4x = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3.$$

La densité d'action \mathcal{L} est une fonction des variables du champ V et de leurs premières dérivées $\frac{\partial V}{\partial x_\mu}$. Nous écrirons V^μ au lieu de $\frac{\partial V}{\partial x_\mu}$ pour abréger la notation, et généralement nous ajouterons un indice supérieur μ à une quantité localisée quelconque pour indiquer sa dérivée par rapport à x_μ . Nous aurons ainsi

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(V, V^\mu).$$

On obtient les équations du champ en posant $\delta I = 0$ pour une variation quelconque des variables de champ V . Nous avons

$$\delta I = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^\nu} \delta V^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} \delta V \right\} d^4x = 0,$$

qui donne

$$\int \left\{ - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^\nu} \right)^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} \right\} \delta V d^4x = 0.$$

(2) *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. 9, 1939, p. 13.

Ainsi les équations du champ sont

$$(10) \quad \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^\nu} \right)^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}.$$

Pour le champ électromagnétique seul, nous pouvons prendre simplement

$$(11) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu}) A^{\mu\nu}.$$

Quand il y a de la matière en interaction avec le champ électromagnétique, il faut ajouter un terme à la densité d'action,

$$(12) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{M},$$

où \mathcal{M} est une fonction des variables qui décrivent la matière et aussi des potentiels A_μ , et qui ne contient pas en général les dérivées $A_\mu{}^\nu$ des potentiels.

Avec la densité d'action (12), les équations du champ (10) donnent, pour $V = A_\mu$,

$$(13) \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial A^\mu}.$$

Cette équation est en accord avec l'équation de Maxwell (2), si l'on prend

$$(14) \quad j_\mu = -\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial A^\mu}.$$

L'équation (7) n'est pas nécessaire dans cette théorie.

Dans l'électrodynamique de Fermi il y a un terme additionnel $-\frac{1}{2}(A_\mu{}^\mu)^2$ dans l'expression (11) de l'action du champ électromagnétique tout seul. Ainsi, au lieu de (11) nous avons

$$(15) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu}) A^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (A_\mu{}^\mu)^2 = -\frac{1}{2} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (A_{\nu\mu} A_\mu{}^\nu) - \frac{1}{2} (A_{\nu\nu} A_\mu{}^\mu).$$

On peut omettre ici les deux derniers termes, puisqu'ils ne contribuent pas à l'intégrale I. Pour l'interaction du champ électromagnétique avec la matière nous aurons maintenant

$$(16) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \mathcal{M}$$

au lieu de (12).

Avec cette densité d'action, les équations du champ (10) donnent, pour $V = A_\mu$,

$$(17) \quad A_{\mu,\nu} = - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial A^\mu}$$

en accord avec (8) si nous prenons toujours (14). L'équation (7) est nécessaire pour obtenir les équations de Maxwell (2). Cette équation (7) n'est pas une conséquence du principe d'action $\delta I = 0$. Il faut l'introduire dans la théorie comme une *condition supplémentaire*.

Pour que cette condition supplémentaire soit en accord avec les équations du champ, il faut que la fonction \mathcal{N} ait une forme permettant des transformations de jauge. On peut satisfaire à cette condition en supposant qu'il existe une variable de champ θ qui n'entre pas directement dans \mathcal{N} , mais seulement par ses dérivées θ^μ et que θ^μ et A^μ apparaissent dans \mathcal{N} seulement dans la combinaison $A^\mu + \theta^\mu$, de sorte que \mathcal{N} reste invariant par rapport à la transformation (6) avec

$$(18) \quad \theta \rightarrow \theta - S.$$

Nous avons alors

$$(19) \quad \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial A^\nu} = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \theta^\nu}.$$

L'équation du champ (10) donne maintenant, pour $V = \theta$,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial A^\mu} \right)^\mu = 0.$$

A l'aide de (17) nous obtenons

$$\square A_{\mu,\mu} = 0,$$

résultat qui montre que si l'équation (7) est initialement satisfaite ainsi que sa dérivée par rapport au temps, elle restera toujours valable.

Nous arrivons aux conclusions suivantes :

1° Si la fonction \mathcal{N} a une forme qui permet des transformations de jauge, nous pouvons établir une électrodynamique à transformations de jauge générales, en utilisant la densité d'action (12).

2° Si la fonction \mathcal{N} a une forme qui permet des transformations de jauge, nous pouvons, en employant la densité d'action (16) et en introduisant la condition supplémentaire (7), établir une électrodynamique à transformations de jauge restreintes.

3° Si la fonction \mathcal{M} n'a pas une forme qui permet des transformations de jauge, nous pouvons toujours établir une électrodynamique, en accord avec les équations de Maxwell mais sans transformations de jauge, en utilisant la densité d'action (12).

4° Si la fonction \mathcal{M} n'a pas une forme qui permet des transformations de jauge, nous ne pouvons plus établir une électrodynamique en employant la densité d'action (16), parce que même la conservation d'électricité fera défaut.

3. Le passage à la forme hamiltonienne. Difficultés. Soit la fonction de Lagrange

$$(20) \quad L = \int \mathcal{L} d^3x, \quad \text{avec} \quad d^3x = dx_1 dx_2 dx_3.$$

La fonction de Lagrange est une fonction des coordonnées dynamiques q et des vitesses \dot{q} à un instant donné. Dans notre théorie actuelle, les q sont les potentiels $A_\mu(x_1, x_2, x_3)$ à un instant donné et les variables dynamiques nécessaires à la description de la matière. Les dérivées $A_\mu^0(x_1, x_2, x_3)$ des potentiels par rapport au temps sont des vitesses \dot{q} . Les autres dérivées $A_\mu^r(x_1, x_2, x_3)$ des A_μ , avec $r = 1, 2, 3$, sont naturellement fonctions des q .

Pour définir les moments conjugués p , il faut effectuer une variation $\delta\dot{q}$ des vitesses dans L et poser

$$(21) \quad \delta L = \sum p \delta\dot{q},$$

la somme étant remplacée par une intégrale si nécessaire. Appelons $B_\mu(x_1, x_2, x_3)$ le moment conjugué de $A^\mu(x_1, x_2, x_3)$. Nous avons alors, en employant la densité d'action (12),

$$(22) \quad B_\mu = F_{\mu 0}.$$

Donc

$$(23) \quad B_0 = 0.$$

Dans la méthode ordinaire qui permet de passer de la fonction de Lagrange à la fonction d'Hamilton, tous les moments doivent être des fonctions indépendantes des vitesses, pour qu'on puisse exprimer celles-ci en fonction des moments et des coordonnées dynamiques. Cette condition n'est pas satisfaite dans notre théorie actuelle, à cause de

l'équation (23); on en déduit qu'on ne peut pas y introduire l'hamiltonien par la méthode ordinaire.

C'est en raison de cette difficulté que Fermi a employé la densité d'action (16), pour laquelle nous avons

$$(24) \quad B_{\mu} = -A_{\mu}{}^0$$

au lieu de (22), ce qui permet d'introduire l'hamiltonien par la méthode ordinaire.

Pour établir une électrodynamique basée sur la densité d'action (12), il faut d'abord développer une méthode pour passer de la fonction de Lagrange à la fonction d'Hamilton sans qu'une équation comme (23) constitue un obstacle. Il est préférable d'ailleurs d'étudier ce développement en premier lieu pour la Mécanique générale, et ensuite en faire l'application à l'Électrodynamique.

4. Équations fortes et équations faibles. — Considérons un système dynamique à N degrés de liberté décrit par les coordonnées généralisées q_n ($n = 1, 2, \dots, N$) et les vitesses $\frac{dq_n}{dt}$ ou \dot{q}_n . Nous supposons qu'il existe un lagrangien, lequel pour l'instant peut être une fonction quelconque des coordonnées et des vitesses

$$(25) \quad L = L(q, \dot{q}).$$

Nous définissons les moments au moyen de

$$(26) \quad p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}.$$

Introduisons un processus de variation qui consiste à varier indépendamment chacun des nombres q_n, \dot{q}_n, p_n d'une petite quantité $\delta q_n, \delta \dot{q}_n, \delta p_n$ de l'ordre de ε et limitons nos approximations au premier ordre en ε . Par suite de cette variation, l'égalité (26) ne sera plus valable puisque son premier membre sera, après variation, différent du second d'une quantité de l'ordre de ε . Nous aurons dorénavant à distinguer entre deux sortes d'égalités : des égalités du type (26) dont la différence entre les deux membres est de l'ordre de ε lorsqu'on applique la variation en négligeant les puissances égales ou supérieures à ε^2 , et des égalités qui restent valables dans les mêmes conditions.

L'équation (25) est de ce dernier type, puisque par définition la

variation de L sera égale à la variation de $L(q, \dot{q})$. Nous appellerons les équations du premier type des *équations faibles*, pour lesquelles nous utiliserons le signe \approx et celles du dernier type des *équations fortes*, pour lesquelles nous conserverons le signe habituel $=$; l'équation (26) devient

$$(27) \quad p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}.$$

Les règles de l'algèbre des équations fortes et faibles sont les suivantes :

Si $A = 0$, on a

$$\delta A \approx 0,$$

Si $X \approx 0$, on a

$$\delta X \neq 0 \text{ en général.}$$

De l'équation faible $X \approx 0$ on peut déduire

$$\delta X^2 \approx 2X \delta X \approx 0,$$

ce qui permet d'en déduire l'équation forte

$$X^2 = 0.$$

De même, des deux équations faibles $X_1 \approx 0$ et $X_2 \approx 0$ on peut déduire l'équation forte

$$X_1 X_2 = 0.$$

Cela étant, il peut se faire que les N quantités $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$ qui constituent les seconds membres de (27) soient toutes des fonctions indépendantes des N vitesses \dot{q}_n . Dans ce cas, les équations (27) permettent de déterminer chaque \dot{q}_n en fonction des p et des q . Ce cas sera appelé le *cas usuel*; c'est le seul qu'on considère d'habitude en dynamique analytique.

Lorsque les $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ ne sont pas des fonctions indépendantes des vitesses, nous pouvons éliminer les \dot{q} des équations (27) et nous obtenons ainsi une ou plusieurs égalités

$$(28) \quad \emptyset(q, p) \approx 0$$

qui ne contiennent plus que les p et les q . On peut admettre que la forme de l'équation (28) est telle que sa variation soit de l'ordre de ε ; en effet, si cette variation était de l'ordre de ε^k , il suffirait de remplacer \emptyset par $\emptyset^{\frac{1}{k}}$ dans (28) pour que la condition mentionnée soit satisfaite.

Lorsqu'on applique la variation, les deux nouveaux membres de l'équation (28) diffèrent par une quantité de l'ordre de ε ; en conséquence c'est une équation faible et nous l'avons écrite correctement en employant le signe \approx .

Nous aurons besoin d'utiliser un système complet d'équations indépendantes du type (28) :

$$(29) \quad \mathcal{O}_m(p, q) \approx 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M).$$

Dire que les équations sont indépendantes signifie qu'aucun des \mathcal{O}_m ne peut être exprimé linéairement en fonction des autres, les coefficients étant des fonctions des p et des q .

Dire que le système est complet signifie que toute fonction des p et des q qui s'annule en vertu de (28) et dont la variation est de l'ordre de ε peut être exprimée en fonction linéaire des \mathcal{O}_m , les coefficients étant des fonctions des p et des q .

