ANNALES DE L'I. H. P.

WILLIAM BOWEN BONNOR

II. Les ondes gravitationnelles en Relativité générale

Annales de l'I. H. P., tome 15, nº 3 (1957), p. 146-157
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1957__15_3_146_0>

II.

Les ondes gravitationnelles en Relativité générale.

1. Introduction. — Les ondes gravitationnelles sont un sujet qui excite, actuellement, beaucoup l'attention des mathématiciens britanniques qui s'intéressent à la Relativité. Ce sujet représente un problème véritablement non résolu en Relativité, lequel défie les mathématiciens dans la mesure où les difficultés de sa solution sont mathématiques, et ne nécessitent aucun développement en théorie physique, au moins autant qu'on puisse en juger à l'heure actuelle.

Tout d'abord, résumons l'évidence qui nous mène à supposer qu'il existe des solutions exactes des équations du champ, lesquelles correspondent aux ondes gravitationnelles. Nous suivons de près, ici, un article d'Einstein et de Rosen, écrit il y a plusieurs années [1].

Commençons par les équations du champ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}, \tag{1}$$

et considérons l'approximation du champ faible qui s'écrit

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu},$$

où on utilise une coordonnée imaginaire de temps, et où les $\gamma_{\mu\nu}$ sont petits, de sorte que les produits de ces quantités et de leurs dérivées peuvent être négligés. Si donc, on introduit $\gamma^{\star}_{\mu\nu}$ par

$$\gamma^{\star}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \gamma_{\alpha\alpha},$$

on trouve que les équations du champ (1) deviennent

$$\gamma^{\star}_{\mu\nu,\alpha\alpha} - \gamma^{\star}_{\mu\alpha,\alpha\nu} - \gamma^{\star}_{\nu\alpha,\alpha\mu} + \delta_{\mu\nu} \gamma^{\star}_{\beta\alpha,\beta\alpha} = -8\pi T_{\mu\nu}. \tag{2}$$

Si alors nous faisons une transformation infinitésimale des coordonnées

$$x'_{\mu} = x_{\mu} + \xi_{\mu}, \tag{3}$$

où les ξ_μ sont des fonctions petites, nous trouvons que nous pouvons choisir le système des coordonnées de sorte que

$$\overset{\star}{\gamma}_{\mu\alpha,\alpha} = 0. \tag{4}$$

Cette condition des coordonnées est compatible avec les équations (2), ce qu'on peut vérifier en prenant la divergence des deux côtés.

La condition (4) ne détermine pas complètement le système des coordonnées. Si les $\gamma_{\mu\nu}$ satisfont (4), les $\gamma'_{\mu\nu}$ obtenus par une transformation du type (3)

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \tag{5}$$

sont aussi des solutions de (4) à condition que les ξ_μ satisfassent les conditions

$$\xi_{\mu,\alpha\alpha} = 0.$$

Si l'on peut faire disparaître un champ de $\gamma_{\mu\nu}$ par l'addition de termes tels que (5) (c'est-à-dire, par une transformation infinitésimale) le champ n'est qu'un champ apparent, et ne correspond pas aux ondes vraies et physiques.

D'après les équations (2) et (4), les équations gravitationnelles pour l'espace vide peuvent être écrites

$$\overset{\star}{\gamma}_{\mu\nu,\alpha\alpha} = 0,$$
$$\overset{\star}{\gamma}_{\mu\alpha,\alpha} = 0.$$

Considérons des ondes gravitationnelles qui vont dans la direction de l'axe positif x_1, en prenant

$$\overset{\star}{\gamma}_{\mu\nu} = \Phi_{\mu\nu}(x_1 + ix_4) \qquad [= \Phi_{\mu\nu}(x - t)].$$

Ainsi les $\gamma^\star_{\mu\nu}$ doivent satisfaire

$$\gamma^\star_{11} + i\gamma^\star_{14} = 0,$$
$$\gamma^\star_{41} + i\gamma^\star_{44} = 0,$$
$$\gamma^\star_{21} + i\gamma^\star_{24} = 0,$$
$$\gamma^\star_{31} + i\gamma^\star_{34} = 0.$$

