ANNALES DE L'I. H. P.

EUGENE LUKACS

Les fonctions caractéristiques analytiques

Annales de l'I. H. P., tome 15, n° 4 (1957), p. 217-251

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1957__15_4_217_0>

Les fonctions caractéristiques analytiques

par

Eugene LUKACS [1].

1. **Introduction.** — Cet article traite d'une classe de fonctions caractéristiques qui contient beaucoup de fonctions caractéristiques importantes dans la théorie des probabilités et dans la statistique mathématique. Nous donnerons un exposé de cette théorie et nous parlerons aussi de quelques problèmes spéciaux qui y sont liés. La plus grande partie des résultats fut obtenue au cours des 20 dernières années et ces résultats sont dispersés dans différentes publications et souvent même dans des journaux qu'on ne peut obtenir aisément. C'est pourquoi nous espérons qu'une exposition systématique sera peut-être utile.

Soit $F(x)$ une fonction de répartition, c'est-à-dire une fonction non-décroissante, continue de gauche et telle que $F(-\infty) = 0$, tandis que $F(+\infty) = 1$. La transformée de Fourier de $F(x)$, ou bien

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

s'appelle la fonction caractéristique de la répartition $F(x)$ et cette fonction est définie pour tout t réel. On sait que la fonction $f(t)$ est continue et bornée et que $f(0) = 1$. Alors $\varphi(t) = \log f(t)$ est définie au moins dans un intervalle contenant l'origine. La fonction $\varphi(t)$ s'appelle la seconde caractéristique de la répartition $F(x)$.

Nous dirons qu'une fonction caractéristique est une fonction caractéristique analytique si elle coïncide avec une fonction qui est holomorphe dans le voisinage de l'origine du plan complexe. Plus préci-

[1] Recherches subventionnées par l'Office of Naval Research et par la National Science Foundation (NSF, G 2781).

sément : soit $f(t)$ une fonction caractéristique de la variable réelle t et soit $A(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < \rho$ telle que $A(t) = f(t)$ pour t réel tel que $|t| < \Delta$; dans ces conditions, nous dirons que $f(t)$ est une fonction caractéristique analytique.

L'existence des moments d'une fonction de répartition $F(x)$ est liée intimement à la différentiabilité de sa fonction caractéristique $f(t)$. Désignons par

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF(x)$$

le moment (algébrique) d'ordre k de $F(x)$ et par

$$\beta_k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \, dF(x)$$

son moment absolu d'ordre k. Nous aurons besoin des résultats suivants.

LEMME 1.1. — *Faisons l'hypothèse que la fonction caractéristique $f(t)$ de la répartition $F(x)$ ait une dérivée d'ordre k au point $t = 0$; alors tous les moments de $F(x)$ d'ordre inférieur ou égal à k existent si k est un nombre pair, mais seulement des ordres inférieurs ou égaux à $(k-1)$ si k est un entier impair.*

La première démonstration de ce lemme fut donnée par R. Fortet [7]; un résultat plus général fut obtenu d'une manière simple par O. Szasz et par l'auteur [21].

LEMME 1.2. — *Supposons que le moment d'ordre r, α_r de la fonction de répartition $F(x)$ existe. Alors on peut différentier sa fonction caractéristique $f(t)$ r fois et l'on obtient*

$$f^{(r)}(t) = i^r \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{itx} \, dF(x). \tag{1.1}$$

Il s'ensuit que

$$f^{(r)}(0) = i^r \alpha_r \qquad \text{et que} \qquad |f^{(r)}(t)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r \, dF(x) = \beta_r.$$

Si r est un nombre pair, $r = 2k$, et il devient :

$$|f^{(2k)}(t)| \leqq |f^{2k}(0)| = \alpha_{2k}.$$

2. La bande de régularité et la représentation par une intégrale. —

Dans ce qui suit nous considérerons des fonctions caractéristiques analytiques. Soit $f(t)$ une telle fonction. On déduit alors du lemme 1.1 que tous les moments de sa fonction de répartition existent, donc on peut développer $f(t)$ en série de Mc Laurin

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \alpha_k}{k!} z^k \quad \text{pour} \quad |z| < \rho \qquad (z \text{ complexe}), \tag{2.1}$$

où $\rho > 0$ est le rayon de convergence de cette série.

Nous désignons la partie paire de $f(z)$ par

$$f_0(z) = \frac{1}{2}[f(z) + f(-z)]$$

et la partie impaire par

$$f_1(z) = \frac{1}{2}[f(z) - f(-z)].$$

Alors les deux séries

$$\left\{\begin{aligned} f_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_{2k}}{(2k)!} z^{2k}, \\ f_1(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^{2k-1} \alpha_{2k-1}}{(2k-1)!} z^{2k-1} \end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

convergent aussi dans des cercles autour de l'origine.

Nous désignons par ρ_0 et ρ_1 les rayons de convergence des séries pour $f_0(z)$ et $f_1(z)$.

On déduit de l'inégalité

$$|x^{2k-1}| \leq \frac{1}{2}(x^{2k} + x^{2k-2})$$

que

$$\frac{\alpha_{2k-1}}{(2k-1)!} \leq \frac{\beta_{2k-1}}{(2k-1)!} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_{2k}}{(2k)!}(2k) + \frac{\alpha_{2k-2}}{(2k-2)!}\right]. \tag{2.3}$$

Il s'ensuit que $\rho_1 \geq \rho_0 \geq \rho$ et aussi que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \frac{z^k}{k!}$ converge pourvu que $|z| < \rho_0$.

Soit ξ un nombre réel quelconque et désignons par $\rho_0(\xi)$ [respectivement par $\rho_1(\xi)$] le rayon de convergence de la série de Taylor pour $f_0(z)$ [respectivement pour $f_1(z)$] autour du point $z = \xi$. On voit, à l'aide du lemme 1.2, que

$$|f^{(2k)}(\xi)| \leq \alpha_{2k} \qquad \text{et que} \qquad |f^{(2k-1)}(\xi)| \leq \beta_{2k-1},$$

alors

$$\rho_0(\xi) \geqq \rho_0(0) = \rho_0 \geqq \rho \qquad \text{et} \qquad \rho_1(\xi) \geqq \rho_1(0) = \rho_1 \geqq \rho.$$

Les séries de Taylor des fonctions $f_0(z)$ et $f_1(z)$ ayant pour centre convergent alors dans l'intérieur des cercles dont les rayons sont au moins égaux à ρ. Par conséquent, ceci est également vrai pour $f(z)$ et $f(z)$ est holomorphe au moins dans la bande $|\text{Im}(z)| < \rho$. Le fait qu'une fonction caractéristique analytique est holomorphe dans une bande horizontale fut démontré indépendamment par plusieurs auteurs, par exemple par R. P. Boas [1] et par D. A. Raikov [27].

Nous avons déjà mentionné que la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|y|^\nu \beta_\nu}{\nu!}$ converge pour $|y| < \rho$. Alors

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|y|^\nu \beta_\nu}{\nu!} \geqq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|y|^\nu}{\nu!} \int_{-A}^{B} |x|^\nu \, dF(x) = \int_{-A}^{B} e^{|yx|} \, dF(x)$$

pour $A > 0$, $B > 0$ quelconque. On voit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{|xy|} \, dF(x)$ existe pourvu que $|y| < \rho$ et que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \, dF(x)$ converge si $|e^{izx}| \leqq e^{|yx|}$, où $z = t + iy$. Cela veut dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x)$ est convergente pour t quelconque et $|y| < \rho$. Cette intégrale est une fonction holomorphe dans la bande $|y| < \rho$ et coïncide avec $f(z)$ pour z réel; il faut alors que $f(z)$ soit égale à cette intégrale pour des valeurs complexes $z = t + iy$ pourvu que $|y| < \rho$.

L'intégrale

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \, dF(x), \qquad \text{où} \quad z = t + iy,$$

converge dans une bande

$$-\alpha < y = \text{Im}\, z < \beta, \qquad \text{où} \quad \alpha \geqq \rho, \qquad \beta \geqq \rho$$

et elle est holomorphe dans cette bande. Écrivons

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{izx} \, dF(x) + \int_{-\infty}^{0} e^{izx} \, dF(x) = L_1(z) + L_2(z).$$

Les fonctions $L_1(z)$ et $L_2(z)$ sont des intégrales qui convergent respectivement dans les demi-plans $y > -\alpha$ et $y < \beta$. Posons $z = iw$, alors

$$w = -iz = -it + y \qquad \text{et} \qquad L_1(iw) = \int_0^\infty e^{-wx}\, dF(x) = \Phi(w)$$

converge pour $\operatorname{Re} w = y > -\alpha$.

On sait que la transformée de Laplace

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dG(t)$$

d'une fonction monotone $G(t)$ a une singularité au point d'intersection de son axe de convergence avec l'axe réel. Pour une démonstration, nous renvoyons le lecteur à ([30], p. 58, th. 5*b*). Comme $F(x)$ est non-décroissante, on peut appliquer ce résultat à $\Phi(w)$ et l'on voit que $-\alpha$ est une singularité de $\Phi(w)$. Alors $-i\alpha$ doit être une singularité de $f(z)$. On démontre de même que $+i\beta$ est aussi une singularité de $f(z)$. D'où le théorème :

THÉORÈME 2.1. — *Une fonction caractéristique qui est holomorphe dans un voisinage de l'origine est toujours holomorphe dans une bande horizontale. A l'intérieur de cette bande on peut représenter $f(z)$ par une intégrale de Fourier. La bande peut être le plan entier; sinon elle a une frontière composée d'une ou de deux droites. Les points purement imaginaires de la frontière sont des singularités de $f(z)$.*

Une indication de ce théorème se trouve dans une note d'un article de P. Lévy [15]; à peu près à la même époque, D. A. Raikov [21] a démontré indépendamment qu'une fonction caractéristique analytique est holomorphe dans une bande horizontale et qu'elle est représentée par une intégrale de Fourier à l'intérieur de cette bande.