Nous pouvons donner une image de la relation entre équations fortes et équations faibles de la manière suivante. Soit un espace à $3N$ dimensions dans lequel les coordonnées d'un point soient les q , \dot{q} et les p . Il existe dans cet espace une région à $2N$ dimensions dans laquelle les équations (26) sont satisfaites; appelons-la R . Les équations (29) seront également satisfaites dans cette région puisqu'elles sont la conséquence de (26). Considérons maintenant tous les points de notre espace à $3N$ dimensions situés à une distance de R de l'ordre de ε . Ces points formeront une région à $3N$ dimensions, une sorte de carapace d'épaisseur ε que nous appellerons R_ε .

Toute équation faible est vraie dans la région R ; toute équation forte est valable dans la région R_ε .

§. Passage à la forme hamiltonienne. Méthode générale. — L'hamiltonien H est défini par

$$(30) \quad H = p_n \dot{q}_n - L;$$

formule dans laquelle on sommerà sur toutes les valeurs des indices répétés. Nous aurons

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta H \approx \delta(p_n \dot{q}_n - L) \\ \approx \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n. \\ \approx p_n \delta \dot{q}_n + \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n \end{array} \right.$$

δH ne dépend pas des $\delta \dot{q}_n$ et ce résultat important est vrai dans tous les cas et non seulement dans le cas usuel.

L'équation (30) fournit une définition de H comme fonction des \dot{q} , \dot{q} et des p , valable dans tout l'espace à $3N$ dimensions des q , \dot{q} et des p . Nous n'utiliserons cette définition que dans la région R_ε et dans cette région la relation (31) est valable au premier ordre. Cela signifie que si l'on garde les p et les q constants et qu'on varie les \dot{q} au premier ordre, la variation de H sera du second ordre. En conséquence, si l'on maintient p et q constants et si nous varions les \dot{q} d'une quantité finie, mais restant tout le temps dans la région R_ε (ce qui est possible lorsque nous ne sommes pas dans le cas usuel), la variation de H sera du premier ordre. Si nous restons dans la région R , la variation de H sera nulle. Il s'en suit que dans R , H est une fonction des p et des q seulement.

Si l'on désigne cette fonction par $\beta(q, p)$, on aura l'équation faible

$$(32) \quad H \approx \beta(q, p)$$

valable dans la région R . Dans le cas usuel, β est l'hamiltonien ordinaire.

Prenant un point quelconque dans R comme point de départ et appliquant une variation générale, on déduit de (31) :

$$\delta(H - \beta) \approx \left(\dot{q}_n - \frac{\partial \beta}{\partial p_n} \right) \delta p_n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n} + \frac{\partial \beta}{\partial q_n} \right) \delta q_n.$$

$\delta(H - \beta)$ ne dépend donc que des δq et δp . Si la variation est telle que l'on ne quitte pas la région R , on aura naturellement $\delta(H - \beta) = 0$. Donc $\delta(H - \beta)$ s'annule pour toute variation des p et des q ; on peut donc choisir les $\delta \dot{q}$ de manière que les équations (27) soient satisfaites. La seule restriction que cela impose aux δq et δp est la nécessité que (29) soit conservée, c'est-à-dire que les δq et δp conduisent à $\delta \mathcal{O}_m = 0$ pour tous les m . Donc $\delta(H - \beta)$ est nul pour toutes valeurs de δq et δp qui entraînent $\delta \mathcal{O}_m = 0$ et par conséquent, on aura, pour des valeurs arbitraires de δq , δp :

$$(33) \quad \delta(H - \beta) \approx v_m \delta \mathcal{O}_m,$$

avec des coefficients convenables v_m . Ces coefficients seront des fonctions des q , \dot{q} et p et pourront être exprimés au moyen de (27) en fonction des seuls q et \dot{q} . De (33) et (29) on déduit

$$\delta(H - \beta - v_m \mathcal{O}_m) \approx \delta(H - \beta) - v_m \delta \mathcal{O}_m - \mathcal{O}_m \delta v_m \approx 0,$$

d'où

$$(34) \quad H = \beta + v_m \mathcal{O}_m.$$

Nous avons là une équation forte qui est valable au premier ordre dans la région R_ε , par opposition à l'équation faible (32), laquelle n'est satisfaite que dans R .

L'équation (33) donne

$$\delta H \approx \delta \beta + v_m \delta \mathcal{O}_m \approx \frac{\partial \beta}{\partial p_n} \delta p_n + \frac{\partial \beta}{\partial q_n} \delta q_n + v_m \left(\frac{\partial \mathcal{O}_m}{\partial p_n} \delta p_n + \frac{\partial \mathcal{O}_m}{\partial q_n} \delta q_n \right).$$

Par comparaison avec (31) on obtient

$$(35) \quad \dot{q}_n = \frac{\partial \beta}{\partial p_n} + v_m \frac{\partial \mathcal{O}_m}{\partial p_n},$$

$$(36) \quad -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = \frac{\partial \beta}{\partial q_n} + v_m \frac{\partial \mathcal{O}_m}{\partial q_n}.$$

Les équations (35) donnent les \dot{q} en fonction des q , des p et des v . Elles montrent que les $2N$ variables q_n, \dot{q}_n peuvent être exprimées au moyen des $2N + M$ variables q_n, p_n, v_m entre lesquelles il existe M relations (29). Il ne peut y avoir d'autres relations entre ces variables, car autrement les $2N$ grandeurs q_n, \dot{q}_n ne seraient pas indépendantes. Chaque v doit donc être indépendant des autres ainsi que des q et des p . Ces v peuvent être considérées comme des sortes de vitesses servant à fixer les \dot{q} qui ne peuvent être exprimés en fonction des p et des q .

Lorsqu'on utilise la Dynamique sous sa forme hamiltonienne, on emploie comme variables de base les q , les p et les v , entre lesquelles il existe par hypothèse les relations (29) mais qui en dehors de cela sont indépendantes. Nous appellerons ces variables les *variables hamiltoniennes*.

Admettons que les équations habituelles du mouvement de Lagrange

$$(37) \quad \dot{p}_n \approx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n}$$

soient des équations faibles. En remplaçant dans (37) les p par leurs valeurs données par (27) on obtient des équations qui contiennent les accélérations \ddot{q}_n . Dans le cas usuel ces équations permettent de calculer tous les \ddot{q}_n en fonction des q et des \dot{q} . Dans le cas où l'on a M équations

tions (29), les équations du mouvement ne nous fourniront que $N - M$ relations pour déterminer les \dot{q} . Le reste des M équations de mouvement nous indiqueront la loi des variations des \mathcal{O}_m avec le temps. Pour la cohérence de la théorie, les \mathcal{O}_m doivent rester nuls; ces conditions seront examinées plus loin.

En vertu de (36), les équations du mouvement (37) deviennent

$$(38) \quad \dot{p}_n \approx - \frac{\partial \beta}{\partial q_n} - v_m \frac{\partial \mathcal{O}_m}{\partial q_n}.$$

(38) et (35) constituent les équations hamiltoniennes du mouvement. Elles sont déterminées par la fonction β et par les relations $\mathcal{O}_m = 0$ et permettent de calculer \dot{q} et \dot{p} en fonction des variables hamiltoniennes q, p, v . Elles ne nous fournissent pas de renseignements directs sur les \dot{v} , mais nous donnerons certaines informations indirectes lorsque nous examinerons les conditions de cohérence.

La notation qui emploie les crochets de Poisson permet d'exprimer plus commodément les équations du mouvement hamiltoniennes.

Deux fonctions quelconques ξ et η des q et p ont un crochet de Poisson, $[\xi, \eta]$ défini par

$$(39) \quad [\xi, \eta] = \frac{\partial \xi}{\partial q_n} \frac{\partial \eta}{\partial p_n} - \frac{\partial \xi}{\partial p_n} \frac{\partial \eta}{\partial q_n}.$$

On vérifie aisément l'invariance des crochets de Poisson par rapport aux transformations des q et p dans lesquelles les nouveaux q sont des fonctions indépendantes quelconques des anciens q et les nouveaux p sont définis par des équations (27) où L est exprimé en fonction des nouveaux q et de leurs dérivées. C'est cette propriété d'invariance qui confère leur importance aux crochets de Poisson.

Les crochets de Poisson obéissent aux lois suivantes, qu'on vérifie aisément en partant de la définition ci-dessus

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\xi, \eta] = -[\eta, \xi], \\ [\xi, f(\eta_1, \eta_2, \dots)] = \frac{\partial f}{\partial \eta_1} [\xi, \eta_1] + \frac{\partial f}{\partial \eta_2} [\xi, \eta_2] + \dots \\ [\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0, \end{array} \right.$$

f dans la seconde relation ci-dessus est une fonction quelconque des grandeurs η_1, η_2, \dots , lesquelles sont des fonctions des q et de p . La

troisième loi, connue sous le nom d'identité de Poisson, s'applique à trois fonctions ξ , η , ζ quelconques des q et p .

D'une équation forte $A = 0$ on déduit les équations faibles

$$\frac{\partial A}{\partial q_n} \approx 0, \quad \frac{\partial A}{\partial p_n} \approx 0;$$

d'où, en appliquant la seconde des lois (40) :

$$[\xi, A] \approx 0,$$

quel que soit ξ . Nous pouvons avoir $[\xi, A] = 0$ (par exemple lorsque $A = 0$ par définition), mais il n'en est pas toujours nécessairement ainsi. A partir d'une équation faible $X \approx 0$ nous ne pouvons déduire en général $[\xi, X] \approx 0$.

De (35) et (38) on déduit pour une fonction g quelconque des q et des p :

$$(41) \quad \dot{g} \approx \frac{\partial g}{\partial q_n} \left(\frac{\partial^2}{\partial p_n^2} + v_m \frac{\partial \emptyset_m}{\partial p_n} \right) - \frac{\partial g}{\partial p_n} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_n^2} + v_m \frac{\partial \emptyset_m}{\partial q_n} \right) \\ \approx [g, \beta] + v_m [g, \emptyset_m].$$

6. Les vitesses homogènes. — La théorie prend une forme particulièrement simple lorsque le lagrangien est une fonction homogène et du premier degré des vitesses. Dans ce cas, les moments définis par (27) sont homogènes et du degré zéro par rapport aux \dot{q} et ne dépendent, par conséquent, que des rapports entre ces derniers. Comme il y a un nombre N de p et seulement $N-1$ rapports indépendants, les p ne peuvent être tous des fonctions indépendantes des \dot{q} et il doit exister au moins une relation (29) entre les q et les p . Le cas « usuel » est maintenant celui où il n'y a qu'une seule relation de ce type.

Nous avons, d'après le théorème d'Euler :

$$(42) \quad L = \dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}, \quad \text{d'où} \quad L \approx \dot{q} p_n,$$

donc

$$(43) \quad H \approx 0.$$

Cette équation faible valable dans la région R nous permet de prendre $\beta = 0$, et (34) devient

$$(44) \quad H = v_m \emptyset_m.$$

L'équation du mouvement générale (41) est maintenant

$$(45) \quad \dot{g} \approx v_m [g, \mathcal{O}_m].$$

Les équations hamiltoniennes du mouvement sont entièrement fixées par les équations $\mathcal{O}_m = 0$.

Le second membre de l'équation (45) est homogène en v_m . Étant donné une solution quelconque des équations du mouvement, on peut en déduire une autre en multipliant tous les v par un facteur γ , qui peut varier arbitrairement avec le temps. Le taux de variation avec le temps de la nouvelle solution sera celui de toutes les variables dynamiques multiplié par le facteur γ . Cette nouvelle solution pourrait être déduite de la première en γ remplaçant le temps t par une nouvelle variable indépendante τ , telle que $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$. La nouvelle variable τ est complètement arbitraire : elle peut être une fonction quelconque de t et des q et \dot{q} . Donc, étant donné une solution des équations du mouvement, on peut en déduire une autre en remplaçant t par un τ arbitraire ; *les équations du mouvement ne nous fournissent donc aucune information sur la variable indépendante*. Ce trait de la dynamique à vitesses homogènes est très important et la rend particulièrement apte à la mise sous forme relativiste.