Puis on peut classer les ondes planes, progressives et gravitationnelles en trois catégories :

a. ondes purement longitudinales qui ont $\gamma^\star_{11}$, $\gamma^\star_{14}$, $\gamma^\star_{44}$ différents de zéro ;

b. ondes mi-longitudinales, mi-transversales, qui ont seulement $\gamma^{\star}_{21}$ et $\gamma^{\star}_{24}$, ou seulement $\gamma^{\star}_{31}$ et $\gamma^{\star}_{34}$ différents de zéro;

c. ondes purement transversales, qui ont seulement $\gamma^{\star}_{22}$, $\gamma^{\star}_{33}$, $\gamma^{\star}_{23}$ différents de zéro.

Il arrive que les types *a* et *b* sont des champs seulement apparents parce qu'ils peuvent être transformés en champ euclidien ($\gamma_{\mu\nu} = 0$) par une transformation du type (3). D'ailleurs, dans le cas *c*, les ondes ne sont qu'apparentes si

$$\gamma^{\star}_{22} = \gamma^{\star}_{33} \neq 0, \qquad \gamma^{\star}_{23} = 0.$$

Ceci laisse comme seul cas pour de vraies ondes planes celui où

$$\gamma_{22} = -\gamma_{33}.$$

ou

$$\gamma_{23} \neq 0.$$

De la première approximation des équations du champ, il semble donc qu'elles doivent être des ondes planes et gravitationnelles du type transversal.

2. Les ondes cylindriques. — Einstein et Rosen cessèrent d'examiner les ondes planes dans leur exposé. Ils se mirent à étudier des ondes cylindriques et dans ce cas ils obtinrent des solutions exactes.

Écrivons la métrique appropriée à des ondes à symétrie cylindrique. Soit $r = 0$ l'axe de rotation, z la coordonnée mesurée parallèlement à cet axe, et soit θ la coordonnée angulaire. La métrique est

$$ds^2 = -A\,dz^2 - B\,dr^2 - C\,d\theta^2 + D\,dt^2 + 2E\,dr\,dt,$$

où A, B, C, D, E sont des fonctions de r et de t seulement. Au moyen d'une transformation de coordonnées, on peut s'arranger pour que

$$B = D, \qquad E = 0.$$

Si alors on écrit les équations du champ

$$R_{\mu\nu} = 0$$

en fonction de A, B et C, on trouve qu'il est possible, sans perte de généralité, de choisir les coordonnées de sorte que la métrique devienne

$$ds^2 = -e^{\rho}\,dz^2 - e^{\lambda}\,dr^2 - r^2 e^{-\rho}\,d\theta^2 + e^{\lambda}\,dt^2, \tag{6}$$

où

$$\rho = \rho(r, t), \qquad \lambda = \lambda(r, t).$$

Les équations qui doivent être satisfaites par ρ et λ sont

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{1}{2} r \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 \right], \\
&\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0, \\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} = r \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

L'équation (7) est l'équation pour des ondes cylindriques dans un espace euclidien à trois dimensions, et l'on peut en obtenir des solutions qui correspondent à des ondes soit progressives, soit stationnaires. Des ondes progressives nécessitent un changement séculier dans la métrique lequel correspond au fait que les ondes emportent de l'énergie de la source. La source des ondes est localisée sur l'axe $r = 0$; elle est représentée par une singularité dans la métrique.

3. **Une solution partout régulière.** — Tout ce qui vient d'être décrit jusqu'ici se trouve dans l'article d'Einstein et de Rosen. Voyons maintenant des résultats nouveaux.

Le Professeur Synge de Dublin, dans son livre récent [2] a décrit des solutions des équations de Maxwell qui sont partout régulières et qui n'ont pas de sources. Étudions comment adapter son travail au cas de la symétrie cylindrique en Relativité pour donner des solutions qui sont régulières dans un sens que je vais préciser.