On peut déduire du théorème 2.1 quelques conséquences utiles.

COROLLAIRE DU THÉORÈME 2.1. — *Une condition nécessaire pour qu'une fonction holomorphe dans un voisinage de l'origine soit une fonction caractéristique est que dans chaque demi-plan la singularité la plus proche de l'axe réel soit située sur l'axe imaginaire.*

A l'aide de ce corollaire on peut reconnaître si une fonction holomorphe donnée peut être une fonction caractéristique.

Soit $f(z)$ une fonction caractéristique analytique avec une bande de régularité $-\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$, alors

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\, dF(x);$$

on a

$$f^{(r)}(z) = \frac{d^r}{dz^r} f(z) = i^r \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{izx}\, dF(x).$$

Écrivons $z = t + iy$, avec t et y réels et $-\alpha < y < \beta$, alors

$$|f^{(r)}(t+iy)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r e^{-xy}\, dF(x).$$

Si $r = 2k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), cela entraîne l'inégalité

$$|f^{(2k)}(t+iy)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-xy}\, dF(x) = |f^{(2k)}(iy)|$$

et, par conséquent,

$$\operatorname*{Max}_{-\infty < t < +\infty} |f^{(2k)}(t+iy)| \leq |f^{(2k)}(iy)|.$$

Ainsi on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.2. — *Le module maximum d'une fonction caractéristique analytique ainsi que celui de ses dérivées d'ordre pair, le long d'une ligne horizontale située à l'intérieur de sa bande de régularité est atteint sur l'axe imaginaire.*

Ce résultat fut trouvé par D. Dugué [6].

Corollaire du théorème 2.2. — *Une fonction caractéristique analytique n'a pas de zéro sur le segment de l'axe imaginaire qui est situé à l'intérieur de sa bande de régularité. Les zéros et les singularités d'une fonction caractéristique analytique sont situés symétriquement par rapport à l'axe imaginaire.*

La première partie du corollaire est une conséquence immédiate du théorème 2.2. On déduit l'énoncé sur les zéros et sur les singularités de la relation fonctionnelle

$$\overline{f(z)} = f(-\bar{z}) \tag{2.4}$$

qui est valide non seulement dans la bande de régularité, mais dans tout le domaine d'analyticité de $f(z)$.

Une fonction caractéristique analytique, dont la bande est le plan entier, est une fonction entière. M. P. Lévy [15] a obtenu un théorème sur l'ordre des fonctions caractéristiques entières que nous reproduirons maintenant.

Soit $f(z)$ une fonction caractéristique entière. Désignons par

$$M(r; f) = \operatorname*{Max}_{|z| \leqq r} |f(z)|$$

le module maximum de $f(z)$ dans le cercle $|z| \leqq r$. Ce maximum est atteint sur la circonférence et nous voyons, en vertu du théorème 2.2, que

$$M(r; f) = \operatorname{Max}(f(ir), f(-ir)).$$

Lemme 2.1. — *Soit $f(z)$ une fonction caractéristique entière, on a alors les inégalités*

$$(f(ir) + f(-ir)) \geqq M(r; f) \geqq \frac{1}{2}(f(ir) + f(-ir)).$$

Une fonction caractéristique entière peut être représentée par une intégrale de Fourier dans tout le plan complexe, donc

$$f(ir) + f(-ir) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch} rx \, dF(x). \tag{2.5}$$

Il s'ensuit (compte tenu du lemme 2.1) que

$$M(r; f) \geqq \int_{|x| \geqq \varepsilon} \operatorname{ch} rx \, dF(x) \geqq \frac{1}{2}(e^{\varepsilon r} + e^{-\varepsilon r}) \int_{|x| \geqq \varepsilon} dF(x) \geqq \frac{1}{2}\left[\int_{|x| \geqq \varepsilon} dF(x)\right] e^{\varepsilon r},$$

où ε est un nombre positif quelconque. Nous écrirons

$$\alpha = \int_{|x| \geqq \varepsilon} dF(x),$$

la condition nécessaire et suffisante pour que $\alpha = 0$ pour $\varepsilon > 0$ quelconque est que $F(x)$ soit une fonction de répartition dégénérée. On obtient de l'inégalité précédente la formule

$$M(r; f) \geqq \frac{\alpha}{2} e^{\varepsilon r}. \tag{2.6}$$

L'ordre ρ d'une fonction entière est définie par

$$\rho = \operatorname*{Lim\,sup}_{r \to \infty} \frac{\operatorname{Log} \operatorname{Log} M(r; f)}{\operatorname{Log} r}. \tag{2.7}$$

On déduit aisément de (2.6) que $\rho \geqq 1$ pourvu que $\alpha \neq 0$ et l'on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 2.3. — *L'ordre d'une fonction caractéristique entière qui n'est pas constante est au moins égal à* 1.

Nous continuerons l'étude des fonctions caractéristiques entières dans la section suivante et traitons maintenant des propriétés de convexité des fonctions caractéristiques analytiques. Supposons que l'intégrale

$$M(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{yx}\, dF(x) \tag{2.8}$$

existe pour $|y| < R$, où R est une constante positive quelconque, $M(y)$ s'appelle alors la fonction génératrice de la répartition $F(x)$. Soit $f(z)$ une fonction caractéristique analytique. En posant $R = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$ nous voyons que la fonction génératrice de la répartition de $f(z)$ existe et que $M(y) = f(-iy)$. Comme $M(y)$ est réelle et positive tandis que $M''(y) \geqq 0$, on voit que $f(-iy)$ est réelle et convexe pour tout y tel que l'intégrale (2.8) existe. On peut même dire que $M(y) = f(-iy)$ est strictement convexe pourvu que $f(z) \not\equiv 1$.

Nous allons discuter des propriétés de convexité moins triviales des fonctions caractéristiques analytiques et de leurs dérivées d'ordre pair. Soit $f(z)$ une fonction caractéristique analytique dont la bande de régularité est $-\alpha < \mathrm{Im}\, z < \beta$ et écrivons $z = t + iy$. Il s'ensuit du théorème 2.2 que

$$|f^{(2k)}(t+iy)| \leqq |f^{(2k)}(iy)| = f^{(2k)}(iy). \tag{2.9}$$

Supposons maintenant qu'il existe un nombre y_0 tel que

$$-\alpha < y_0 < \beta \qquad \text{et} \qquad f^{(2k)}(iy_0) = 0.$$

Alors $f^{(2k)}(z) \equiv 0$ et $f(z)$, ainsi que $f(t)$ pour t réel, est un polynome d'ordre $2k$. C'est une conséquence immédiate de l'équation (2.9) et de l'analyticité de $f(z)$. Mais $f(t)$ est bornée et ceci n'est possible que si $k \equiv 0$ et $f(t) = 1$. Ainsi les dérivées $f^{(2k)}(z)$ d'ordre pair d'une fonction caractéristique analytique n'ont pas de zéros sur le segment de l'axe imaginaire situé dans l'intérieur de sa bande de régularité. Chaque point iy de ce segment a un voisinage dans lequel $f^{(2k)}(z)$ est holomorphe et différente de zéro. Dans ce voisinage, on peut donc écrire

$$f^{(2k)}(z) = \exp(g_k(z)),$$

où $g_k(z)$ est holomorphe en tout point du segment $-\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$. Soit $A_k(t, y)$ la partie réelle et $B_k(t, y)$ la partie imaginaire de $g_k(z)$; alors,

$$f^{(2k)}(z) = \exp(A_k(t, y) + i B_k(t, y)).$$

Ainsi

$$A_k(t, y) = \operatorname{Log} |f^{(2k)}(z)| \quad \text{et} \quad B_k(t, y) = \operatorname{Arg} f^{(2k)}(z).$$

On peut transformer l'inégalité (2.9) et l'on obtient

$$A_k(t, y) \leqq A_k(0, y),$$

donc la fonction $A_k(t, y)$ a un maximum au point $t = 0$ pourvu que $y(-\alpha < y < \beta)$ soit fixé. Cela veut dire que

$$\frac{\partial A_k}{\partial t}(0, y) = 0, \qquad \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2}(0, y) \leqq 0.$$

Comme $g_k(z)$ est holomorphe au point $z = iy$, on peut appliquer les équations de Cauchy-Riemann et de Laplace, et l'on a

$$\frac{\partial B_k}{\partial y}(0, y) = 0, \qquad \frac{\partial^2 A_k}{\partial y^2}(0, y) \geqq 0.$$

Nous avons ainsi établi le résultat suivant :

THÉORÈME 2.4. — *Soit $f(z)$ une fonction caractéristique analytique dont la bande de régularité est la bande $-\alpha < \operatorname{Im} z = y < \beta$ et soit k un entier non négatif. Alors $\operatorname{Arg} f^{(2k)}(iz)$ est indépendante de y et $\operatorname{Log}|f^{(2k)}(iy)|$ est une fonction convexe de y pourvu que $-\alpha < y < \beta$. La fonction $f(-iy)$ est une fonction réelle, non négative et convexe et elle est même strictement convexe si $f(z) \not\equiv 1$.*

3. Les fonctions caractéristiques analytiques et leurs fonctions de répartition. — Nous examinerons dans cette partie la relation qui existe entre une fonction caractéristique analytique et sa fonction de répartition. Nous commençons par donner une condition nécessaire et suffisante qui doit être satisfaite par la fonction de répartition pour que sa fonction caractéristique soit une fonction caractéristique analytique.