On peut satisfaire à la condition des vitesses homogènes dans le cas du lagrangien d'un système dynamique quelconque en considérant le temps t comme une coordonnée supplémentaire q_0 et en utilisant l'équation $\dot{q}_0 = 1$ pour rendre ce lagrangien homogène et du premier degré par rapport à toutes les vitesses, \dot{q}_0 incluse.

Comme nous l'avons déjà montré ⁽¹⁾, on peut alors déduire les nouvelles équations du mouvement de Lagrange pour tous les q et obtenir ainsi une nouvelle manière de formuler les lois d'un système dynamique général en fonction des vitesses homogènes. Cette nouvelle forme fournit toutes les équations anciennes à l'exception de $\dot{q}_0 = 1$. Si nous voulons l'y inclure, nous pourrions l'envisager comme une condition supplémentaire, qu'on ne peut pas déduire des équations du mouvement, mais qui n'est pas en contradiction avec elles. Nous pouvons cependant très bien la laisser de côté, son seul rôle étant de fixer la

(1) P. A. M. DIRAC, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 29, 1933, p. 389.

variable indépendante, laquelle resterait autrement parfaitement arbitraire.

En conséquence, nous pouvons nous borner à la théorie aux vitesses homogènes sans perdre en généralité. Nous suivrons dorénavant cette voie parce qu'elle conduit à des équations plus simples et emploierons le point pour indiquer la dérivation par rapport à une variable indépendante arbitraire τ .

7. Les conditions de cohérence. — Pour qu'il y ait cohérence, il faut que chaque \mathcal{O}_m soit et reste nul en vertu des équations du mouvement. En remplaçant g par $\mathcal{O}_{m'}$ dans (45) on obtient

$$(46) \quad v_m[\mathcal{O}_m, \mathcal{O}_{m'}] \approx 0.$$

Supposons qu'on simplifie au maximum ces équations (46) à l'aide de (29). Cette simplification peut éventuellement comprendre la suppression de certains facteurs, lorsqu'on est en mesure d'admettre qu'ils ne s'annulent pas. Les équations résultantes seront chacune l'un de ces quatre types suivants :

Type n° 1. — L'équation comprend un certain nombre des variables c .

Type n° 2. — L'équation ne renferme aucun c , mais comprend un certain nombre de p et de q . Elle est de la forme

$$(47) \quad \chi(q, p) \approx 0$$

et est indépendante des équations (29).

Type n° 3. — L'équation se réduit à $0 = 0$.

Type n° 4. — L'équation se réduit à $1 = 0$.

Les équations du type 2 conduisent à une condition de cohérence supplémentaire, puisque χ doit rester nulle. En remplaçant g par χ dans (45), on a

$$(48) \quad v_m[\mathcal{O}_m, \chi] \approx 0.$$

Cette équation, simplifiée autant que possible au moyen de (29) et des relations (47) déjà connues, sera encore de l'un des quatre types indiqués. Si elle est du type 2, elle conduira à une nouvelle condition de cohérence; nous continuerons le même processus jusqu'à ce que toutes

les équations du type 2 nous auront conduit à des équations d'un autre type.

Si l'une quelconque des équations obtenues de cette façon est du type 4, nous devons conclure que le système des équations du mouvement n'est pas cohérent. Ce cas ne présente pas d'intérêt et nous le laisserons de côté dans ce qui suit. Les équations du type 3 sont satisfaites automatiquement. Il ne nous reste que le type 1 ainsi que le type 2 à encadrer dans la théorie.

Écrivons le système complet d'équations du type 2 sous la forme

$$(49) \quad \chi_k(q, p) \approx 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K).$$

Nous pouvons admettre que les χ_k ont été choisies de façon que leurs variations soient de l'ordre ε , tout comme les \mathcal{O}_m dans (29); dans ce cas, elles sont écrites correctement avec le signe \approx comme des équations faibles. Ces équations (49) réduiront davantage la région R dans laquelle les équations faibles sont valables et qui n'aura plus maintenant que $2N - K$ dimensions. La région R_ε sera également réduite, puisqu'elle comprendra tous les points situés à une distance de l'ordre de ε de la nouvelle région R.

Pour l'étude des équations du type 1, il est commode d'introduire quelques notions nouvelles. Parmi les \mathcal{O}_m , définissons les \mathcal{O} de première classe, ceux dont les crochets de Poisson avec chacun des \mathcal{O} et des χ s'annulent. $\mathcal{O}_{m'}$ sera de première classe, par exemple, si

$$(50) \quad \begin{cases} [\mathcal{O}_{m'}, \mathcal{O}_m] \approx 0 & (m = 1, 2, \dots, M), \\ [\mathcal{O}_{m'}, \chi_k] \approx 0 & (k = 1, 2, \dots, K). \end{cases}$$

Il suffit que ces relations ne soient vraies qu'au sens faible, ce qui signifie qu'il suffit qu'elles soient valables seulement comme conséquences des équations $\mathcal{O}_m \approx 0$, $\chi_k \approx 0$. Les premiers membres de (50) devront donc être égaux, au sens fort à une certaine fonction linéaire des \mathcal{O}_m et χ_k . Tout \mathcal{O} qui ne satisfait à toutes ces conditions sera appelé un \mathcal{O} de seconde classe.

Nous pouvons appliquer aux \mathcal{O} une transformation linéaire de la forme

$$(51) \quad \mathcal{O}_m^* \approx \gamma_{mm'} \mathcal{O}_{m'},$$

où les γ sont des fonctions quelconques des q et des p , telles que leur

déterminant ne soit pas nul, au sens faible. Les \mathcal{O}_m^* seront dans ce cas équivalents aux \mathcal{O} pour tous les besoins de la théorie.

Effectuons une transformation de ce genre de façon à transformer autant de \mathcal{O} que possible en \mathcal{O} de première classe. Appelons-les \mathcal{O}_α et appelons \mathcal{O}_β le reste des \mathcal{O} , de seconde classe, $\beta = 1, 2, \dots, B$ et $\alpha = B + 1, B + 2, \dots, M$.

L'équation (46) est automatiquement satisfaite si $\mathcal{O}_{m'}$ est de première classe. De plus, nous pouvons considérer que \mathcal{O}_m dans (46) et (48) sont de deuxième classe, puisque s'ils étaient de première classe ils donneraient automatiquement zéro. Le reste des équations (46) et (48) s'écriront donc

$$(52) \quad \begin{cases} \nu_\beta [\mathcal{O}_\beta, \mathcal{O}_{\beta'}] \approx 0 & (\beta, \beta' = 1, 2, \dots, B), \\ \nu_\beta [\mathcal{O}_\beta, \chi_k] \approx 0 & (k = 1, 2, \dots, K). \end{cases}$$

Toutes ces équations sont du type 1. Elles montrent que ou bien tous les ν_β s'annulent ou que la matrice

$$(53) \quad \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] & [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_3] & \dots & [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_B] & [\mathcal{O}_1, \chi_1] & \dots & [\mathcal{O}_1, \chi_K] \\ [\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1] & 0 & [\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3] & \dots & [\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_B] & [\mathcal{O}_2, \chi_1] & \dots & [\mathcal{O}_2, \chi_K] \\ \dots & \dots \\ [\mathcal{O}_B, \mathcal{O}_1] & [\mathcal{O}_B, \mathcal{O}_2] & [\mathcal{O}_B, \mathcal{O}_3] & \dots & 0 & [\mathcal{O}_B, \chi_1] & \dots & [\mathcal{O}_B, \chi_K] \end{array} \right\|$$

a un rang inférieur à B, au sens faible.

Nous allons démontrer que c'est la première hypothèse qui est réalisée. En effet, supposons que le rang de la matrice (53) soit $U < B$ et formons le déterminant

$$(54) \quad D = \begin{vmatrix} \mathcal{O}_1 & 0 & [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] & [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_3] & \dots & [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_U] \\ \mathcal{O}_2 & [\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1] & 0 & [\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3] & \dots & [\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_U] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{O}_{U+1} & [\mathcal{O}_{U+1}, \mathcal{O}_1] & [\mathcal{O}_{U+1}, \mathcal{O}_2] & [\mathcal{O}_{U+1}, \mathcal{O}_3] & \dots & [\mathcal{O}_{U+1}, \mathcal{O}_U] \end{vmatrix}$$

D est une fonction linéaire des \mathcal{O}_β et, par conséquent, s'annule au sens faible. Les crochets de Poisson de toute fonction f avec D est égal à la somme des déterminants formés en prenant les crochets de Poisson de chaque colonne de (54) avec f . A l'exception de celui formé avec la première colonne, tous ces déterminants s'annuleront au sens faible, puisque tous les éléments de leurs premières colonnes s'annulent au sens faible.

On aura

$$(55) [D, f] \approx \begin{vmatrix} [\emptyset_1, f] & 0 & [\emptyset_1, \emptyset_2] & [\emptyset_1, \emptyset_3] & \dots & [\emptyset_1, \emptyset_U] \\ [\emptyset_2, f] & [\emptyset_2, \emptyset_1] & 0 & [\emptyset_2, \emptyset_3] & \dots & [\emptyset_2, \emptyset_U] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\emptyset_{U+1}, f] & [\emptyset_{U+1}, \emptyset_1] & [\emptyset_{U+1}, \emptyset_2] & [\emptyset_{U+1}, \emptyset_3] & \dots & [\emptyset_{U+1}, \emptyset_U] \end{vmatrix}.$$

Si nous remplaçons f par un \emptyset_α la première colonne de (55) s'annule et l'on a donc $[D, \emptyset_\alpha] \approx 0$. En la remplaçant par un \emptyset_β ou un χ , le déterminant ou bien a deux colonnes identiques et par conséquent s'annule, ou bien il est identique à un mineur de la matrice (53) à $U + 1$ lignes et $U + 1$ colonnes et s'annule parce que nous avons supposé que cette matrice est de rang U . Il s'en suit que le crochet de Poisson de D avec tout \emptyset et tout χ s'annule.

Il est possible que D s'annule au sens fort à cause du fait que tous les mineurs des éléments de sa première colonne s'annulent au sens faible. Dans ce cas, nous prendrons un déterminant différent, dont les U colonnes qui suivent la première correspondent chacune à l'une quelconque des colonnes de (53) et dont les $U + 1$ lignes correspondent chacune à l'une quelconque des lignes de (53). Nous pouvons toujours choisir un tel déterminant D de façon que les mineurs correspondant aux éléments de sa première colonne ne soient pas tous nuls, car nous avons supposé que (53) est de rang U . Nous obtenons ainsi un D qui est un nouveau \emptyset de première classe et en même temps une fonction linéaire des \emptyset_β . Ce résultat contredit notre hypothèse d'après laquelle nous avons groupé le nombre *maximum* de \emptyset dans la première classe.

Nous en concluons que *si nous avons groupé dans la première classe le nombre maximum de \emptyset , tous les ν associés aux \emptyset de seconde classe seront nuls.*

L'hamiltonien (44) se réduit alors à

$$(56) \quad H = \nu_\alpha \emptyset_\alpha$$

et l'équation générale du mouvement (45) devient

$$(57) \quad \dot{g} \approx \nu_\alpha [g, \emptyset_\alpha].$$

Toutes les conditions de cohérence sont satisfaites en vertu du fait que les ν_β s'annulent et des équations (49). Les ν_α restent complètement arbitraires. Chacun d'eux correspond à un degré de liberté du mouve-

ment, à une fonction arbitraire dans la solution générale des équations du mouvement. Dans le cas usuel, il n'y a qu'un seul \emptyset nécessairement de première classe et, par conséquent, une seule fonction arbitraire dans la solution générale des équations du mouvement. Elle est reliée au caractère arbitraire de la variable indépendante τ .