D'abord, je vais examiner briévement l'idée de base du travail de Synge. Considérons l'équation ordinaire des ondes

$$
(8) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0,
$$

et la solution simple

$$
\Phi = \frac{1}{S},
$$

où

$$
S = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2 (t - t_0)^2,
$$

et où x_0, y_0, z_0, t_0 sont des constantes. Soit donc les constantes complexes, et posons

$$
S = A - iB,
$$

où A et B sont réels. Alors

$$
\Phi = \frac{A}{A^2 + B^2} + i \frac{B}{A^2 + B^2} = U + iV.
$$

Dans ce cas U et V satisfont tous les deux à l'équation (8), et il est facile de choisir les constantes complexes de sorte que A et B ne disparaissent pas simultanément. Par ce procédé, Synge trouve des solutions qui sont régulières partout dans l'espace-temps. Puis Synge montre comment de telles solutions engendrent des champs qui satisfont les équations de Maxwell et qui sont partout régulières.

Appliquons maintenant la même idée au champ de la Relativité générale à symétrie cylindrique. Prenons pour la solution complexe de (7) la fonction

$$\rho = \frac{4m}{[r^2 - (t - ia)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

où m et a sont des constantes réelles. Séparons les parties réelles et imaginaires

$$(9) \qquad \rho = \frac{2\sqrt{2}\, m\left[u + \sqrt{u^2+v^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} - i\,\frac{2\sqrt{2}\, m\left[\sqrt{u^2+v^2} - u\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

où

$$u = r^2 - t^2 + a^2, \qquad v = 2at.$$

Si l'on choisit la partie réelle de (9) comme solution de (7) on trouve comme solution complète pour la métrique (6)

$$(10) \qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{2\sqrt{2}\, m\left[u + \sqrt{u^2+v^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{u^2+v^2}}, \\ \lambda = -\dfrac{2\sqrt{2}\, m\left[u + \sqrt{u^2+v^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ \qquad - \dfrac{2m^2 r^2 (u^2 - v^2)}{(u^2+v^2)^2} + \dfrac{m^2}{a^2}\left[\dfrac{r^2 - a^2 - t^2}{\sqrt{u^2+v^2}} + 1\right]. \end{cases}$$

La solution (10) est une solution des équations du champ de la Relativité générale laquelle est non singulière dans le sens suivant :

a. les $g_{\mu\nu}$ ne sont nulle part infinis et $(-g)^{\frac{1}{2}}$ n'est nulle part égal à zéro. (Ici j'excepte les singularités sans importance qui viennent de l'emploi des coordonnées polaires, celles-ci peuvent être éliminées en les transformant en coordonnées cartésiennes);

b. dans le voisinage de tous les points, y compris ceux à l'infini, on peut, par transformation, réduire la métrique à la forme galiléenne;

c. le tenseur de Riemann n'est nulle part infini, et tend vers zéro quand r et t tendent vers l'infini, séparément ou ensemble.

Autant que je sache, aucune solution non singulière des équations du champ pour l'espace vide n'a été publiée, et je crois qu'on s'est demandé si de telles solutions existent.

La signification physique de la solution n'est pas du tout évidente. Elle représente évidemment une onde qui change de forme avec le temps. Quoiqu'elle excerce un champ gravitationnel, bien entendu, ce champ ne ressemble pas à celui de la matière gravitante. Le champ statique de même symétrie est celui d'une masse cylindrique de longueur infinie, et la solution pour un tel champ se comporte tout à fait différemment, à l'infini, de la solution (10). Le champ semble être celui d'une onde qui vient de $r = \infty$ à $t = -\infty$, qui augmente en intensité jusqu'à $t = 0$, et puis qui décline et disparaît enfin complètement à $t = +\infty$.