Nous avons déjà vu que la fonction génératrice (2.8) existe pour chaque fonction de répartition $F(x)$ qui a une fonction caractéristique analytique. La réciproque est aussi vraie, c'est une conséquence du raisonnement utilisé dans le théorème 2.1. Ainsi les fonctions de répartition ayant une fonction caractéristique analytique sont identiques aux fonctions de répartition possédant une fonction génératrice (2.8). Le critère suivant est donc immédiat. Pour que la fonction de répartition $F(x)$ ait une fonction caractéristique analytique, il faut et il suffit que :

1° $F(x)$ ait des moments α_k de tous ordres k;

2° $\lim\sup_{k\to\infty} \left[\frac{|\alpha_k|}{k!}\right]^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\rho} < \infty.$

Alors la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{\nu!}(iz)^\nu$ converge dans le cercle $|z| < \rho$ et coïncide avec la fonction caractéristique de $F(x)$ pour des valeurs réelles de z.

Le résultat suivant est plus utile et il peut être appliqué immédiatement.

Théorème 3.1. — *Pour que la fonction de répartition* $F(x)$ *ait une fonction caractéristique analytique il faut et il suffit que*

$$1 - F(x) + F(-x) = o(e^{-rx}) \quad \text{quand} \quad x \to \infty \tag{3.1}$$

pour tous les r *tels que* $r < R$. *Ici* R *est une constante positive quelconque et la bande de régularité de la fonction caractéristique de* $F(x)$ *contient la bande* $|\operatorname{Im} z| < R$.

Remarque : — R peut être infini, alors (3.1) est satisfait pour tout r réel et la fonction caractéristique $f(z)$ de $F(x)$ est une fonction entière.

La relation (3.1) est évidemment équivalente aux deux relations simultanées :

$$1 - F(x) = o(e^{-rx}) \quad (x \to \infty), \tag{i}$$

$$F(-x) = o(e^{-rx}) \quad (x \to \infty), \tag{ii}$$

Nous commencerons par démontrer que ces conditions sont suffisantes. Soit y un nombre réel tel que $|y| < R$ et choisissons $r > 0$ tel que $|y| < r < R$. Soit k un entier positif, on voit immédiatement que

$$\int_{k-1}^{k} e^{|y|x}\, dF(x) \leq e^{|y|k}(1 - F(k-1)).$$

Il s'ensuit de la relation (i) qu'il existe un nombre $\mathcal{C}_1$ tel que l'inégalité

$$1 - F(k-1) \leqq \mathcal{C}_1 e^{-rk}$$

soit satisfaite pour k suffisamment grand, soit pour $k > K_1$. Alors

$$\int_{k-1}^{k} e^{|y|x}\, dF(x) \leqq \mathcal{C}_1 e^{-k(r-|y|)} \qquad \text{pour} \qquad k \geqq K_1.$$

Nous choisissons un entier $K > K_1$ et deux nombres réels a et b tels que $a \geqq K$, $b > 0$. Alors

$$\int_{a}^{a+b} e^{|y|x}\, dF(x) \leqq \sum_{k=K}^{\infty} \int_{k-1}^{k} e^{|y|x}\, dF(x) \leqq \mathcal{C}_1 \sum_{k=K}^{\infty} e^{-k(r-|y|)} = \frac{\mathcal{C}_1 e^{-(r-|y|)K}}{1-e^{-(r-|y|)}}.$$

Le membre de droite de cette inégalité devient aussi petit qu'on veut pourvu que K soit suffisamment grand. Mais cela veut dire que l'intégrale : $\int_{a}^{a+b} e^{|y|x}\, dF(x)$ devient aussi petite que l'on veut, quelle que soit la valeur de b, si l'on choisit a assez grand. Alors l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} e^{|y|x}\, dF(x) = \int_{0}^{\infty} e^{|yx|}\, dF(x)$$

existe et est finie.

De la même façon, nous avons l'inégalité

$$\int_{k}^{-k+1} e^{|yx|}\, dF(x) \leqq e^{|y|k} F(-k+1)$$

et la relation (ii) entraîne qu'il existe une constante $\mathcal{C}'_1$ telle que $F(-k+1) \leqq \mathcal{C}'_1 e^{-rk}$ pour tout k suffisamment grand, soit pour $k \geqq K'_1$. Nous choisissons un nombre entier $K' > K'_1$ et deux nombres réels $c > K'$ et $d > 0$ et nous démontrons aisément que

$$\int_{-c-d}^{-c} e^{|yx|}\, dF(x) \leqq \mathcal{C}'_1 \frac{e^{-(r-|y|)K'}}{1-e^{-(r-|y|)}}.$$

A l'aide d'un raisonnement semblable au précédent, on voit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} e^{|yx|}\, dF(x)$ existe et est finie. Mais alors il est immédiat que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{|yx|}\, dF(x)$ et donc aussi l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{yx}\, dF(x)$ existent et sont finies pourvu que $|y| < R$. Soient $z = t + iy$, alors l'intégrale

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\, d\mathrm{F}(x)$$

est convergente pour t quelconque et $|y| < \mathrm{R}$ et $f(z)$ est une fonction holomorphe. Ainsi nous avons démontré que notre condition est suffisante.

Pour établir la nécessité de la condition (3.1), nous posons l'hypothèse que la fonction caractéristique

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\, d\mathrm{F}(x)$$

est une fonction caractéristique analytique dont la bande de régularité est la bande $-\alpha < \mathrm{Im}\, z = y < \beta$. Soit $\mathrm{R} = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$ et soit x un nombre positif; alors les intégrales

$$\int_{x}^{\infty} e^{yu}\, d\mathrm{F}(u) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{-x} e^{yu}\, d\mathrm{F}(u)$$

existent et sont finies pour tout y satisfaisant l'inégalité $|y| < \mathrm{R}$. Nous choisissons un nombre $r < \mathrm{R}$ ainsi qu'un nombre r_1 tel que $r < r_1 < \mathrm{R}$. Alors il existe un nombre réel et positif $\mathcal{C}$ tel que

$$\mathcal{C} \geqq \int_{x}^{\infty} e^{ur_1}\, d\mathrm{F}(u) \geqq e^{r_1 x}(1 - \mathrm{F}(x))$$

ou

$$0 \leqq (1 - \mathrm{F}(x))\, e^{rx} \leqq \mathcal{C}\, e^{-(r_1 - r)x}.$$

Comme $r_1 > r$, le membre de droite tend vers zéro quand x tend vers l'infini et nous voyons que $1 - \mathrm{F}(x) = o(e^{-rx})$ quand $x \to \infty$. De même, on établit que la condition (ii) est satisfaite.

Nous disons qu'une fonction de répartition $\mathrm{F}(x)$ est bornée à gauche et que a est son extrémité gauche — en formule $a = \mathrm{gext}(\mathrm{F})$ — si pour $\varepsilon > 0$ quelconque $\mathrm{F}(a - \varepsilon) = 0$, tandis que $\mathrm{F}(a + \varepsilon) > 0$. Nous définissons de la même façon des fonctions de répartitions qui sont bornées à droite et leur extrémité droite, dext(F) ([2]). Nous disons qu'une fonction de répartition est unilatérale si elle est bornée ou à gauche ou à droite, mais nous parlons d'une fonction de répartition finie si elle est bornée en même temps à gauche et à droite.

([2]) Dans la littérature anglaise on a la notation lext(F) pour gext(F) et rext(F) pour dext(F) (*voir* [26]).

Soit $F(x)$ une foncion de répartition finie, alors $1 - F(x) + F(-x) = 0$ pour x suffisamment grand. Ainsi $F(x)$ satisfait à la condition (3.1) et l'on voit que la fonction caractéristique d'une répartition finie est toujours une fonction entière. Mais on peut donner des énoncés plus précis qui sont liés aux propriétés des fonctions de répartitions unilatérales dont la fonction caractéristique est analytique. C'est cette classe de fonctions de répartitions que nous allons étudier maintenant.

Théorème 3.2. — *Soit* $F(x)$ *une fonction de répartition qui a une fonction caractéristique analytique. La condition nécessaire et suffisante pour que* $F(x)$ *soit bornée à gauche (à droite) est que* $f(z)$ *soit holomorphe dans le demi-plan supérieur (inférieur) et qu'il existe un nombre positif* c *tel que* $|f(z)| \leq e^{c|z|}$, *pourvu que* $\operatorname{Im} z > 0$ $(\operatorname{Im} z < 0)$.

Supposons que $F(x)$ soit bornée à gauche et que $a = \operatorname{gext}(F)$. Alors l'intégrale $\int_a^\infty e^{ixz}\, dF(x)$, où $z = t + iy$, est une fonction holomorphe de z pourvu que $y = \operatorname{Im} z > 0$. C'est presque immédiat quand $a > 0$, si $a < 0$ nous écrivons

$$\int_a^\infty e^{ixz}\, dF(x) = \int_a^0 e^{ixz}\, dF(x) + \int_0^\infty e^{ixz}\, dF(x).$$

La première intégrale du côté droit est une fonction entière de z tandis que la seconde intégrale est holomorphe pour $y > 0$. Nous avons posé l'hypothèse que $f(z)$ est une fonction caractéristique analytique. Donc $f(z)$ est holomorphe dans une bande qui contient l'axe réel à l'intérieur et $f(z)$ peut être représentée par une intégrale de Fourier

$$(z) = \int_{-\infty}^\infty e^{ixz}\, dF(x).$$

Comme $f(z)$ est holomorphe dans le demi-plan supérieur, on voit que le domaine de validité de cette représentation contient le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ à l'intérieur. Ainsi, nous avons

$$|f(z)| = \left| \int_a^\infty e^{itx - ty}\, dF(x) \right| \leq \int_a^\infty e^{-yx}\, dF(x)$$

à condition que $y = \operatorname{Im} z > 0$ et l'on voit aisément que

$$|f(z)| \leq e^{-ay} \leq e^{a|y|} \leq e^{|a|.|z|} \qquad \text{si} \quad y > 0. \tag{3.2}$$

Ainsi nous avons démontré que la condition est nécessaire.