8. L'intégrabilité du mouvement dans l'espace des phases. — Une fonction quelconque des q et des p qui est faiblement nulle, soit à cause des équations du mouvement, soit à cause des conditions supplémentaires qu'on peut ajouter à la théorie, est traitée comme un χ . Un \emptyset est un χ spécial, qui est faiblement zéro à cause des équations (27).

Nous dirons qu'un χ est de première classe si son crochet de Poisson avec tous les \emptyset et tous les χ est nul; en cas contraire, il sera de deuxième classe. Nous pouvons effectuer une transformation des χ_k

$$(58) \quad \chi_k^* = \gamma_{kk'} \chi_{k'} + \gamma'_{km} \emptyset_m,$$

où les γ et les γ' sont des fonctions quelconques des q et des p telles que le déterminant des γ ne soit pas nul, ou même faiblement zéro; les nouveaux χ seront alors équivalents aux χ initiaux. Effectuons une transformation de ce type telle que l'on ait le maximum possible des nouveaux χ_k de la première classe; nous appellerons ces nouveaux χ_k , de première classe, les χ_α et les autres les χ_β .

Un \emptyset quelconque de première classe est une fonction linéaire des \emptyset_α et un χ quelconque de première classe est une fonction linéaire des \emptyset_α et des χ_α .

Nous allons démontrer le théorème suivant : *le crochet de Poisson de deux χ de première classe est un χ de première classe*. Prenons les deux χ , χ_α et $\chi_{\alpha'}$. Leur crochet de Poisson $[\chi_\alpha, \chi_{\alpha'}]$ est faiblement zéro : c'est donc un χ . Si χ_1 est un χ quelconque, nous avons d'après l'identité de Poisson

$$(59) \quad [\chi_1, [\chi_\alpha, \chi_{\alpha'}]] = [[\chi_1, \chi_\alpha], \chi_{\alpha'}] - [[\chi_1, \chi_{\alpha'}], \chi_\alpha].$$

Puisque χ_α est de première classe, $[\chi_1, \chi_\alpha]$ est faiblement zéro; c'est donc un χ et son crochet de Poisson avec $\chi_{\alpha'}$ est faiblement nul. Ainsi le premier terme du second membre dans (59) est faiblement zéro. De la même manière, le deuxième terme est aussi nul. Donc le crochet de

Poisson de $[\chi_{\alpha}, \chi_{\alpha'}]$ avec un χ quelconque est faiblement nul, ce qui montre que $[\chi_{\alpha}, \chi_{\alpha'}]$ est de première classe.

Si les deux χ de première classe sont des \mathcal{O} , il n'est pas nécessaire que leur crochet de Poisson soit aussi un \mathcal{O} de première classe; nous savons seulement qu'il doit être un χ de première classe.

Dans l'espace des phases, c'est-à-dire dans l'espace à $2N$ dimensions des q_n et p_n , il existe un espace à $2N - M - K$ dimensions dans lequel toutes les équations χ sont satisfaites; appelons-le l'espace $2N - M - K$. L'état du système dynamique pour une valeur particulière de τ est fixé en donnant à p et q des valeurs qui satisfont toutes les équations χ et est représenté, par conséquent, par un point dans l'espace $2N - M - K$. Le mouvement du système à partir de cet état est représenté dans cet espace par une courbe partant de P . Soit A le nombre des \mathcal{O}_{α} . Les A variables v_{α} étant arbitraires, cette courbe peut partir dans une direction quelconque dans un petit volume à A dimensions entourant P . Chaque point de l'espace $2N - M - K$ est entouré d'un de ces petits volumes à A dimensions. Examinons si ces petits volumes sont intégrables ou non.

Admettons que pour un intervalle $\delta\tau = \varepsilon_1$ de τ tous les v s'annulent à l'exception de $v_{\alpha'}$ qui est égal à l'unité et admettons que pour l'intervalle suivant, $\delta\tau = \varepsilon_2$, tous les v s'annulent à l'exception de $v_{\alpha''}$ qui est égal à l'unité. Dans ces conditions, à la fin du premier intervalle, une fonction quelconque g des q et des p deviendra

$$g + \varepsilon_1 [g, \mathcal{O}_{\alpha'}];$$

à la fin du second intervalle elle sera

$$(60) \quad g + \varepsilon_1 [g, \mathcal{O}_{\alpha'}] + \varepsilon_2 [g + \varepsilon_1 [g, \mathcal{O}_{\alpha'}], \mathcal{O}_{\alpha''}]$$

à $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ près, mais en négligeant ε_1^2 et ε_2^2 .

Si l'on intervertit l'ordre des deux mouvements, g devient

$$(61) \quad g + \varepsilon_2 [g, \mathcal{O}_{\alpha''}] + \varepsilon_1 [g + \varepsilon_2 [g, \mathcal{O}_{\alpha''}], \mathcal{O}_{\alpha'}].$$

En tenant compte de l'identité de Poisson, la différence entre (60) et (61) s'écrit

$$(62) \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 [g, [\mathcal{O}_{\alpha'}, \mathcal{O}_{\alpha''}]].$$

Pour que les volumes infinitésimaux soient intégrables, il faut que (62)

représente une variation permise par les équations du mouvement, les c étant convenablement choisis. Pour cela, il faut que $[\mathcal{O}_{\alpha'}, \mathcal{O}_{\alpha''}]$ soit un \mathcal{O} de première classe. D'après le théorème que nous venons de démontrer, nous savons que $[\mathcal{O}_{\alpha'}, \mathcal{O}_{\alpha''}]$ est un χ de première classe, mais il n'est pas nécessairement un \mathcal{O} . Donc la condition d'intégrabilité n'est pas valable en général.

Nous pouvons cependant conclure que *pour tout système dynamique qui n'a pas de χ_{α} , c'est-à-dire pour tout système pour lequel tous les χ qui ne sont pas des \mathcal{O} sont de la deuxième classe, la condition d'intégrabilité dans l'espace des phases est satisfaite.*

Du point de vue physique, il est désirable que la condition d'intégrabilité soit satisfaite; parce qu'il serait étonnant qu'un changement des variables dynamiques tel (62) ne pût pas avoir lieu directement, quand il peut bien être le résultat d'un mouvement autour d'un circuit. Nous pouvons toujours rendre cette condition valable par un léger changement dans les équations.

En effet, traitons tous les χ de première classe comme des \mathcal{O} de première classe. Les χ_{α} deviennent des \mathcal{O}_{α} additionnels, et doivent apparaître dans l'hamiltonien (56) avec des nouveaux coefficients ν arbitraires. Ainsi la liberté du mouvement est augmentée. Il ne reste plus de χ de première classe qui ne soient pas des \mathcal{O} , et la condition d'intégrabilité est satisfaite.

La modification des équations que nous avons accomplie est telle que chaque solution des équations du mouvement initiales est aussi une solution des nouvelles équations du mouvement. Nous avons augmenté seulement le nombre des solutions, sans modifier celles qui existaient déjà. Le nouvel hamiltonien est tout à fait satisfaisant, puisqu'il fournit des équations du mouvement compatibles, quoique la fonction de Lagrange avec laquelle nous avons commencé ne soit plus en mesure de nous fournir toutes les solutions des équations du mouvement.

9. Des transformations des crochets de Poisson. — Prenons un système de fonctions $\theta_s (s = 1, 2, \dots, S)$ des q et des p telles que le déterminant

$$(63) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & [\theta_1, \theta_2] & [\theta_1, \theta_3] & \dots & [\theta_1, \theta_S] \\ [\theta_2, \theta_1] & 0 & [\theta_2, \theta_3] & \dots & [\theta_2, \theta_S] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\theta_S, \theta_1] & [\theta_S, \theta_2] & [\theta_S, \theta_3] & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas, au sens faible, ce qui implique que S doit être pair. Désignons par $c_{ss'}$ le mineur de $[\theta_s, \theta_{s'}]$ divisé par Δ , de sorte que

$$c_{ss'} = -c_{s's}$$

et

$$(64) \quad c_{ss'}[\theta_s, \theta_{s''}] = \delta_{s's''}.$$

Avec ces notations, nous pouvons définir un nouveau type de crochet de Poisson $[\xi, \eta]^*$ de deux quantités ξ et η par la formule

$$(65) \quad [\xi, \eta]^* = [\xi, \eta] + [\xi, \theta_s]c_{ss'}[\theta_{s'}, \eta].$$

On voit aisément que ces nouveaux crochets de Poisson obéissent aux deux premières lois (40) et, après quelques calculs, on peut constater également qu'ils satisfont à la troisième, c'est-à-dire à l'identité de Poisson. Pour tout ξ l'on a

$$(66) \quad [\xi, \theta_s]^* = [\xi, \theta_s] + [\xi, \theta_{s''}]c_{s's''}[\theta_{s''}, \theta_s] = [\xi, \theta_s] - [\xi, \theta_{s'}]\delta_{s's} = 0.$$

Pour comprendre la signification de ces nouveaux crochets de Poisson, prenons le cas où les θ sont $\frac{S}{2}$ coordonnées q et leurs conjugués p . On voit que les nouveaux crochets s'obtiennent à partir de la définition (39) en omettant, dans la somme sur n , les termes qui contiennent des dérivations par rapport à ces q et p . En conséquence, les nouveaux crochets concernent un système à $N - \frac{S}{2}$ degrés de liberté. On obtient les mêmes crochets si, au lieu de considérer les θ comme certains q et p , on les regarde comme n'importe quelles fonctions indépendantes de ces mêmes q et p . Dans le cas général, les nouveaux crochets de Poisson se rapporteront également à un système à $N - \frac{S}{2}$ degrés de liberté, mais la réduction du nombre des degrés de liberté s'effectue d'une manière plus compliquée que la simple omission de certains q et p .

Supposons maintenant que les θ soient tous des \emptyset ou des χ . (Tous doivent appartenir à la seconde classe sans quoi $\Delta \approx 0$). Nous aurons $[\theta_s, \emptyset_\alpha] \approx 0$ pour tous les s et \emptyset_α , d'où

$$(67) \quad v_\alpha[g, \emptyset_\alpha]^* \approx v_\alpha[g, \emptyset_\alpha] \approx \dot{g}$$

pour toute fonction g des q et des p . On peut employer les nouveaux

crochets de Poisson pour exprimer les équations hamiltoniennes du mouvement. On obtient de cette manière une nouvelle forme des équations du mouvement, qui est plus simple puisque le nombre des degrés de liberté est réduit.

Tous les θ sont maintenant nuls, au sens faible. Si nous n'utilisons que les nouveaux crochets, nous pourrions supposer que chaque θ est nul même au sens fort sans introduire de contradiction, puisque d'après (66) les nouveaux crochets de θ avec n'importe quelle autre quantité sont nuls. Nous pouvons dans ce cas employer l'expression forte $\theta_s = 0$ pour simplifier l'hamiltonien.