Il n'y a aucune indication de la source de l'onde, et ceci est surtout remarquable pour la raison suivante. On peut trouver, dans le cas statique, des solutions qui correspondent à des champs qui sont réguliers en chaque point, mais dans de telles solutions des singularités se présentent à l'infini, et correspondent aux sources du champ. C'est le cas, par exemple, pour un champ uniforme et gravitationnel. Cependant dans la solution de l'onde (10) la solution est régulière à l'infini, et il n'y a aucune singularité qui représente des sources.

On peut se demander si cette solution bizarre se présente seulement à cause de la condition artificielle de la symétrie cylindrique. Il est vrai, bien entendu, que le champ ne dépend pas de la coordonnée z, de sorte qu'il en est de même sur un cylindre infini $r = \text{const.}$ Donc au temps $t = 0$, par exemple, le tenseur de Riemann ne tend pas vers zéro pour $z = \infty$ et le champ s'étend sur une longueur infinie en direction de l'axe des z. Mais je ne crois pas que la symétrie cylindrique soit d'une telle importance vitale. Je crois qu'une solution exacte des équations qui dépende de z ainsi que de r et t révélerait des champs semblables à celui que j'ai décrit, et qui tendent vers zéro en toutes directions spatiales pour des valeurs quelconques de t. Synge a trouvé de tels champs électromagnétiques en Relativité restreinte.

Puisque l'équation satisfaite par ρ est linéaire, on peut superposer des solutions différentes. On peut prendre, par exemple

$$\rho = \frac{2\sqrt{2}\, m_1 \left[u_1 + \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} + \frac{2\sqrt{2}\, m_2 \left[u_2 + \sqrt{u_2^2 + v_2^2} \right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}};$$

où

$$u_1 = r^2 - t^2 + a_1^2, \qquad u_2 = r^2 - t^2 + a_2^2,$$
$$v_1 = 2\, a_1 t, \qquad v_2 = 2\, a_2 t.$$

Ceci n'introduit aucune singularité en λ. Il y a, en effet, une grande classe de champs des ondes de ce type général, ce qu'on peut voir de la façon suivante.

Considérons le problème statique à symétrie cylindrique qui dépend des deux coordonnées spatiales x_1 et x_2. Ce problème a été résolu par Weyl il y a de nombreuses années. On peut écrire la métrique

$$ds^2 = -\, e^{\lambda} (dx_1^2 + dx_2^2) - x_2^2\, e^{-\rho}\, dx_3^2 + e^{\rho}\, dx_4^2, \tag{11}$$

où

$$\lambda = \lambda(x_1, x_2), \qquad \rho = \rho(x_1, x_2).$$

On trouve que ρ doit satisfaire l'équation de Laplace dans ce système de coordonnées :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_2^2} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = 0.$$

La fonction λ doit satisfaire

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} = x_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \frac{\partial \rho}{\partial x_2},$$
$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = \frac{1}{2} x_2 \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right)^2 \right].$$

Cet ensemble d'équations a des solutions qui correspondent à des distributions de la matière symétriques autour de l'axe x_1. En particulier, il y a une solution qui correspond à deux particules qui restent dans des positions quelconques sur l'axe x_1. Considérons par exemple, la solution pour deux particules, étudiée par Weyl :

$$\rho = -\frac{2 m_1}{[(x_1 - a_1)^2 + x_2^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{2 m_2}{[(x_1 - a_2)^2 + x_2^2]^{\frac{1}{2}}}. \tag{12}$$

Si l'on calcule maintenant λ, on trouve qu'il y a une singularité non seulement aux positions des particules, lesquelles sont

$$(a_1, 0, 0) \quad (a_2, 0, 0)$$

mais aussi le long de l'axe x_1, entre ces deux points. Notons en passant, que cette dernière singularité est bien remarquable. Elle ne se présente pas par une valeur infinie du tenseur fondamental ou du tenseur de Riemann. Ce qui se passe, c'est que quelques-uns des $g_{\mu\nu}$ deviennent indéterminés de telle sorte qu'il est impossible de réduire la métrique à la forme galiléenne au moyen d'une transformation des coordonnées. La possibilité de telles singularités attire l'attention sur un problème mathématique très important de relativité : définir une singularité essentielle dans la théorie.