Supposons maintenant que $f(z)$ soit une fonction caractéristique analytique holomorphe pour $y = \operatorname{Im} z > 0$ et qui satisfait dans ce demi-plan à l'inégalité

$$|f(z)| \leqq e^{c|z|},$$

où c est un nombre positif. Posons $z = iy (y > 0)$, on peut alors démontrer que

$$h = -\operatorname*{Lim\,sup}_{y \to \infty} \frac{1}{y} \operatorname{Log} f(iy)$$

est fini. Soit ε un nombre positif quelconque et soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$ et $h - x_2 = 2\varepsilon$. Représentant $f(z)$ comme une intégrale de Fourier, nous voyons que

$$f(iy) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-yx} \, d\mathrm{F}(x) \geqq \int_{x_1}^{x_2} e^{-yx} \, d\mathrm{F}(x) \geqq e^{-yx_2}(\mathrm{F}(x_2) - \mathrm{F}(x_1)).$$

Il résulte de la définition de h que $-h + \varepsilon > \frac{1}{y} \operatorname{Log} f(iy)$, ou

$$f(iy) < e^{-y(h-\varepsilon)} = e^{-y(x_2+\varepsilon)}.$$

Par conséquent, $e^{-y\varepsilon} > \mathrm{F}(x_2) - \mathrm{F}(x_1) \geqq 0$ pour $\varepsilon > 0$ quelconque pourvu que y soit assez grand. Mais ceci n'est possible que si

$$\mathrm{F}(x_2) - \mathrm{F}(x_1) = 0 \qquad \text{quand} \quad x_1 < x_2 = h - 2\varepsilon;$$

cela veut dire que $\mathrm{F}(x)$ est bornée à gauche et que $\operatorname{gext}(\mathrm{F}) \geqq h$. Ainsi le théorème est établi pour des fonctions de répartition bornées à gauche.

Mais il s'ensuit encore de (3.2) que $\operatorname{Log} f(iy) \leqq -ay$, alors on a nécessairement aussi l'inégalité $h > a = \operatorname{gext}(\mathrm{F})$, où $h = a$ et nous obtenons la formule

$$\operatorname{gext}(\mathrm{F}) = -\operatorname*{Lim\,sup}_{y \to \infty} \frac{1}{y} \operatorname{Log} f(iy). \tag{3.3}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le

Corollaire 1 du Théorème 3.2. — *Soit* $\mathrm{F}(x)$ *une fonction de répartition bornée à gauche (à droite) dont la fonction caractéristique est une fonction caractéristique analytique. Alors*

$$\left\{ \begin{aligned} &\operatorname{gext}[\mathrm{F}] = -\limsup_{y \to \infty} \frac{1}{y} \log f(iy), \\ &\left[\operatorname{dext}[\mathrm{F}] = \limsup_{y \to \infty} \frac{1}{y} \log f(-iy)\right]. \end{aligned} \right. \tag{3.4}$$

Nous avons démontré le théorème 3.2 et son corollaire seulement pour les fonctions de répartitions qui sont bornées à gauche. De la même façon, on démontre le théorème pour les répartitions bornées à droite. Si la fonction de répartition est finie, on obtient un résultat plus fort.

THÉORÈME 3.3. — *Soit* $F(x)$ *une fonction de répartition finie et supposons qu'elle n'est pas dégénérée. Alors sa fonction caractéristique est une fonction entière d'ordre* 1 *et du type exponentiel qui a une infinité de zéros. Réciproquement, une fonction caractéristique entière d'ordre* 1 *et du type exponentiel correspond toujours à une fonction de répartition finie. Les extrémités de* $F(x)$ *sont données par les formules* (3.4).

Soient $a = \text{gext}[F]$, $b = \text{dext}[F]$, $c = \max(|a|, |b|)$. Il résulte du théorème 3.2 que $|f(x)| \leqq e^{c|z|}$, donc $M(r, f) \leqq 1$. Utilisant le théorème 2.3, nous voyons que $f(z)$ est une fonction entière d'ordre 1 et du type exponentiel. En vertu du théorème de Hadamard, on a $f(z) = G(z)\, e^{az}$, où $G(z)$ est le produit canonique déterminé par les zéros de $f(z)$. Comme $|f(t)| \leqq 1$ pour t réel, $G(z)$ ne peut pas être un polynome et doit ainsi avoir une infinité de zéros. Le second énoncé du théorème 3.3 et les formules pour les extrémités sont une conséquence du théorème 3.2.

La première partie du théorème 3.3 fut démontré par P. Lévy [15], la réciproque par G. Pólya [26]. Notre dérivation du théorème 3.2 se sert de la méthode de démonstration de Pólya. Ici il faut faire deux remarques :

I. Une fonction de répartition unilatérale n'a pas nécessairement une fonction caractéristique analytique. Comme exemples nous citons les lois stables avec indices $0 < \alpha < 1$ et $\beta = \pm 1$ spécifiquement nous faisons mention d'une loi trouvée par N. V. Smirnov (*voir* Gnedenko-Kolmogorov [9], p. 171) et par P. Lévy ([18], p. 181 et [19]). Cette loi a la densité de probabilité

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\dfrac{1}{2x}\right] & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

et la fonction caractéristique

$$f(t) = \exp\left\{ |t|^{\frac{1}{2}} \left(1 + i\frac{t}{|t|}\right) \right\}.$$

Il serait intéressant de trouver des conditions suffisantes pour qu'une fonction de répartition unilatérale ait une fonction caractéristique analytique.

II. Il y a des fonctions de répartition unilatérales qui ont des fonctions caractéristiques entières d'ordre supérieur à 1. On obtient une telle fonction de répartition en tronquant la distribution de Laplace

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \quad \text{au point } x = 0.$$

Il y a des fonctions caractéristiques entières d'ordre quelconque et l'on peut dériver une condition suffisante pour qu'une fonction de répartition ait une fonction caractéristique entière d'ordre donné.

Théorème 3.4. — *Soit α un nombre positif et $F(x)$ une fonction de répartition. Supposons qu'il existe deux constantes réelles et positives, $K > 0$ et $x_0 > 0$, telles que*

$$\text{(i)} \qquad 1 - F(x) + F(-x) \leqq K\,e^{-x^{1+\alpha}},$$

$$\text{(ii)} \qquad 1 - F(x) + F(-x) > 0$$

pour chaque $x \geqq x_0$. L'ordre ρ de $f(z)$ est alors $\rho = 1 + \frac{1}{\alpha}$.

Soit $y \neq 0$ et choisissons un nombre entier $g > 1$ tel que

$$x = (g\,|\,y\,|)^{\frac{1}{\alpha}} > x_0. \tag{3.5}$$

Soient B et v deux nombres réels tels que $B \geqq v \geqq x$, alors

$$y + B^{\alpha} \geqq y + v^{\alpha} \geqq y + x^{\alpha} = y + g\,|\,y\,| \geqq |\,y\,|. \tag{3.6 a}$$

Calculons l'intégrale

$$\int_x^B e^{-yv}\,dF(v) = -\int_x^B e^{-yv}\,d[1 - F(v)].$$

Intégrant par parties nous obtenons

$$\int_x^B e^{-yv}\,dF(v) = e^{-yx}[1 - F(x)] - e^{-yB}[1 - F(B)] - y\int_x^B e^{-yv}[1 - F(v)]\,dv.$$

Comme $B > x > x_0$, il s'ensuit de (i) et de (3.6 a) que

$$e^{-yB}[1 - F(B)] \leqq K\,e^{-B|y|}, \qquad \text{ainsi} \quad \lim_{B \to \infty} e^{-yB}[1 - F(B)] = 0.$$

De la même façon, on déduit de (i) et (3.6 a) l'inégalité

$$\int_x^B e^{-yv}[1-F(v)]\,dv \leqq K\int_x^B e^{-v|y|}\,dv \leqq \frac{K}{|y|}\,e^{-x|y|}.$$

Alors les intégrales

$$\int_x^\infty e^{-yv}[1-F(v)]\,dv \quad \text{et} \quad \int_x^\infty e^{-yv}\,dF(v)$$

existent et sont finies et nous avons

$$\int_x^\infty e^{-yv}[1-F(v)]\,dv \leqq \frac{K}{|y|}\,e^{-x|y|},$$

$$\int_x^\infty e^{-yv}\,dF(v) = e^{-yx}[1-F(x)] - y\int_x^\infty e^{-yv}[1-F(v)]\,dv.$$

Donc on a

$$\int_x^\infty e^{-yv}\,dF(v) \leqq K\,e^{-x|y|} + |y|\int_x^\infty e^{-yv}[1-F(v)]\,dv \leqq 2K\,e^{-x|y|}$$

et

(3.7 a) $$\int_x^\infty e^{-yv}\,dF(v) \leqq 2K\exp\left[-g^{\frac{1}{\alpha}}\,|y|^{1+\frac{1}{\alpha}}\right].$$

Soit maintenant $A > x$ et soit v tel que $A \geqq |v| \geqq x$, il s'ensuit alors de (3.5)