Nous pouvons prendre pour θ l'ensemble des θ_β et des χ_β . Dans ce cas, le déterminant Δ est différent de zéro. La démonstration de ce théorème est analogue à celle qui permet d'affirmer que la matrice (53) est de rang B et consiste à admettre que le rang de Δ est $T < S$ et à former le déterminant

$$(68) \quad \begin{vmatrix} \theta_1 & 0 & [\theta_1, \theta_2] & \dots & [\theta_1, \theta_T] \\ \theta_2 & [\theta_2, \theta_1] & 0 & \dots & [\theta_2, \theta_T] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{T+1} & [\theta_{T+1}, \theta_1] & [\theta_{T+1}, \theta_2] & \dots & [\theta_{T+1}, \theta_T] \end{vmatrix}$$

On voit que ce déterminant est un θ ou un χ de première classe et une fonction linéaire des θ_β et χ_β , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d'après laquelle on a inclus dans la première classe le nombre maximum possible de θ et de χ .

Ce choix des θ permet la plus grande simplification des équations du mouvement qu'on puisse obtenir par cette méthode. On obtient ainsi une théorie dans laquelle toutes les équations θ_β et χ_β sont des équations fortes. L'emploi de ces équations peut éventuellement permettre d'éliminer complètement certains q et p .

10. Quantification. — Pour quantifier un système dynamique qu'on a étudié en Mécanique classique, il faut établir un système d'opérateurs linéaires correspondant aux variables dynamiques classiques q et p et aux fonctions de celles-ci. Il n'existe pas d'opérateurs correspondant aux variables classiques r ou aux vitesses en général ou à n'importe quelle expression qui contient τ . Les opérateurs agissent tous sur les vecteurs Ψ d'un espace de Hilbert, dont les éléments représentatifs dans

une représentation sont les fonctions d'onde qui définissent les états en théorie quantique. A des variables classiques réelles correspondent des opérateurs selfadjoints.

L'analogie entre opérateurs linéaires et les variables classiques correspondantes doit être établie en accord avec deux principes généraux. Utilisant la même lettre pour désigner deux grandeurs correspondantes, ces principes peuvent s'énoncer comme suit :

1. A des crochets de Poisson entre variables classiques correspondent des relations de commutation entre opérateurs suivant les formules

$$[\xi, \eta] \quad \text{correspond à} \quad 2\pi \frac{\xi\eta - \eta\xi}{ih};$$

2. A des équations faibles entre variables classiques correspondent des conditions linéaires auxquelles sont soumis les vecteurs ψ , suivant la formule :

$$X(q, p) \approx 0 \quad \text{correspond à} \quad X\psi = 0.$$

Le processus de passage de la théorie classique à la théorie quantique n'est pas bien défini mathématiquement, parce que chaque fois qu'une expression classique contient le produit de deux facteurs dont le crochet de Poisson n'est pas nul, l'ordre dans lequel ces facteurs doivent apparaître dans l'expression quantique correspondante n'est pas défini. En pratique, sur des exemples simples il n'y a aucune difficulté à fixer cet ordre. Dans des exemples plus compliqués cependant, il peut se faire qu'il soit impossible de choisir cet ordre de telle manière que toutes les équations quantiques forment un ensemble cohérent, et dans ce cas on ne pourra pas quantifier la théorie. Les méthodes actuelles de quantification sont toutes du type des règles pratiques dont l'application à chaque cas dépend de critères de simplicité.

Pour ne pas altérer grossièrement la cohérence des équations quantiques, on doit toutefois tenir compte de certains traits caractéristiques généraux du passage entre la théorie classique et la théorie des quanta.

Il existe en théorie classique un certain nombre d'équations \emptyset (comptant les équations χ également comme des équations \emptyset) qui doivent être transposées en théorie quantique suivant le principe 2. Nous pouvons transformer linéairement les \emptyset classiques au moyen de

la transformation (51) et les nouveaux \mathcal{O} peuvent être utilisés tout aussi bien que les anciens. Cependant, en effectuant la même transformation en théorie des quanta, nous devons prendre garde à placer tous les coefficients γ à la gauche des \mathcal{O} . *En théorie quantique, un \mathcal{O} général est une fonction linéaire des \mathcal{O} donnés avec les coefficients placés à gauche.*

Des deux équations quantiques obtenues à l'aide du principe 2 :

$$\mathcal{O}_1\psi = 0, \quad \mathcal{O}_2\psi = 0,$$

on peut déduire

$$\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1\psi = 0, \quad \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\psi = 0$$

et donc, d'après le principe 1 :

$$[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2]\psi = c.$$

Cette relation correspond à l'équation faible classique

$$[\mathcal{Q}_1, \mathcal{O}_2] \approx 0.$$

Nous pouvons en déduire que, *pour que le passage à la Mécanique quantique soit possible, tous les \mathcal{O} doivent appartenir à la première classe.*

Étant donné une théorie classique à \mathcal{O} et χ appartenant à la seconde classe, on peut en déduire une théorie quantique en appliquant tout d'abord une transformation du type de celle décrite au paragraphe 9, qui transforme toutes les équations \mathcal{O}_β et χ_β en équations fortes. Ces dernières correspondent en théorie quantique à des relations entre opérateurs, servant à définir certains d'entre eux en fonction des autres.

Les équations quantiques $\mathcal{O}\psi = 0$ et $\chi\psi = 0$ obtenues en appliquant le principe 2 à des \mathcal{O} et χ de la première classe sont les équations d'ondes de Schrödinger. La Dynamique classique ordinaire, à un seul \mathcal{O} de la première classe conduit à une seule équation de Schrödinger. Dans la théorie générale, il y a une équation de Schrödinger pour tout degré de liberté classique du mouvement. Dans ces équations, les opérateurs correspondent tous aux variables dynamiques classiques prises pour une même valeur de τ . Les opérateurs qui se rapportent à des valeurs différentes de τ n'appartiennent pas au même système

algébrique et il semble qu'il n'y ait rien en Mécanique quantique qui soit analogue à la dépendance de τ des variables classiques.

On constate que la quantification traite de la même façon les équations \mathcal{O} et les équations χ de la première classe. La théorie quantique ne peut pas distinguer entre les \mathcal{O} et les χ , ce qui montre qu'elle correspond à la théorie classique modifiée par le changement que nous avons fait au paragraphe 8 pour rendre valable la condition d'intégrabilité dans l'espace des phases. Une théorie classique pour laquelle cette condition n'est pas remplie n'a pas d'analogue en théorie quantique.

11. Application à la Mécanique relativiste. — La Dynamique habituelle, non relativiste, considère l'état d'un système à un instant déterminé, cet état étant défini par la donnée des valeurs des q et des p . Elle fournit des équations du mouvement qui permettent de calculer l'état d'un système à tout instant à partir de l'état donné à l'instant initial. Ces équations du mouvement, écrites au moyen des vitesses homogènes et sous forme hamiltonienne n'exige qu'un seul \mathcal{O} de la première classe.

Pour obtenir une Dynamique qui satisfasse aux exigences de la relativité restreinte, nous devons établir un ensemble d'équations également applicables à tous les observateurs ayant toutes les vitesses. Si l'on travaille avec des instants, il faut considérer aussi des instants se rapportant à tous les observateurs. Un instant, dans ce cas, sera une surface plane à trois dimensions dans l'espace-temps dont la normale se trouve dans le cône de lumière. Un tel instant est décrit par quatre paramètres, trois pour fixer la direction de la normale ou la vitesse de l'observateur et le quatrième permettant de discriminer les différents instants d'un même observateur.

Une Dynamique relativiste qui considère de tels instants doit permettre de calculer l'état du système en un de ces instants lorsqu'on connaît l'état à un autre. Elle doit fournir des équations indiquant comment varient les variables dynamiques lorsque l'instant change. Les équations du mouvement doivent encore être applicables si nous déplaçons arbitrairement l'instant, en lui donnant une translation dans l'espace-temps ou en faisant varier la direction de la normale. En conséquence, *nous aurons besoin de quatre \mathcal{O} de la première classe*

pour fournir les quatre degrés de liberté de variation de l'instant

Les quatre paramètres qui décrivent l'instant doivent être traités comme des q , soumis aux lois du mouvement (41) ou (57) comme les autres q et p . Ils se distinguent des autres p et q en ce sens qu'elles conviennent mieux que les autres pour jouer le rôle de t dans les équations du mouvement, lesquelles donnent alors directement la variation des q et des p lorsque l'instant varie.

Il y a d'autres formes de dynamiques relativistes qui ne font pas appel à la notion d'instant; elles ont été discutées par l'auteur dans les *Reviews of Modern Physics* (vol. 21, 1949, p. 392). Il y a par exemple la Dynamique ponctuelle, dans laquelle un état est défini par rapport à un point de l'espace-temps. Cette forme exige également quatre \emptyset de première classe, correspondant aux quatre degrés de liberté de ce point. Il y a la forme qu'on peut appeler frontale, qui exige trois \emptyset de première classe correspondant aux trois degrés de liberté d'un front d'onde. Enfin, nous pouvons définir un état sur une surface générale à trois dimensions du genre espace dans l'espace-temps. Cette définition exige une infinité de \emptyset de première classe, correspondant à toutes les déformations que peut subir une telle surface.

Dans toutes ces formes de dynamique, les variables qui décrivent le point, le front d'onde ou la surface du genre espace, doivent être considérées comme des q , obéir aux lois du mouvement (41) ou (57) et conviennent tout particulièrement pour jouer le rôle de t dans les équations du mouvement.

Les nombres de \emptyset de première classe indiqués plus haut représentent les nombres minima nécessaires pour construire une dynamique relativiste du type respectif; il peut cependant y avoir d'autres \emptyset additionnels. Par exemple, toute électrodynamique qui admet la possibilité de transformations de jauge applicables après que les valeurs initiales des q et des p ont été fixées, doit nécessairement avoir d'autres degrés de liberté supplémentaires qui nécessiteront de nouveaux \emptyset de première classe.

Appliquons cette théorie générale à l'étude des transformations de jauge en Électrodynamique. Pour simplifier autant que possible la discussion, je considérerai uniquement les états définis sur des surfaces planes, c'est-à-dire sur des instants, pour un observateur donné. Il est assez facile de généraliser la théorie pour y inclure les surfaces courbes;

les équations sont cependant plus compliquées et moins commodes pour l'étude des effets qui nous intéressent.

Puisque nous avons pris maintenant une variable de temps t bien définie, il convient d'employer la forme de la théorie sans vitesses homogènes. L'hamiltonien aura alors la forme (34). Un \mathcal{O} ou χ de la première classe doit satisfaire à la condition que son crochet de Poisson avec n'importe quel \mathcal{O} ou χ et aussi avec β soit nul.

Pour la cohérence des équations du mouvement, il faut aussi que β et les \mathcal{O} dans (34) appartiennent également à la première classe.

L'équation de mouvement pour une variable dynamique g quelconque est, d'après (41),

$$dg = [g, \beta] dt + [g, \mathcal{O}_m] v_m dt,$$

On peut choisir les v infiniment grands tels que $v_m dt = dv_m$ ne soit pas nul quand $dt = 0$. Nous constatons ainsi la possibilité d'existence d'une variation des variables dynamiques, suivant la loi

$$(69) \quad dg = [g, \mathcal{O}_m] dv_m,$$

avec dv_m arbitraire, non accompagnée d'une variation correspondante de t . Nos idées habituelles sur la Mécanique, selon lesquelles une coordonnée dynamique ou une vitesse a toujours une valeur bien définie à un instant donné, doivent donc être modifiées. Ces grandeurs sont indéterminées, aux effets des transformations (69) près.