La présence de la singularité entre les deux particules doit représenter un support qui les tient séparées. C'est cela qui permet l'existence d'une solution statique pour les deux particules.

La métrique (11) peut être transformée en la métrique (6) par la transformation complexe

$$x_1 = it, \qquad x_2 = r, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = iz.$$

Si nous faisons dans la solution (12)

$$m_1 = m_2 = m, \qquad a_1 = -a_2 = a$$

et si nous effectuons la transformation, nous trouvons que nous avons essentiellement la solution de l'onde (10). (De petits ajustements sont nécessaires pour assurer que la métrique transformée est entièrement réelle, mais ceux-ci sont facilement accomplis.) Il est facile de vérifier que les singularités de la solution (12) disparaissent au cours de la transformation.

Au moyen de transformations de ce type, je crois qu'il doit être possible de trouver une grande classe de champs non singuliers des ondes, lesquels correspondent aux champs statiques de la métrique (11).

4. **Une solution exacte pour des ondes planes.** — Je vais maintenant décrire brièvement quelques solutions intéressantes qui correspondent à des ondes planes et gravitationnelles. Ce travail, non encore publié, est dû à M. Robinson de l'Université du Pays de Galles, et je prends la responsabilité de cette présentation.

Dans le cas de l'approximation linéaire, nous avons vu que nous attendrions des ondes planes et progressives (en direction de x_1)

pourvu que

$$g_{22} \neq g_{33}$$

ou

$$g_{23} \neq 0.$$

Prenons pour la métrique

$$ds^2 = -A\,dx^2 - B\,dy^2 - C\,dz^2 + 2b\,dy\,dz + D\,dt^2,$$

où A, B, C, b, D sont des fonctions de $x - t$ seulement. Nous pouvons choisir les coordonnées de sorte que

$$A = D,$$

et par une autre transformation, prendre la métrique sous la forme

$$ds^2 = 2a\,dx\,dt - B\,dy^2 - C\,dz^2 + 2b\,dy\,dz,$$

où a, B, C, b sont des fonctions de x seulement. La coordonnée x joue le rôle pris auparavant par $x - t$. Enfin, par une troisième transformation nous pouvons obtenir

$$2a = 1,$$

de sorte que la forme finale de la métrique est

$$ds^2 = dx\,dt - B\,dy^2 - C\,dz^2 + 2b\,dy\,dz, \tag{13}$$

où B, C, b sont des fonctions de x seulement.

Il n'est pas difficile de calculer les équations du champ pour la métrique (13). On trouve une seule équation

$$2XR_{11} = X'' - \frac{X'^2}{2X} + b'^2 - B'C' = 0, \tag{14}$$

où

$$' = \frac{d}{dx}, \qquad X = BC - b^2.$$

Les autres équations du champ sont satisfaites sans restriction sur les fonctions inconnues. Nous avons donc trois fonctions avec une seule relation entre elles, de sorte que deux d'entre elles peuvent être choisies arbitrairement. Ce caractère arbitraire est celui qu'on attend pour un champ d'onde.

Prenons maintenant, comme cas particulier

$$b = 0,$$

de sorte que l'équation (14) se réduit à

$$2\frac{B''}{B}+2\frac{C''}{C}-\frac{B'^2}{B^2}-\frac{C'^2}{C^2}=0.$$

Si nous posons

$$B=p^2, \qquad C=q^2,$$

ceci se réduit à

$$\frac{p''}{p}+\frac{q''}{q}=0.$$

Une solution particulière de cette équation est

$$(15) \qquad p=\sin nx, \qquad q=\operatorname{sh} nx,$$

où n est une constante réelle.

La solution (15) semble être singulière sur les hypersurfaces

$$x=\frac{m\pi}{n}, \qquad x=\pm\infty,$$

où m est un nombre entier.