(3.6 b) $$A^\alpha - y \geqq |v|^\alpha - y \geqq x^\alpha - y \geqq |y|,$$

et nous voyons à l'aide de (i) et de (3.6 b) que

$$e^{Ay}\,F(-A) \leqq K\,e^{-A|y|} \quad \text{et} \quad \lim_{A\to\infty} e^{A|y|}\,F(-A) = 0.$$

De la même façon, on voit que

$$F(v) \leqq K\exp[-|v|^{1+\alpha}] \quad \text{quand} \quad v < 0.$$

En vertu de (3.6 b), nous obtenons

$$\int_{-A}^{-x} e^{-yv}\,dF(v) \leqq K\int_{-A}^{-x} e^{v|y|}\,dv \leqq \frac{K}{|y|}\,e^{-x|y|}.$$

En répétant le raisonnement qui nous donnait (3.7 a) nous établissons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-x} e^{-yv}\,dF(v)$ existe et est finie et que

(3.7 b) $$\int_{-\infty}^{-x} e^{-yv}\,dF(v) \leqq 2K\exp\left[-g^{\frac{1}{\alpha}}\,|y|^{1+\frac{1}{\alpha}}\right].$$

Enfin, nous considérons l'intégrale $\int_{-x}^{x} e^{-yv}\,dF(v)$. Comme

$$-yv \leqq |y|\,.\,|v| \leqq |y|\,x,$$

nous déduisons de (3.5) l'inégalité

$$\int_{-x}^{x} e^{-yv}\,dF(v) \leqq \exp\left[g^{\frac{1}{\alpha}}\,|y|^{1+\frac{1}{\alpha}}\right]. \tag{3.7c}$$

Additionnant les intégrales (3.7 a), (3.7 b) et (3.7 c), on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-yv}\,dF(v) \leqq 4\,\mathrm{K}\exp\left[-\,g^{\frac{1}{\alpha}}\,|y|^{1+\frac{1}{\alpha}}\right] + \exp\left[g^{\frac{1}{\alpha}}\,|y|^{1+\frac{1}{\alpha}}\right]. \tag{3.8}$$

Cette relation montre que l'intégrale

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izv}\,dF(v)$$

existe pour z complexe quelconque et que $f(z)$ est une fonction entière.

En accord avec le lemme 2.1, nous avons

$$f(iy) + f(-iy) \geqq \mathrm{M}(y\,;f), \qquad \text{où} \quad y > 0,$$

et, par conséquent, de (3.8),

$$8\,\mathrm{K}\exp\left[-\,g^{\frac{1}{\alpha}}\,|y|^{1+\frac{1}{\alpha}}\right] + 2\exp\left[g^{\frac{1}{\alpha}}\,|y|^{1+\frac{1}{\alpha}}\right] \geqq \mathrm{M}(y\,;(f.$$

Nous en déduisons aisément que

$$1 + \frac{1}{\alpha} \geqq \rho. \tag{3.9}$$

Pour établir l'inégalité inverse, nous utiliserons le lemme 2.1 et nous remarquerons que

$$\mathrm{M}(y\,;f) \geqq \frac{1}{2}[f(iy) + f(-iy)] \geqq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{yv} + e^{-yv})\,dF(v), \qquad \text{où} \quad y > 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(y\,;f) &\geqq \frac{1}{2}\int_{|v|\geqq x}(e^{yv} + e^{-yv}) \\ &\geqq \frac{1}{2}(e^{yx} + e^{-yx})\int_{|v|\geqq x} dF(v) \geqq \frac{1}{2}e^{yx}\int_{|v|\geqq x} dF(v), \end{aligned}$$

où x est déterminé par (3.5). Écrivons

$$\alpha = \int_{|v|\geqq x} dF(v) = 1 - F(x) + F(-x),$$

en vertu de (ii) nous voyons que $1 \geqq \alpha > 0$ et obtenons

$$M(y; f) \geqq \frac{\alpha}{2} e^{yx} = \frac{\alpha}{2} \exp\left[g^{\frac{1}{\alpha}} |y|^{1+\frac{1}{\alpha}}\right].$$

Alors, on a aisément

$$\rho \geqq 1 + \frac{1}{\alpha}. \tag{3.9 b}$$

L'assertion du théorème 3.4 est une conséquence immédiate des inégalités (3.9 *a*) et 3.9 *b*).

D. Dugué a donné un énoncé semblable dans une Note [5]. Cette Note ne contient pas la démonstration et les hypothèses faites sont un peu plus restrictives que celles du théorème 3.4.

Enfin nous remarquerons qu'il y a aussi des fonctions caractéristiques entières d'ordre infini. Soit $f(t)$ une fonction caractéristique quelconque, on sait alors que la fonction $\exp[f(t) - 1]$ est aussi une fonction caractéristique. En répétant ce raisonnement, on voit que toutes les fonctions de la suite définie par

$$f_{(1)}(t) = f(t), \qquad f_{(n)}(t) = \exp[f_{n-1}(t) - 1]$$

sont des fonctions caractéristiques. Commençant avec $f_{(1)}(t) = e^{it}$ on construit ainsi une suite de fonctions caractéristiques entières d'ordre infini et de croissance de plus en plus rapide.

4. La décomposition des fonctions caractéristiques analytiques. — Soit $f(t)$ une fonction caractéristique arbitraire qui n'est pas nécessairement analytique. Il peut arriver qu'il soit possible de représenter $f(t)$ comme le produit de deux fonctions caractéristiques

$$f(t) = f_1(t) f_2(t). \tag{4.1 a}$$

Supposons, de plus, que les fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ correspondent à des fonctions de répartition non dégénérées, on dit alors que $f(t)$ est décomposable et qu'elle a les facteurs $f_1(t)$ et $f_2(t)$. Désignons par $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ les fonctions de répartition qui correspondent aux fonctions caractéristiques $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$. Le théorème de composition ([20], p. 193) fait que l'assertion (4.1 *a*) est équivalente à

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-y)\, dF_1(y). \tag{4.1 b}$$

Nous n'avons pas l'intention de discuter les problèmes de décomposition des fonctions caractéristiques. C'est un sujet très intéressant, mais nous n'examinerons ici qu'une question spéciale et nous nous occuperons seulement de la décomposition des fonctions caractéristiques analytiques.

Soit $f(z)$ une fonction caractéristique analytique dont la bande de régularité est la bande $-\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$, où $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Faisons l'hypothèse que $f(z)$ est décomposable, alors (4.1 *a*) est satisfaite pour t réel quelconque. Soient A, B, ξ_1, ξ_2 quatre nombres réels tels que $A > 0$, $B > 0$, $\xi_2 > \xi_1$, il s'ensuit alors de (4.1 *b*) que

$$(4.2) \qquad F(\xi_2) - F(\xi_1) \geqq \int_{-A}^{B} [F_1(\xi_2 - y) - F_1(\xi_1 - y)]\, dF_2(y).$$

Fixons un nombre réel ν tel que $-\alpha < \nu < \beta$; comme $f(z)$ est une fonction caractéristique analytique, on sait que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu x}\, dF(x)$ existe et est finie et que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu x}\, dF(x) \geqq \int_{-a}^{b} e^{-\nu x}\, dF(x)$$

pour a et b positifs quelconques. Afin d'écrire l'intégrale $\int_{-a}^{b} e^{-\nu x}\, dF(x)$ comme la limites des sommes de Riemann-Stieltjes nous construisons une suite de subdivisions de l'intervalle $[ab]$ en introduisant

$$(4.3) \qquad x_j^{(n)} = a + \frac{b-a}{2^n}(j-1) \qquad \begin{Bmatrix} j = 1, \ldots, (2^n + 1) \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{Bmatrix}$$

$$(4.4) \qquad x_{2k-1}^{(n+1)} = x_k^{(n)} \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, (2^n + 1).$$

Ainsi

$$(4.5) \qquad \int_a^b e^{-\nu x}\, dF(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{2^n} e^{-\nu x_j^{(n)}} [F(x_{j+1}^{(n)}) - F(x_j^{(n)})]$$
$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{2^n} e^{-\nu x_{j+1}^{(n)}} [F(x_{j+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})].$$

Désignons par

$$h_j^{(n)}(y;\, \nu) = \begin{cases} e^{-\nu x_j^{(n)}} [F_1(x_{j+1}^{(n)} - y) - F_1(x_j^{(n)} - y)] & \text{si } \nu > 0, \\ e^{-\nu x_{j+1}^{(n)}} [F_1(x_{i+1}^{(n)} - y) - F_1(x_j^{(n)} - y)] & \text{si } \nu < 0 \end{cases}$$

pour $j = 1, 2, \ldots, 2^n$ et par

$$g_n(y;\, v) = \sum_{j=1}^{2^n} h_j^{(n)}(y;\, v).$$

Alors il s'ensuit de (4.2) et (4.5) que

$$\int_a^b e^{-vx}\, dF(x) \geqq \lim_{n \to \infty} \int_{-A}^{B} g_n(y;\, v)\, dF_2(y). \tag{4.6}$$

Évidemment

$$x_{2j-1}^{(n+1)} < x_{2j}^{(n+1)} < x_{2j+1}^{(n+1)},$$

de cette inégalité et de (4.4) on conclut que

$$h_j^{(n)}(y;\, v) \leqq h_{2j}^{(n+1)}(y;\, v) + h_{2j-1}^{(n+1)}(y;\, v)$$

et l'on a ainsi

$$g_n(y;\, v) \leqq g_{n+1}(y;\, v).$$

Regardant les fonctions $g_n(y)$ comme des sommes de Riemann-Stieltjes, on voit que

$$\lim_{n \to \infty} g_n(y;\, v) = \int_{a-y}^{b-y} e^{-v(y+z)}\, dF_1(z).$$

Appliquons le théorème de convergence monotone à la formule (4.6), alors

$$\int_a^b e^{-vx}\, dF(x) \geqq \int_{-A}^{B} \Big[\lim_{n \to \infty} g_n(y;\, v)\Big]\, dF_2(y)$$

ou

$$\infty > \int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx}\, dF(x) \geqq \int_a^b e^{-vx}\, dF(x) \geqq \int_{-A}^{B} e^{-vy} \left[\int_{a-y}^{b-y} e^{-vz}\, dF_1(z)\right] dF_2(y).$$