12. Le champ électromagnétique dans le vide. — Appliquons la théorie générale précédente à l'Électrodynamique. Considérons d'abord le champ électromagnétique seul dans le vide, avec une fonction de Lagrange

$$L = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^3x.$$

Les moments B_μ conjugués aux coordonnées dynamiques A^μ sont

$$(70) \quad B_\mu \approx F_{\mu 0}.$$

Les crochets de Poisson fondamentaux sont

$$(71) \quad \begin{cases} [A_\mu, A'_\nu] = 0, & [B_\mu, B'_\nu] = 0, \\ [A_\mu, B'_\nu] = g_{\mu\nu} \delta_3(x - x'), \end{cases}$$

avec la notation

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu &= \mathbf{A}_\mu(x_1, x_2, x_3), & \mathbf{A}'_\nu &= \mathbf{A}_\nu(x'_1, x'_2, x'_3), \\ \delta_3(x - x') &= \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3). \end{aligned}$$

D'après (70), nous avons

$$(72) \quad \mathbf{B}_0 \approx 0.$$

Cette équation ne contient pas les vitesses \mathbf{A}_μ^0 ; elle est donc une équation \emptyset .

Les équations du champ, qu'il faut maintenant écrire comme des équations faibles, sont

$$(73) \quad \mathbf{F}_{\mu\nu} \approx 0.$$

En posant $\mu = 0$, nous trouvons

$$\mathbf{F}_{0r'} \approx 0 \quad (r = 1, 2, 3)$$

et, par conséquent,

$$(74) \quad \mathbf{B}_{r'} \approx 0.$$

Cette équation ne contient également pas de vitesses; elle est donc une équation χ . Il est facile de voir que les équations (72) et (74) sont les seules équations \emptyset et χ que comporte la théorie.

La fonction d'Hamilton est

$$(75) \quad \mathbf{H} = \int \left(\mathbf{B}_\mu \mathbf{A}^{\mu 0} + \frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu} \right) d^3x.$$

Si nous éliminons les vitesses de cette expression à l'aide des équations (70), c'est-à-dire en posant $\mathbf{B}_0 \approx 0$ et $\mathbf{A}_{r0} \approx \mathbf{A}_{0r} - \mathbf{B}_r$, nous obtenons la fonction β qui est faiblement égale à \mathbf{H} . On a donc

$$(76) \quad \beta = \int \left(\frac{1}{4} \mathbf{F}_{rs} \mathbf{F}^{rs} - \frac{1}{2} \mathbf{B}_r \mathbf{B}^r + \mathbf{B}_r \mathbf{A}^{0r} \right) d^3x.$$

En utilisant (71), nous trouvons que

$$(77) \quad \begin{cases} [\mathbf{B}_0, \mathbf{B}'_0] = 0, & [\mathbf{B}_{r'}, \mathbf{B}'_0] = 0, & [\mathbf{B}_{r'}, (\mathbf{B}_{s'})'] = 0, \\ [\mathbf{B}_0, \beta] = \mathbf{B}_{r'} \approx 0, & [\mathbf{B}_{r'}, \beta] = 0. \end{cases}$$

β , \mathbf{B}_0 et $\mathbf{B}_{r'}$ appartiennent donc à la première classe.

D'après la théorie générale, nous savons que \mathbf{H} doit être de la forme

$$(78) \quad \mathbf{H} = \beta + \int \nu \mathbf{B}_0 d^3x,$$

où ν est une fonction des paramètres x_1, x_2, x_3 . Il est intéressant de vérifier qu'on peut déduire (78) directement de la définition (75) de H. Puisque (78) est une équation forte, il faudra employer toujours des équations fortes dans cette déduction. L'équation faible (70) nous donne l'équation forte

$$(B_r - F_{r0})(B^r - F^{r0}) = 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (79) \quad H &= \int \left\{ B_\mu A^{\mu 0} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (B_r - F_{r0})(B^r - F^{r0}) \right\} d^3 x \\ &= \int \left\{ B_\mu A^{\mu 0} + \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} - \frac{1}{2} B_r B^r + B_r F^{r0} \right\} d^3 x \\ &= \beta + \int B_0 A^{00} d^3 x, \end{aligned}$$

avec β défini par (76). Nous avons ici le résultat voulu (78), avec $\nu = A^{00}$.

Les équations du mouvement ne déterminent pas la valeur de ν ou A^{00} . Nous voyons, d'après (71), que l'équation hamiltonienne du mouvement

$$\dot{A}^0 = [A^0, \beta] + \int [A^0, B'_0] (A^{00})' d^3 x'$$

est satisfaite identiquement pour tout A^{00} . Ainsi, quand toutes les conditions initiales sont données, les valeurs initiales de $A^0(x_1, x_2, x_3)$ comprises, la variation de A^0 est arbitraire.

Nous pouvons même considérer que A^0 peut varier sans variation concomitante du temps. En appliquant l'équation (69) de la théorie générale, nous obtenons le changement des variables dynamiques

$$(80) \quad dg = \int \nu [g, B_0] d^3 x$$

qui peut exister sans changement du temps dans la solution générale des équations du mouvement. Ce changement donne une variation indéterminée de A^0 , avec aucune variation des autres variables dynamiques. Ainsi les conditions initiales qui sont nécessaires pour déterminer une solution des équations du mouvement ne devraient pas comprendre les valeurs initiales de A^0 .

La variation indéterminée de A^0 existe à cause des transformations de jauge. Une transformation de jauge qui ne change pas les conditions initiales est de la forme (6) avec S initialement nul. Elle ne change pas les valeurs initiales des A^r , mais elle change les valeurs initiales de A^0 et

les valeurs des A^μ à d'autres instants. Ainsi elle donne précisément la même liberté que celle qui découle de l'hamiltonien (78).

Les équations du mouvement qui se déduisent de la fonction d'Hamilton (79) ne satisfont pas à la condition d'intégrabilité dans l'espace des phases parce que, comme nous pouvons le voir au moyen des équations (77), les B_0 et β satisfont à la condition d'être de la première classe, seulement si l'on a les équations χ (74). Pour rendre valable cette condition d'intégrabilité (ce qui est nécessaire pour que la quantification soit possible), on doit traiter les χ , qui sont de première classe, comme des \mathcal{O} additionnels de première classe et les ajouter à l'hamiltonien, avec des coefficients indéterminés $\nu^+(x_1, x_2, x_3)$. Nous obtenons ainsi, au lieu de (78), l'hamiltonien

$$(81) \quad H = \beta + \int \nu B_0 d^3x + \int \nu^+ B_{r,r'} d^3x.$$

L'effet de ce terme additionnel de H sur les équations du mouvement est l'augmentation de la variation (80) que les variables dynamiques peuvent subir sans qu'il y ait changement du temps dans la solution générale

$$dg = \int \nu [g, B_0] d^3x + \int \nu^+ [g, B_{r,r'}] d^3x.$$

Ainsi

$$dA^s = \int \nu^+ [A^s, (B_{r,r'})'] d^3x' = -\nu^+ s.$$

Un tel changement de A^s conduit à un changement indéterminé de A_s^s sans changer $F^{rs} = A^{sr} - A^{rs}$.

Nous avons maintenant un changement des A qui correspond à une transformation de jauge générale. Nous pouvons nous rendre compte maintenant pourquoi l'hamiltonien (78) n'était pas satisfaisant au point de vue physique. La raison se trouve dans le fait qu'il donnait lieu à des équations de mouvement permettant seulement les transformations de jauge pour lesquelles S est nul à l'instant initial. Nous nous débarrassons de cette restriction sur S en généralisant l'hamiltonien sous sa nouvelle forme (81). Nous pouvons simplifier l'hamiltonien (81). En effet, nous pouvons l'écrire

$$(82) \quad H = \int \left\{ \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} - \frac{1}{2} B_r B^r - B_{r,r'} A^0 \right\} d^3x + \int \nu B_0 d^3x + \int \nu^+ B_{r,r'} d^3x \\ = \int \left\{ \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} - \frac{1}{2} B_r B^r \right\} d^3x + \int \nu B_0 d^3x + \int \tilde{\nu} B_{r,r'} d^3x,$$

avec un nouveau coefficient indéterminé \tilde{c} . Les coordonnées dynamiques A^0 n'apparaissent plus du tout dans (82) et ses conjuguées B_0 s'y trouvent seulement dans le terme $\int \tilde{c} B_0 d^3x$, dont l'effet consiste à donner des variations indéterminées aux A^0 et aucune variation aux autres variables dynamiques. Ainsi nous pouvons négliger entièrement les variables dynamiques A^0 et B_0 , et écrire l'hamiltonien

$$(83) \quad H = \int \left\{ \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} - \frac{1}{2} B_r B^r \right\} d^3x + \int \tilde{c} B_r{}^r d^3x$$

sans modifier les équations du mouvement. Les variables A^0 et B_0 n'ont plus de signification physique.

13. Le champ électromagnétique en interaction avec le champ de Pauli-Weisskopf. — Le champ de Pauli-Weisskopf nous donne, après quantification, des particules chargées sans spin qui satisfont à la statistique de Bose. Il est possible que de telles particules se trouvent dans la nature comme des sortes de mésons. Ces particules sont les particules chargées les plus simples, et c'est pour cette raison que nous commencerons avec elles l'étude de l'interaction des particules avec le champ électromagnétique.

Le champ de Pauli-Weisskopf est décrit par une variable de champ ψ qui est scalaire et complexe. Appelons $\bar{\psi}$ le conjugué complexe de ψ . La densité d'action pour ce champ en interaction avec le champ électromagnétique est

$$(84) \quad \mathcal{L} = (\bar{\psi}_\mu - ie A_\mu \bar{\psi})(\psi^\mu + ie A^\mu \psi) - m^2 \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

où e et m sont des paramètres qui deviennent la charge et la masse des particules après quantification.

En variant les vitesses ψ^0 , $\bar{\psi}^0$, $A^{\mu 0}$ dans la fonction de Lagrange, nous trouvons

$$(85) \quad \delta L = \int \left\{ (\bar{\psi}_0 - ie A_0 \bar{\psi}) \delta \psi^0 + (\psi_0 + ie A_0 \psi) \delta \bar{\psi}^0 + F_{\mu 0} \delta A^{\mu 0} \right\} d^3x.$$

Les quantités de mouvement χ , $\bar{\chi}$, B_μ conjuguées aux coordonnées dynamiques ψ , $\bar{\psi}$, A^μ sont faiblement égales aux coefficients de $\delta \psi^0$, $\delta \bar{\psi}^0$, $\delta A^{\mu 0}$

$$(86) \quad \chi \approx \bar{\psi}_0 - ie A_0 \bar{\psi}, \quad \bar{\chi} \approx \psi_0 + ie A_0 \psi, \quad B_\mu \approx F_{\mu 0}.$$

Nous avons toujours l'équation \emptyset , $B_0 \approx 0$.

Les équations du champ (10) nous donnent, en posant $V = A^\mu$:

$$F_{\mu\nu} \approx ie \{ (\bar{\Psi}_\mu - ie A_\mu \bar{\Psi}) \psi - \bar{\Psi} (\psi_\mu + ie A_\mu \psi) \}.$$

En prenant $\mu = 0$, nous trouvons

$$(87) \quad B_{r^r} + ie (\chi \psi - \bar{\Psi} \bar{\chi}) \approx 0.$$

Cette équation ne contient pas de vitesses, elle est donc une équation χ et représente la généralisation de l'équation (74). Nous vérifions facilement que les \emptyset et les χ sont toujours de première classe.