Il arrive, cependant, qu'on peut faire disparaître les singularités par la transformation suivante :

$$(16) \qquad \begin{cases} x_4=t+ny^2\sin nx\cos nx+nz^2\operatorname{sh} nx\operatorname{ch} nx, \\ x_1=x, \\ x_2=y\sin nx, \\ x_3=z\operatorname{sh} nx. \end{cases}$$

Quand cette transformation a été effectuée, la métrique est

$$(17) \qquad ds^2=dx_4\,dx_1-dx_2^2-dx_3^2+n^2\,dx_1^2(x_2^2-x_3^2),$$

Les singularités sur les hypersurfaces $x=\frac{m\pi}{n}$ ont évidemment disparu. Considérons maintenant le reste des singularités apparaissant à l'infini. On peut, dans les coordonnées originales, choisir arbitrairement l'origine des coordonnées y et z, puisque celles-ci n'interviennent pas dans les coefficients de la métrique (13). Supposons que nous examinions la singularité au point P,

$$x=\infty, \qquad y=\beta, \qquad z=\gamma, \qquad t=t_0,$$

Choisissons comme nouvelle origine le point

$$x=0, \qquad y=\beta, \qquad z=\gamma, \qquad t=0,$$

de sorte que le point P a maintenant les coordonnées

$$\infty, \quad 0, \quad 0, \quad t_0,$$

Alors, en effectuant la transformation (16), le point P se transforme en le point Q :

$$x_1 = \infty, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = t_0,$$

Il est clair que ce point n'est pas singulier dans la métrique (17).

Il est possible de traiter la métrique de cette façon en toute généralité, et les ondes planes et gravitationnelles non singulières existent précisément de la manière prévue d'après la théorie en première approximation. Le trait le plus remarquable du travail de Robinson c'est la disparition des singularités par une transformation telle que (16). La présence des singularités apparentes était probablement la raison pour laquelle les ondes planes et gravitationnelles ont été supposées, autrefois, ne pas exister. Une telle opinion est contenue, par exemple, dans le livre de Bergmann [3].

Un trait important du résultat de Robinson c'est que sa solution exacte soutient la théorie de la première approximation. Ç'aurait été une affaire assez sérieuse si la théorie avait été assez trompeuse pour suggérer des ondes pour lesquelles il n'y a pas de solutions exactes. Il en est ainsi, en particulier, puisque la théorie de la Relativité dépend jusqu'à un certain point de la théorie approchée; par exemple, en dérivant les équations du mouvement des particules.

Robinson a aussi établit l'existence des ondes planes et électromagnétiques sans singularités. Ce résultat est contraire à une conclusion de Rosen d'il y a quelques années.

5. **Conclusion.** — D'après ces investigations, il n'y a aucun doute sur l'existence de solutions non singulières des équations du champ correspondant à des ondes gravitationnelles. La question saillante qui reste est : quelle est la source de ces ondes? La pure existence des solutions pour des ondes sans sources n'établit pas qu'elles ont une existence physique. Il est possible, par exemple, que leur production nécessite l'existence d'une masse négative; dans un tel cas, les solutions n'ont aucune signification physique.

D'autre part, il est possible que des ondes gravitationnelles soient produites chaque fois qu'un corps est accéléré dans le champ gravitationnel d'un autre corps. Einstein et Rosen fournissaient des arguments suggérant que de telles ondes devraient se produire si deux particules oscillent dans le champ gravitationnel mutuel.

Ce qui est nécessaire pour résoudre ce problème, c'est une solution des équations du champ où la source des ondes soit capable d'être clairement identifiée. La solution des ondes cylindriques d'Einstein et de Rosen n'y servit pas parce qu'on ne peut pas dire quel système physique est représenté par la singularité sur l'axe de rotation. Peut-être le travail récent que j'ai décrit donnera un stimulant nouveau à la solution de ce problème.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Einstein et Rosen, *J. Franklin Inst.*, t. 223, 1937, p. 43.
[2] J. L. Synge, *Relativity. The Special Theory.*
[3] P. G. Bergmann, *An Introduction to the Theory of Relativity.*