Remarquons que

$$\int_{a-y}^{b-y} e^{-vz}\, dF_1(z) \geqq \int_{a+A}^{b-B} e^{-vz}\, dF_1(z),$$

ainsi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx}\, dF(x) \geqq \left[\int_{-A}^{B} e^{-vy}\, dF_2(y)\right] \left[\int_{a+A}^{b-B} e^{-vz}\, dF_1(z)\right].$$

L'intégrale dans le membre de gauche de cette inégalité est finie et est indépendante de a, b, A, B. Par conséquent, les intégrales

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vz}\, dF_1(z), \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vy}\, dF_2(y) \end{array} \right. \tag{4.7}$$

existent et sont finies et

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx}\, dF(x) \geqq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-vy}\, dF_1(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-vz}\, dF_2(z), \tag{4.8}$$

où v est un nombre réel tel que $-\alpha < v < \beta$. Mais alors les intégrales

$$f_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\, dF_1(x) \qquad \text{et} \qquad f_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\, dF_2(x)$$

existent aussi pour z complexe, tel que $-\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$ et l'on voit que les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont des fonctions caractéristiques analytiques qui sont holomorphes au moins dans la bande de régularité de $f(z)$.

Ainsi nous avons obtenu le

Théorème 4.1. — *Soit* $F(z)$ *une fonction caractéristique analytique dont la bande de régularité est la bande* $-\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$. *Alors chaque facteur de* $f(z)$ *est aussi une fonction caractéristique analytique et est holomorphe au moins dans la bande de* $f(z)$.

Revenons maintenant à l'inégalité (4.8). Il y a deux nombres réels a_1 et a_2 tels que $0 < F_2(a_1)$, tandis que $1 > F_2(a_2)$. Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vy}\, dF_2(y) \geqq \begin{cases} \displaystyle\int_{a_2}^{\infty} e^{-vx}\, dF_2(x) \geqq e^{-a_2 v}[1 - F_2(a_2)] & \text{quand} \quad v < 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{a_1} e^{-vx}\, dF_2(x) \geqq e^{-a_1 v}\, F_2(a_1) & \text{quand} \quad v > 0. \end{cases}$$

Soit

$$\mathcal{C}^{-1} = \min[F_2(a_1),\ 1 - F_2(a_2)]$$

et soit

$$a = \max(|a_1|,\ |a_2|),$$

alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx}\, dF_1(x) \leqq \mathcal{C}\, e^{a|v|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx}\, dF(x).$$

On obtient aussi le corollaire suivant.

Corollaire 1 du Théorème 4.1. — *Soit* $f(z)$ *une fonction caractéristique analytique dont la bande de régularité est la bande* $-\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$ *et faisons l'hypothèse que* $f(z)$ *est décomposable et que* $f_1(z)$ *est un facteur de* $f(z)$. *Alors on peut déterminer des constantes positives* $\mathcal{C}$ *et* a *telles que*

$$f_1(iv) \leqq \mathcal{C}\, e^{a|v|} f(iv)$$

pourvu que $-\alpha < v < \beta$.

Pour obtenir un cas particulier nous supposons que $f(z)$ est une fonction caractéristique entière.

COROLLAIRE 2 AU THÉORÈME 4.1. — *Chaque facteur* $f_1(z)$ *d'une fonction caractéristique entière est aussi une fonction caractéristique entière. En outre,* $M(r; f_1) \leq M(r; f)$ *et ainsi l'ordre d'une fonction caractéristique entière ne peut pas être inférieur à l'ordre de ses facteurs.*

La première partie de ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème 4.1 tandis que la seconde partie s'ensuit du corollaire 1.

Le théorème 4.1 fut démontré pour les fonctions caractéristiques entières par P. Lévy [15], [16]; D. A. Raikov [27] a obtenu indépendamment le théorème général.

Certaines fonctions caractéristiques entières ont des propriétés de décomposition bien intéressantes.

Nous démontrons un théorème qui fut d'abord conjecturé par M. P. Lévy [11], [12] et dont la validité fut établi plus tard par H. Cramér [3].

THÉORÈME 4.2 (de Lévy-Cramér). — *La fonction caractéristique laplacienne,*

$$f(t) = \exp\left[i\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t^2\right]$$

a seulement des facteurs laplaciens. Ainsi

$$f(t) = f_1(t) f_2(t),$$

où

$$f_j(t) = \exp\left[i\mu_j t - \frac{\sigma_j^2}{2} t^2\right] \qquad (j = 1, 2)$$

et où

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu \qquad \textit{et} \qquad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2.$$

La fonction $f(z)$ est une fonction caractéristique entière sans zéros, ainsi (corollaire 1 du théorème 4.1) ses facteurs ont la même propriété. En outre (corollaire 2 du théorème 4.1), l'ordre de ces facteurs ne peut pas surpasser 2. Alors $f_1(z)$ a la forme

$$f_1(z) = e^{g_1(z)}$$

et nous déduisons du théorème de factorisation de Hadamard que $g_1(z)$ est un polynome du degré inférieur ou égal à 2. Soit pour t réel,

$$g_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

comme $f_1(0) = 1$, nous avons $a_0 = 0$. L'équation

$$g_1(-t) = g_1(t)$$

nous permet la conclusion que $a_1 = i\mu_1$ est un nombre imaginaire pur et que a_2 est réel.

La fonction $f_1(t)$ est bornée, par conséquent $a_2 \leqq 0$, écrivons

$$a_2 = -\frac{1}{2}\sigma_1^2.$$

Ainsi on a démontré que

$$f_1(t) = \exp\left[i\mu_1 t - \frac{\sigma_1^2}{2} t^2\right]$$

est une fonction caractéristique laplacienne. Le même raisonnement s'applique au facteur $f_2(t)$ et les relations entre les paramètres des facteurs sont obtenus d'une façon tout à fait élémentaire.

Récemment le mathématicien russe Yu. V. Linnik [19], [31] a généralisé le théorème de Lévy-Cramér d'une façon très intéressante. Nous présentons son résultat sans démonstration.

THÉORÈME 4.3. — *Soient $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_s(t)$ des fonctions caractéristiques quelconques et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ des nombres positifs. Supposons qu'on ait dans un voisinage du point $t = 0$ la relation*

$$\prod_{j=1}^{s} [f_j(t)]^{\alpha_j} = \exp\left[i\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t^2\right].$$

Alors toutes les fonctions $f_j(t)$ sont des fonctions caractéristiques laplaciennes.

En supposant que les $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sont des nombres entiers on obtient le théorème 4.2 comme cas particulier du théorème 4.3.

D. A. Raikov [27] a dérivé un théorème pour la fonction de répartition de Poisson qui est analogue au théorème de Lévy-Cramér.

THÉORÈME 4.4 (théorème de Raikov). — *La fonction caractéristique $f(t) = \exp[\lambda(e^{it} - 1)]$ de la fonction de répartition de Poisson n'a* *aucun facteur qui ne soit pas aussi une fonction caractéristique correspondante à une loi de Poisson.*

Supposons maintenant que la fonction caractéristique de la loi de Poisson soit décomposable en deux facteurs non dégénérés de façon que

$$f(t)=\exp[\lambda(e^{it}-1)]=f_1(t)\,f_2(t).$$

Comme la composition d'une fonction de répartition discrète avec une fonction de répartition continue est toujours continue, on voit que $f_1(t)$ est aussi $f_2(t)$ correspondent à des fonctions de répartitions discrètes. Les entiers non négatifs sont les points de discontinuité de la répartition poissonnienne, c'est pourquoi on peut faire l'hypothèse que les entiers non négatifs sont aussi les points de discontinuité de $f_1(t)$ et de $f_2(t)$. On a alors

$$f_1(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu e^{it\nu} \qquad \text{et} \qquad f_2(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu e^{it\nu},$$

où

$$a_\nu\geq 0, \qquad b_\nu\geq 0, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu=\sum_{\nu=0}b_\nu=1.$$

En développant la fonction $f(t)$, on obtient

$$f(t)=e^{-\lambda}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\lambda^\nu}{\nu!}e^{it\nu}.$$

La fonction $f(t)$ est une fonction entière sans zéros, par conséquent $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont aussi de telles fonctions et les séries pour $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ convergent pour des valeurs complexes quelconques de la variable. Introduisons la variable $w=e^{it}$ et transformons ainsi les fonctions $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$; il en résulte les fonctions génératrices $g(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, où

$$g(w)=e^{-\lambda}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\lambda^\nu}{\nu!}w^\nu,$$

$$g(\overline{w})=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu w^\nu, \qquad g_2(w)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu w^\nu.$$

Comme $g(w)=g_1(w)\,g_2(w)$, il faut que les coefficients de ces séries satisfassent à la relation

$$a_0b_\nu+a_1b_{\nu-1}+\ldots+a_{\nu-1}b_1+a_\nu b_0=e^{-\lambda}\frac{\lambda^\nu}{\nu!}.$$

Tout les termes de gauche sont non négatifs et $a_0 b_0 = e^{-\lambda} \neq 0$,

$$(4.9) \qquad a_\nu \leq \frac{1}{b_0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\nu}{\nu!}.$$

La fonction $g(w) = e^{\lambda(w-1)}$ est une fonction entière, il s'ensuit de (4.9) que $g_1(w)$ est aussi entière. En outre, on voit aisément que

$$M(r; g) \geq b_0^{-1} M(r; g_1),$$

alors l'ordre de $g_1(w)$ est inférieur ou égal à l'ordre de $g(w)$. La fonction $g(w)$ est une fonction entière sans zéros, utilisant le théorème de Hadamard on démontre que $g_1(w)$ a l'ordre 1. Comme $g_1(1) = 1$, il faut que $g_1(w) = e^{\lambda_1(w-1)}$. Ainsi la fonction

$$f_1(t) = \exp[\lambda_1(e^{it} - 1)]$$

est la fonction caractéristique d'une répartition de Poisson. Le même raisonnement s'applique au facteur $f_2(t)$ et les relations $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ sont obtenus d'une façon élémentaire.