L'hamiltonien est

$$H = H_1 + H_2,$$

où H_1 est l'hamiltonien du champ électromagnétique dans le vide, donné par (75) ou bien (78) et (76), et

$$(88) \quad H_2 = \int \{ \chi \psi_0 + \bar{\chi} \bar{\psi}_0 - (\bar{\Psi}_0 - ie A_0 \bar{\Psi}) (\psi_0 + ie A_0 \psi) + m^2 \bar{\Psi} \psi \} d^3x.$$

Nous pouvons mettre l'hamiltonien sous la forme (78), avec une nouvelle fonction β qui ne contient pas de vitesses, de la manière suivante. Nous devons employer uniquement des équations fortes. D'après (86), nous avons

$$(\bar{\Psi}_0 - ie A_0 \bar{\Psi} - \bar{\chi}) (\psi_0 + ie A_0 \psi - \chi) = 0.$$

En ajoutant cette quantité à l'expression (88) de H_2 , nous trouvons

$$(89) \quad H_2 = \int \{ \chi \bar{\chi} - (\bar{\Psi}_r - ie A_r \bar{\Psi}) (\psi^r + ie A^r \psi) + m^2 \bar{\Psi} \psi + ie A_0 (\bar{\Psi} \bar{\chi} - \chi \psi) \} d^3x.$$

Cette expression de H_2 est de la forme voulue, puisqu'elle ne contient pas de vitesses. H_1 est toujours égal à (79). Ainsi H est de la forme (78), avec β augmenté par l'expression (89) de H_2 .

Pour que les équations du mouvement satisfassent à la condition d'intégrabilité dans l'espace des phases, il faut traiter toujours les χ comme des \emptyset de première classe et les ajouter à H avec des coefficients indéterminés. Ainsi, il faut ajouter à H le terme

$$(90) \quad \int_{\nu^+} \{ B_{r^r} + ie (\chi \psi - \bar{\Psi} \bar{\chi}) \} d^3x.$$

Nous obtenons de cette façon un hamiltonien qui donne des équations du mouvement permettant des transformations de jauge générales.

Les termes de H qui contiennent A_0 sont

$$\int \{ ie A_0 (\bar{\Psi} \chi - \chi \Psi) + B_r A^{0r} \} d^3 x = \int A_0 \{ ie (\bar{\Psi} \chi - \chi \Psi) - B_{r'} \} d^3 x.$$

Ces termes peuvent être compris dans l'expression (90), avec un nouveau coefficient \tilde{c} . Ainsi les variables A_0 disparaissent de H , et les variables B_0 restent seulement dans le terme $\int \tilde{c} B_0 d^3 x$ qui produit des variations indéterminées dans A_0 . Nous pouvons encore une fois négliger les variables A_0 et B_0 , et travailler avec l'hamiltonien

$$(91) \quad H = \int \left\{ \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} - \frac{1}{2} B_r B^r + \chi \bar{\chi} \right. \\ \left. - (\bar{\Psi}_r - ie A_r \bar{\Psi}) (\Psi^r + ie A^r \Psi) + m^2 \bar{\Psi} \Psi \right\} d^3 x \\ + \int \tilde{c} \{ B_{r'} + ie (\chi \Psi - \bar{\Psi} \chi) \} d^3 x.$$

Il y a toujours une indétermination dans le mouvement à cause du coefficient arbitraire \tilde{c} dans H . Nous pouvons éliminer cette indétermination en introduisant des conditions supplémentaires dans la théorie. Ces conditions supplémentaires seront des équations faibles qu'on peut traiter comme des équations \mathcal{O} additionnelles, et elles doivent être telles que les équations (87) deviennent toutes de deuxième classe, tandis que l'expression (91) de H reste de première classe quand les \tilde{c} sont bien choisis. Il y a naturellement beaucoup de manières différentes de choisir ces conditions supplémentaires. Nous considérerons deux exemples intéressants :

Nous pouvons prendre en premier lieu les conditions supplémentaires suivantes

$$(92) \quad A_{r'} \approx 0.$$

Si nous développons les potentiels A_r en série de Fourier, nous pouvons décomposer A_r en une partie longitudinale et une partie transversale. L'équation (92) exprime que la partie longitudinale de A_r est nulle. A l'aide des équations (92) et (87) nous pouvons éliminer les coordonnées dynamiques qui se rapportent à la partie longitudinale

de A_r et leurs quantités de mouvement conjuguées. Nous obtenons ainsi l'élimination des ondes longitudinales du champ électrodynamique, comme Fermi l'a fait dans son électrodynamique quantique.

Nous pouvons établir une théorie équivalente à cette élimination des ondes longitudinales à l'aide de nos méthodes générales, sans employer une résolution de Fourier du champ électromagnétique. Effectuons une transformation des crochets de Poisson par la méthode du paragraphe 9, en prenant pour les θ les premiers membres de (87) et (92). Nous avons ainsi deux θ pour chaque valeur de x_1, x_2, x_3 .

$$(93) \quad \theta_1 = B_{r'} + ie(\chi\psi - \bar{\psi}\bar{\chi}), \quad \theta_2 = A_{r'}.$$

Les coefficients c du paragraphe 9 se rapportent chacun à deux θ , et il faut les écrire

$$c_{11}(xx'), \quad c_{12}(xx'), \quad c_{21}(xx'), \quad c_{22}(xx'),$$

où x signifie x_1, x_2, x_3 et x' signifie x'_1, x'_2, x'_3 . Ces coefficients doivent satisfaire aux conditions (64) du paragraphe 9, qui sont

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \{ c_{11}(xx')[\theta_1, \theta_1''] + c_{21}(xx')[\theta_2, \theta_1''] \} d^3x = \delta_3(x' - x''), \\ \int \{ c_{12}(xx')[\theta_1, \theta_1''] + c_{22}(xx')[\theta_2, \theta_1''] \} d^3x = 0, \\ \int \{ c_{11}(xx')[\theta_1, \theta_2''] + c_{21}(xx')[\theta_2, \theta_2''] \} d^3x = 0, \\ \int \{ c_{12}(xx')[\theta_1, \theta_2''] + c_{22}(xx')[\theta_2, \theta_2''] \} d^3x = \delta_3(x' - x''). \end{array} \right.$$

Nous avons

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\theta_1, \theta_1'] = 0, \quad [\theta_2, \theta_2'] = 0, \\ [\theta_1, \theta_2'] = -[\theta_2, \theta_1'] = [B_{r'}, (\Lambda_s^s)'] \\ \quad = -g_{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} \delta_3(x - x') = -\nabla^2 \delta_3(x - x'). \end{array} \right.$$

En substituant ces valeurs dans (74), nous trouvons

$$\begin{aligned} c_{11}(xx') &= c_{22}(xx') = 0, \\ c_{12}(xx') &= -c_{21}(xx') = \frac{1}{4\pi} |x - x'|^{-1}, \end{aligned}$$

où $|x - x'|$ signifie la distance entre les deux points x_1, x_2, x_3 et x'_1, x'_2, x'_3 .

Les nouveaux crochets de Poisson sont

$$(96) \quad [\xi, \eta]^* = [\xi, \eta] + \frac{1}{4\pi} \iint \{ [\xi, \theta_1][\theta_2, \eta] - [\xi, \theta_2][\theta_1, \eta] \} |x - x'|^{-1} d^3x d^3x'.$$

Ainsi

$$(97) \quad \begin{cases} [A_r, B^{s'}]^* = g^{rs} \delta(x - x') - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} \frac{1}{|x - x'|}, \\ [\chi, B^{s'}]^* = -\frac{ie}{4\pi} \chi \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{1}{|x - x'|}, \\ [\psi, B^{s'}]^* = \frac{ie}{4\pi} \psi \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{1}{|x - x'|}. \end{cases}$$

Les crochets de Poisson fondamentaux qui sont indépendants de ceux-ci ne sont pas changés par la transformation.

Avec les nouveaux crochets de Poisson nous pouvons changer les équations (87) et (92) en équations fortes. Ainsi le deuxième terme dans l'expression (91) de H disparaît. Nous obtenons une forme de la théorie où l'effet du champ de Coulomb apparaît dans les équations comme un changement des crochets de Poisson.

Au lieu des conditions supplémentaires (92), nous pouvons prendre les conditions

$$(98) \quad \psi - \bar{\psi} \approx 0$$

de façon que ψ soit réel. Nous pouvons faire encore une fois une transformation des crochets de Poisson, en prenant pour les θ les premiers membres de (87) et (98). Cependant, il est plus simple de passer d'abord des variables dynamiques ψ et $\bar{\psi}$ aux variables réelles R et γ , définies par

$$(99) \quad \psi = R e^{-i\gamma}.$$

Les quantités de mouvement P et ρ conjuguées à R et γ satisfont à

$$\begin{aligned} P dR + \rho d\gamma &= \chi d\psi + \bar{\chi} d\bar{\psi} \\ &= \chi(dR - Ri d\gamma) e^{-i\gamma} + \bar{\chi}(dR + Ri d\gamma) e^{i\gamma}, \end{aligned}$$

donc

$$(100) \quad \begin{cases} P = \chi e^{-i\gamma} + \bar{\chi} e^{i\gamma}, \\ \rho = -iR\chi e^{-i\gamma} + iR\bar{\chi} e^{i\gamma} = -i(\chi\psi - \bar{\chi}\bar{\psi}). \end{cases}$$

Les équations (87) et (98) deviennent, avec les nouvelles variables,

$$(101) \quad B_{r'} - e\rho \approx 0,$$

$$(102) \quad \gamma \approx 0.$$

Nous pouvons employer ces équations pour éliminer entièrement les variables dynamiques conjuguées γ et ρ de la théorie. L'hamiltonien (91) devient, à l'aide de (99) et (100),

$$\begin{aligned}
 (103) \quad \mathbb{H} &= \int \left\{ \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} - \frac{1}{2} B_r B^r + \frac{1}{4} (P^2 + e^2 R^{-2}) \right. \\
 &\quad \left. - [R_r + iR(\gamma_r - eA_r)][R^r - iR(\gamma^r - eA^r)] + m^2 R^2 \right\} d^3x \\
 &\quad + \int \tilde{\varphi} (B_r{}^r - e\varphi) d^3x \\
 &= \int \left\{ \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} - \frac{1}{2} B_r B^r + \frac{1}{4} P^2 + \frac{1}{4} e^{-2} R^{-2} (B_r{}^r)^2 \right. \\
 &\quad \left. - R_r R^r - e^2 R^2 A_r A^r + m^2 R^2 \right\} d^3x \\
 &\quad + \int v_1 \gamma d^3x + \int v_2 (B_r{}^r - e\varphi) d^3x,
 \end{aligned}$$

avec certains coefficients v_1 et v_2 . Nous devons choisir \tilde{c} tel que (102) reste toujours valable. Il en résulte $v_2 \approx 0$, et ainsi le dernier terme de (103) est fortement égal à zéro. L'avant-dernier terme de (103) a le seul effet sur les équations du mouvement de faire varier ρ de la bonne façon, pour que (101) reste toujours valable; nous pouvons négliger ce terme quand nous abandonnons les variables γ et ρ de la théorie. Nous avons donc finalement pour l'hamiltonien

$$\begin{aligned}
 (104) \quad \mathbb{H} &= \int \left\{ \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} - \frac{1}{2} B_r B^r + \frac{1}{4} P^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} e^{-2} R^{-2} (B_r{}^r)^2 - R_r R^r - e^2 R^2 A_r A^r + m^2 R^2 \right\} d^3x.
 \end{aligned}$$

Nous avons obtenu ainsi une nouvelle forme de la théorie de l'interaction du champ de Pauli-Weisskopf et du champ électromagnétique, où le champ de Pauli-Weisskopf est décrit par une fonction réelle R . Cette nouvelle forme est remarquable parce que l'hamiltonien contient un terme en e^{-2} qui ne diminue pas quand la charge électrique e décroît. Ainsi la théorie des perturbations ordinaires qui emploie des développements en série de puissances positives de e n'est plus valable.