Le théorème 4.3 fut étendu par Raikov [27] et aussi P. Lévy [11], [13], [14] en examinant la structure multiplicative des compositions finies des lois de Poisson. Récemment, D. Dugué [6 *a*] a donné une généralisation du théorème de Raikov qui est analogue au théorème de Linnik. En effet, il a obtenu des résultats analytiques qui permettent de déduire non seulement le théorème 4.5, mais aussi le théorème 4.3 de Linnik.

Théorème 4.5 (Dugué). — *Soient $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_s(t)$ des fonctions caractéristiques et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ des nombres positifs.*

Supposons que

$$\prod_{j=1}^{s} [f_j(t)]^{\alpha_j} = \exp[\lambda(e^{it} - 1)] \qquad (\lambda \geq 0),$$

alors

$$f_j(t) = \exp[\lambda_j(e^{it} - 1) + i\mu_j t], \qquad \textit{où } \lambda_j \geq 0, \ \mu_j \textit{ réel.}$$

5. Les fonctions caractéristiques analytiques indéfiniment divisibles. — On dit que la fonction caractéristique $f(t)$ est indéfiniment divisible si elle est la $n^{\text{ième}}$ puissance d'une fonction caractéristique pour n entier quelconque. Alors il existe pour chaque n une fonction caractéristique $f_n(t)$ tel que $[f_n(t)]^n = f(t)$ et cette équation détermine $f_n(t)$ d'une façon unique.

Théorème 5.1. — *Soit $f(z)$ une fonction caractéristique analytique qui est indéfiniment divisible. Alors $f(z)$ n'a aucun zéro dans l'intérieur de sa bande de régularité.*

L'hypothèse du théorème affirme que $[f(t)]^n$ est une fonction caractéristique et en même temps un facteur de $f(z)$. Il s'ensuit du théorème 4.1 que $[f(z)]^{\frac{1}{n}}$ est une fonction caractéristique analytique qui est holomorphe au moins dans la bande de régularité de $f(z)$. Faisons l'hypothèse que $f(z)$ ait un zéro au point z_0 intérieur à cette bande; alors $[f(z)]^{\frac{1}{n}}$ a une singularité au point z_0 pourvu que n soit suffisamment grand. Cette contradiction démontre que z_0 ne peut pas être un zéro de $f(z)$.

Corollaire 1 au théorème 5.1. — *La fonction caractéristique d'une fonction de répartition finie ne peut pas être indéfiniment divisible.*

Le corollaire est une conséquence immédiate des théorèmes 5.1 et 3.3.

L'énoncé du théorème 5.1 est le plus fort qu'on peut obtenir et il est possible de donner un exemple d'une fonction caractéristique analytique qui est indéfiniment divisible et qui a des zéros sur la frontière de sa bande de régularité.

Soient a et b deux nombres positifs et désignons par $w = a + ib$. On démontre aisément que

$$f(t) = \frac{\left(1 - \frac{it}{w}\right)\left(1 - \frac{it}{\overline{w}}\right)}{\left(1 - \frac{it}{a}\right)^2}$$

est une fonction caractéristique analytique qui est holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > -a$ et qui a les deux zéros $-iw$ et $-i\overline{w}$ à la frontière de ce domaine. En outre, cette fonction a la représentation

$$\log f(t) = mit + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1 + x^2}\right) dM(x),$$

$$m = 2\int_0^{\infty} e^{-ax}(1 - \cos bx)(1 + x^2)^{-1}\, dx$$

et

$$M(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0, \\ -2\int_x^\infty e^{-at}(1-\cos bt)t^{-1}\,dt & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

En vertu d'un théorème de P. Lévy ([18], p. 160-161), la fonction $f(t)$ est indéfiniment divisible.

Corollaire 2 au théorème 5.1. — *Une fonction caractéristique entière qui est indéfiniment divisible n'a pas de zéros.*

M. Paul Lévy [16] a posé la question de savoir si la réciproque de ce corollaire est aussi vraie. Il a résolu ce problème en construisant [14] une fonction caractéristique entière sans zéros qui n'est pas indéfiniment divisible.

Les fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles admettent des représentations canoniques. Nous avons besoin d'une représentation donnée par A. N. Kolmogorov (*voir* [9], p. 85).

Le théorème de Kolmogorov. — Pour que $f(t)$ soit une fonction caractéristique indéfiniment divisible avec une variance finie, il faut et il suffit que la seconde caractéristique ait la forme

$$(5.1) \qquad \varphi(t) = \log f(t) = ict + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1 - itu)\,\frac{dK(u)}{u^2},$$

où c est un nombre réel, tandis que $K(u)$ est une fonction bornée non décroissante telle que

$$K(-\infty) = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dK(u) = K(+\infty) < \infty.$$

Le résultat principal concernant les fonctions caractéristiques analytiques et indéfiniment divisibles est le théorème suivant :

Théorème 5.2. — *Soit $f(z)$ une fonction caractéristique analytique et faisons l'hypothèse qu'elle est indéfiniment divisible. Alors $f(z)$ admet la représentation* (5.1) *dans tout l'intérieur de sa bande de régularité.*

Supposons maintenant que $f(z)$ est une fonction caractéristique analytique et indéfiniment divisible dont la bande de régularité est la bande $-\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$. La variance de chaque fonction caractéristique analytique est finie donc $f(t)$ peut être représentée pour t réel par la formule (5.1). Il s'ensuit du théorème 5.1 que $f(z)$ n'a pas de zéros dans sa bande de régularité, ainsi $\log f(z)$ est définie dans cette bande. Désignons par $\varphi(z) = \log f(z)$ la branche de la fonction $\log f(z)$ qui est donnée par la formule (5.1) pour t réel. La fonction $\varphi(z)$ est alors holomorphe dans la bande $-\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$. Utilisant (5.1) on a, pour t réel,

$$\varphi''(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t+h) + \varphi(t-h) - 2\varphi(t)}{h^2} = -\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \frac{1 - \cos hu}{h^2 \frac{u^2}{2}} dK(u),$$

alors

$$\varphi''(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dK(u),$$

Cela veut dire que $-\varphi''(t)$ est, à un facteur constant près, une fonction caractéristique. Comme $\varphi(z)$ est holomorphe dans la bande de régularité de $f(z)$, on voit que $-\varphi''(z)$ est, à un facteur constant près, une fonction caractéristique analytique qui est holomorphe dans la bande $-\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$. L'intégrale

$$(5.2) \qquad -\varphi''(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuz} dK(u)$$

converge dans cette bande et est une fonction holomorphe. Soit ζ un nombre complexe tel que

$$-\alpha < \operatorname{Im}\zeta < \beta$$

et choisissons deux nombres positifs α' et β' tels que

$$-\alpha < -\alpha' \leqq \operatorname{Im}\zeta \leqq \beta' < \beta.$$

Les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta' u} dK(u) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha' u} dK(u)$$

existent et sont finies et l'on voit alors aisément qu'il est permis d'intégrer (5.2) de o à ζ sous le signe d'intégration et l'on obtient ainsi

$$(5.3) \qquad -\varphi'(\zeta) + \varphi'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\zeta u} - 1}{iu} dK(u).$$

Nous démontrons d'une façon semblable qu'on peut intégrer le membre de droite de (5.3) sous le signe d'intégration de o à z pourvu que $-\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$. Ainsi on obtient

$$\varphi(z) = [\varphi'(0)]z + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{izu} - 1 - izu)\frac{dK(u)}{u^2}$$

Comme $\varphi'(0) = i\varkappa_1$, où $\varkappa_1$ — la cumulante d'ordre 1 — est réel nous voyons que $f(z)$ admet la représentation canonique (5.1) dans toute sa bande de régularité.

Ce résultat fut établi par D. A. Raikov [28], notre formulation et la démonstration diffèrent un peu de celles de Raikov.

6. **Critères sur les fonctions caractéristiques analytiques.** — Il est souvent nécessaire de décider si une fonction $f(t)$ de la variable réelle t peut être une fonction caractéristique. H. Cramér [4] a donné une condition nécessaire et suffisante qui est une simplification d'un résultat de Bochner ([2], chap. IV). Une autre condition, qui est aussi nécessaire et suffisante, fut dérivée par Khintchin [10]. Il n'est pas facile d'appliquer ces théorèmes généraux, c'est pourquoi il est désirable d'obtenir des résultats plus spécialisés qu'on puisse appliquer aisément. La plupart de ces résultats sont adaptés à des classes de fonctions spéciales. Il serait désirable d'obtenir une caractérisation des fonctions qui sont holomorphes dans un voisinage de l'origine et qui sont des fonctions caractéristiques. Le problème est certainement très difficile et il n'est pas près d'être résolu. Mais il y a néanmoins un nombre de résultats intéressants qui donnent ou des conditions nécessaires ou des conditions suffisantes pour qu'une fonction holomorphe dans un voisinage du point $z = 0$ soit une fonction caractéristique. Dans cette section nous présenterons — souvent sans démonstrations — quelques critères de cette sorte.