La nouvelle forme de la théorie est certainement équivalente à la forme ordinaire en Mécanique classique, parce qu'elle conduit aux mêmes équations du mouvement. Après quantification, il n'est plus certain que les deux formes soient tout à fait équivalentes, parce que

l'ordre des facteurs dans H devient important et pourrait perturber la transformation d'une forme à l'autre.

14. Le champ électromagnétique en interaction avec des électrons à spin. — Considérons un champ décrit par une fonction ψ à quatre composantes complexes, et prenons pour la densité d'action

$$(105) \quad \mathcal{L} = \mathcal{R} \left\{ \bar{\psi} (i\psi^0 + eA^0\psi) + \bar{\psi} \alpha_r (i\psi^r + eA^r\psi) + m\bar{\psi} \alpha_m \psi \right\} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

où \mathcal{R} signifie « partie réelle de », et les α sont les matrices 4×4 qui décrivent le spin d'un électron. Ces α sont multipliés avec $\bar{\psi}$ à gauche et avec ψ à droite selon la loi de multiplication des matrices; l'ordre des facteurs $\bar{\psi}$, α et ψ dans (105) est donc important. Formons l'hamiltonien de cette densité d'action. La quantification de cet hamiltonien avec des relations d'anticommutation à la place des relations de commutation pour les variables ψ et leurs conjuguées nous donnera la théorie du champ électromagnétique en interaction avec des électrons à spin.

En variant les vitesses ψ^0 , $\bar{\psi}^0$, $A^{\mu 0}$ dans la fonction de Lagrange, nous trouvons

$$(106) \quad \begin{aligned} \delta L &= \int \left\{ \mathcal{R} i \bar{\psi} \delta \psi^0 + F_{\mu 0} \delta A^{\mu 0} \right\} d^3 x \\ &= \int \left\{ \frac{1}{2} i (\bar{\psi} \delta \psi^0 - \psi \delta \bar{\psi}^0) + F_{\mu 0} \delta A^{\mu 0} \right\} d^3 x. \end{aligned}$$

Les quantités de mouvement Z , \bar{Z} , B_μ conjuguées aux coordonnées dynamiques ψ , $\bar{\psi}$, A^μ sont faiblement égales aux coefficients de $\delta \psi^0$, $\delta \bar{\psi}^0$, $\delta A^{\mu 0}$, donc

$$(107) \quad Z \approx \frac{1}{2} i \bar{\psi}, \quad \bar{Z} \approx -\frac{1}{2} i \psi,$$

$$(108) \quad B_\mu \approx F_{\mu 0},$$

Z a naturellement quatre composantes, qui correspondent aux quatre composantes de ψ . Les équations (107) ne contiennent pas de vitesses et sont ainsi des équations \emptyset .

D'après (108) nous voyons que nous avons toujours l'équation \emptyset

$$(109) \quad B_0 \approx 0.$$

Les équations (109) ne contiennent pas de vitesses et sont ainsi des équations \emptyset .

Les équations du champ (10) nous donnent, en posant $V = A^0$:

$$F_{0\nu} \approx e \bar{\psi} \psi.$$

Donc

$$(110) \quad B_r{}^r + e \bar{\psi} \psi \approx 0.$$

Cette équation ne contient pas de vitesses; elle est donc une équation χ . Nous voyons facilement que (109) et (110) sont de première classe. Les équations (107), par contre, sont de deuxième classe, puisque le crochet de Poisson d'une composante de $\chi - \frac{1}{2} i \bar{\psi}$ avec la composante correspondante de $\bar{\chi} + \frac{1}{2} i \psi$ n'est pas nul.

L'hamiltonien est $H = H_1 + H_2$, où H_1 est l'hamiltonien pour le champ électromagnétique seul, donné par (78) et (76), et

$$(111) \quad H_2 = \int \left\{ \chi \dot{\psi}^0 + \bar{\chi} \dot{\bar{\psi}}^0 - \mathcal{R} \bar{\psi} [i \dot{\psi}^0 + e A^0 \psi + z_r (i \dot{\psi}^r + e A^r \psi) + m z_m \psi] \right\} d^3x.$$

Il faut éliminer les vitesses de cette expression, en employant seulement des équations fortes.

Nous obtenons des équations du champ (10), en posant V égal à une des composantes de ψ , équation faible

$$-\frac{1}{2} i \dot{\psi}^0 - \frac{1}{2} i z_r \dot{\psi}^r \approx \frac{1}{2} i \dot{\psi}^0 + e A^0 \psi + \frac{1}{2} i z_r \dot{\psi}^r + e z_r A^r \psi + m z_m \psi,$$

qui se réduit à

$$(112) \quad i \dot{\psi}^0 + e A^0 \psi + z_r (i \dot{\psi}^r + e A^r \psi) + m z_m \psi \approx 0.$$

Ainsi, à l'aide de la première des équations faibles (107), nous obtenons l'équation forte

$$(113) \quad (2i\chi + \bar{\psi}) \{ i \dot{\psi}^0 + e A^0 \psi + z_r (i \dot{\psi}^r + e A^r \psi) + m z_m \psi \} = 0.$$

En ajoutant la partie réelle du premier membre de (113) à l'expression (111) de H_2 , nous trouvons

$$(114) \quad H_2 = \int \mathcal{R} 2i\chi \{ e A^0 \psi + z_r (i \dot{\psi}^r + e A^r \psi) + m z_m \psi \} d^3x.$$

Les vitesses ont disparu de cette expression.

Avant qu'on puisse quantifier cette théorie, il faut éliminer les \mathcal{O} de deuxième classe. Pour cela, effectuons une transformation des crochets de Poisson, comme celle du paragraphe 9, avec les θ suivants :

$$(115) \quad \theta_{1a} = \chi_a - \frac{1}{2} i \bar{\psi}_a \approx 0, \quad \theta_{2a} = \bar{\chi}_a + \frac{1}{2} i \psi_a \approx 0,$$

où l'indice a se rapporte aux quatre composantes de ψ ou de χ . Ces θ ont les crochets de Poisson

$$(116) \quad [\theta_{1a}, \theta'_{1b}] = 0, \quad [\theta_{2a}, \theta'_{2b}] = 0, \quad [\theta_{1a}, \theta'_{2b}] = -i \delta_{ab} \delta_3(x - x').$$

Les coefficients c se rapportent chacun à deux θ , et il faut les écrire

$$c_{1a1b}(xx'), \quad c_{1a2b}(xx'), \quad c_{2a1b}(xx'), \quad c_{2a2b}(xx').$$

Ils satisfont aux équations (94) avec les indices a, b, \dots insérés là où c'est nécessaire. Nous trouvons facilement que

$$\begin{aligned} c_{1a1b}(xx') &= 0, & c_{2a2b}(xx') &= 0, \\ c_{1a2b}(xx') &= -c_{2b1a}(xx') = i \delta_{ab} \delta_3(x - x'). \end{aligned}$$

Les nouveaux crochets de Poisson sont donc

$$[\xi, \eta]^* = [\xi, \eta] + i \Sigma_a \int \{ [\xi, \theta_{1a}] [\theta_{2a}, \eta] - [\xi, \theta_{2a}] [\theta_{1a}, \eta] \} d^3x.$$

Donc

$$(117) \quad \begin{aligned} & [\psi_a, \psi'_b]^* = 0, & [\bar{\psi}_a, \bar{\psi}'_b]^* &= 0, \\ & [\psi_a, \bar{\psi}'_b]^* &= -i \delta_{ab} \delta_3(x - x'). \end{aligned}$$

Quand nous travaillons avec les nouveaux crochets de Poisson, nous pouvons considérer les équations (107) comme des équations fortes. Nous pouvons employer ces équations fortes pour faire disparaître les variables χ et $\bar{\chi}$ de la théorie, ce qui fait que (114) devient

$$(118) \quad H_2 = \int -\mathcal{R} \bar{\psi} \{ e A^0 \psi + z_r (i \psi^r + e A^r \psi) + m z_m \psi \} d^3x.$$

Les crochets de Poisson (117) et ceux des variables du champ électromagnétique sont maintenant les seuls crochets de Poisson fondamentaux qui soient nécessaires.

Pour que les équations du mouvement satisfassent à la condition d'intégrabilité dans l'espace des phases, et pour qu'elles permettent des transformations de jauge générales, il faut traiter l'équation (110) comme

une équation \mathcal{O} de première classe ; il faut donc ajouter à l'hamiltonien le terme

$$(119) \quad \int v^+ (B_{r,r} + e \bar{\psi} \psi) d^3 x,$$

avec un coefficient v^+ indéterminé. Les termes de H qui contiennent A^0 sont

$$\int \{ -\bar{\psi} e A^0 \psi + B_r A^{0,r} \} d^3 x = - \int A^0 (e \bar{\psi} \psi + B_{r,r}) d^3 x.$$

Ces termes peuvent être compris dans l'expression (119) avec un nouveau coefficient \tilde{v} . Ainsi les variables A^0 disparaissent de H , et les variables B_0 restent seulement dans le terme $\int v B_0 d^3 x$ qui produit des variations indéterminées dans A^0 . Nous pouvons encore une fois négliger les variables A^0 et B_0 , et l'hamiltonien devient

$$(120) \quad H = \int \left\{ \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} - \frac{1}{2} B_r B^r - \mathcal{R} \bar{\psi} [z_r (i \psi^r + e A^r \psi) + m z_m \psi] \right\} d^3 x \\ + \int \tilde{v} (B_{r,r} - e \bar{\psi} \psi) d^3 x.$$

Comme dans le cas du champ de Pauli-Weisskopf, il y a toujours une indétermination dans le mouvement à cause du coefficient arbitraire \tilde{v} dans H , et nous pouvons toujours éliminer cette indétermination en introduisant des équations supplémentaires. Nous pourrions prendre encore une fois les conditions supplémentaires (92) et les utiliser pour éliminer les ondes longitudinales du champ électromagnétique.

Y a-t-il d'autres conditions supplémentaires qui correspondent aux conditions (98) ou (102) du cas de Pauli-Weisskopf? Naturellement, il n'est pas indiqué de détruire la symétrie entre les quatre composantes de ψ , et cela fait qu'il n'est pas facile de trouver une fonction complexe qui puisse prendre la place de la seule fonction ψ dans (98). Il n'est pas possible de construire avec les quatre ψ une fonction complexe qui soit invariante par rapport aux transformations de Lorentz ; on peut cependant construire une fonction qui soit la composante zéro d'un vecteur dans l'espace à quatre dimensions. Nous pouvons utiliser cette fonction dans notre théorie sans contredire la relativité, parce que

L'axe x_0 est déterminé par les surfaces à trois dimensions sur lesquelles nos états sont donnés.

Il est commode pour ce point d'employer la notation des spineurs. Les quatre composantes de ψ sont équivalents à deux spineurs, l'un ayant les composantes ψ_1, ψ_2 , l'autre les composantes ψ_1, ψ_2 . La fonction

$$(121) \quad z = \psi_1 \psi_1 + \psi_2 \psi_2$$

est la fonction voulue, composante zéro d'un vecteur. Nous pouvons donc prendre la condition

$$(122) \quad \bar{z} - z \approx 0$$

pour remplacer la condition (98) et nous trouverons une nouvelle forme pour l'hamiltonien qui donne l'interaction du champ électromagnétique avec les électrons.

Il faut étudier toutes les formes différentes de la théorie pour voir s'il y en a qui soient avantageuses pour la discussion du problème des infinis. Ces formes sont toutes équivalentes dans la théorie classique, mais après quantification il n'est plus certain qu'elles le soient, parce que des différences contenant le facteur \hbar peuvent apparaître.