Remarquons d'abord qu'on peut regarder quelques résultats que nous avons déjà dérivés, par exemple les énoncés des théorèmes 2.1, 2.2, 2.4 ainsi que le corollaire du théorème 2.2, comme des conditions nécessaires qui doivent être satisfaites pour qu'une fonction analytique soit une fonction caractéristique. Dans ce qui suit nous présentons des conditions suffisantes pour certaines fonctions entières.

Soit θ un nombre réel, alors $\left(1 + \frac{it}{\theta}\right)^{-1}$ est toujours une fonction caractéristique (c'est la fonction caractéristique d'une répartition exponentielle ou de la répartition conjuguée). Le produit de deux fonctions caractéristiques et toujours une fonction caractéristique, ainsi l'inverse d'un polynome à racines purement imaginaires est toujours une fonction caractéristique.

On déduit du théorème de continuité de P. Lévy que l'inverse d'une fonction entière de genres 1 ou 2 dont les zéros sont des nombres imaginaires purs est toujours une fonction caractéristique. E. Lukacs et O. Szász [22] s'occupaient de certaines fonctions rationnelles. K. Takano [29] étudiait les inverses des polynomes. Dans ces articles on trouve des conditions nécessaires; de plus, [29] contient aussi une condition nécessaire et suffisante pour que l'inverse d'un polynome du troisième degré soit une fonction caractéristique. Le résultat le plus important est un théorème du mathématicien polonais J. Marcinkiewicz [25] qui a obtenu une condition nécessaire pour qu'une fonction soit une fonction caractéristique.

Théorème de Marcinkiewicz. — *Il n'existe aucune fonction caractéristique qui soit une fonction entière d'ordre fini $\rho > 2$ et dont l'exposant de convergence des zéros ρ_1 soit inférieur à ρ.*

Corollaire au théorème de Marcinkiewicz. — *Aucune fonction de la forme*

$$\exp[a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n] \qquad (a_n \neq 0;\ n > 2)$$

ne peut être une fonction caractéristique

Pour la démonstration de ces deux théorèmes, nous renvoyons le lecteur à l'article de D. Dugué [6].

Nous finissons cet article avec quelques remarques sur les fonctions caractéristiques qui sont périodiques. Soit maintenant $f(z)$ une fonction caractéristique analytique qui est uniforme et périodique.

Nous commençons notre discussion avec le cas d'une fonction qui a une période purement imaginaire. Désignons cette période par $w = i\eta$ (η réel), ce n'est pas une restriction de supposer que $\eta > 0$. Pour éviter un cas trivial, nous faisons l'hypothèse que $f(t) \not\equiv 1$. Soit $-\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) la bande de régularité de $f(z)$, nous montrons d'abord que $\eta \geq \min(\alpha, \beta)$. La démonstration est indirecte. Supposons que $\eta < \min(\alpha, \beta)$. Les points $z_1 = i\eta$ et $z_2 = -i\eta$ sont alors dans l'intérieur de la bande de régularité de $f(z)$ et il s'ensuit du théorème 2.4 que

$$f(0) < \frac{f(i\eta)+f(-i\eta)}{2}. \tag{6.1}$$

D'autre part, $f(z)$ est périodique et a la période $i\eta$, ainsi

$$f(0) = f(i\eta) = f(-i\eta) = 1 \qquad \text{ou} \qquad f(0) = \frac{f(i\eta)+f(-i\eta)}{2} = 1,$$

ce qui contredit (6.1). La démonstration indirecte est complétée et nous avons toujours $\eta \geqq \min(\alpha, \beta)$. Mais en vérité $\eta > \min(\alpha, \beta)$, car autrement l'origine serait un point singulier de $f(z)$, ce qui est impossible. Alors on a au moins une des deux inégalités $\eta > \alpha$, $\eta > \beta$. Si $\eta > \alpha$ (resp. si $\eta > \beta$), on voit que le point $i(\eta - \alpha)$ [resp. $-i(\eta - \beta)$] est une singularité de $f(z)$ qui est située dans le demi-plan supérieur (resp. inférieur). Alors $\eta - \alpha > \beta$ (resp. $\eta - \beta > \alpha$) et l'on a toujours $\eta > \alpha + \beta$. Ainsi nous avons trouvé le théorème suivant :

Théorème 6.1. — *Soit $f(z)$ une fonction caractéristique analytique et périodique dont la période est un nombre imaginaire pur, $\varpi = i\eta$ (η réel) et supposons que $f(z) \not\equiv 1$, alors la magnitude de la période est supérieure à la largeur de la bande de régularité de $f(z)$ ou $|\eta| > \alpha + \beta$.*

Considérons maintenant le cas où la période de $f(z)$ est un nombre complexe $\varpi = \xi + i\eta$. Comme nous venons d'étudier le cas $\xi = 0$ (cas d'une période imaginaire pure), nous supposons que $\xi \neq 0$. Il s'ensuit de la formule (2.4) et de l'hypothèse que ϖ est une période de $f(z)$, que les nombres $\overline{\varpi}$ et $-\overline{\varpi}$ sont aussi des périodes de $f(z)$. Par conséquent, 2ξ et $2\eta i$ sont aussi des périodes et l'on a

$$f(2\xi) = 1. \tag{6.2}$$

On sait que les fonctions caractéristiques ont la propriété suivante : Pour qu'il existe un nombre réel $t_0 \neq 0$ tel que $f(t_0) = 1$, il faut et il suffit que $f(t)$ soit la fonction caractéristique d'une fonction de répartition de treillis dont les points de discontinuité sont les points $\frac{2k\pi}{t_0}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), où la fonction $1 - \cos t_0 x$ devient 0.

La fonction $f(z)$, satisfaisant à (6.2), a alors la forme

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} p_\nu \exp\left(\frac{iz\pi\nu}{\xi}\right), \tag{6.3}$$

où

$$p_\nu \geqq 0, \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} p_\nu = 1. \tag{6.4}$$

il faut maintenant considérer deux possibilités.

Premièrement, si $\eta = 0$, on voit immédiatement que la fonction $f(z)$ est simplement périodique avec la période réelle ξ. La répétition du raisonnement précédent nous donne alors la formule

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} p_\nu \exp\left(\frac{2iz\pi\nu}{\xi}\right), \tag{6.5}$$

ici les p_ν satisfont aux relations (6.4). Deuxièmement quand $\eta \neq 0$, $f(z)$ est déterminé par la formule (6.3) et est une fonction doublement périodique qui a nécessairement une période réelle et aussi une période imaginaire pure. La période imaginaire pure doit naturellement satisfaire aux conditions du théorème 6.1. Ainsi nous avons obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME 6.2. — *Une fonction caractéristique non constante qui est analytique, uniforme et simplement périodique a ou une période réelle ou une période imaginaire pure. La condition nécessaire et suffisante pour que la période soit réelle est que la fonction caractéristique corresponde à une répartition de treillis et que ce treillis contienne l'origine.*

Soit $f(z)$ une fonction caractéristique entière non constante qui est périodique. Selon le théorème 6.1, $f(z)$ est simplement périodique et alors a nécessairement la forme (6.5). Aussi on obtient le

THÉORÈME 6.3. — *Une fonction caractéristique entière et périodique est toujours la fonction caractéristique d'une répartition de treillis qui contient l'origine. La réciproque est aussi vraie.*

On peut aisément donner des exemples des fonctions caractéristiques analytiques qui sont simplement périodiques. Ainsi la fonction caractéristique de la répartition de Poisson a la période réelle 2π, la fonction de répartition dont la densité de probabilité est $p(x) = \left(2\cosh\frac{\pi x}{2}\right)^{-1}$ a comme fonction caractéristique $f(z) = \frac{1}{\cosh z}$. Cette fonction $f(z)$

est holomorphe dans la bande $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$ et est simplement périodique avec une période imaginaire pure égale à $2\pi i$. Récemment, M. Girault [8] a réussi à construire une fonction caractéristique elliptique.

Les théorèmes 6.1, 6.2 et 6.3 donnent des conditions nécessaires pour qu'une fonction périodique soit une fonction caractéristique. Ces résultats furent publiés par l'auteur du présent Mémoire dans un article [24] récent. Comme ces théorèmes y étaient formulés d'une façon qui n'est pas tout à fait satisfaisante, il semblait désirable de les énoncer ici de nouveau.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. P. Boas, *Sur les séries des intégrales de Fourier à coefficients positifs* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 1837-1838).

[2] S. Bochner, *Vorlesungen über Fourier'sche integrale* (*Akad. Verlagsgesellschaft*, Leipzig, 1932; Reprint Chelsea Publ. Co, New-York, 1948).

[3] H. Cramér, *Ueber eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion* (*Math. Z.*, t. 41, 1936, p. 405-414).

[4] H. Cramér, *On the representation of a function by certain Fourier integrals* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 46, 1939, p. 191-201).

[5] D. Dugué, *Sur quelques propriétés analytiques des fonctions caractéristiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 1778-1780).

[6] D. Dugué, *Analycité et convexité des fonctions caractéristiques* (*Ann. Inst, H. Poincaré*, t. 12, 1951, p. 45-56).

[6a] D. Dugué, *Résultats sur les fonctions absolument monotones et applications à l'arithmétique des fonctions du type positif* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 715-717).

[7] R. Fortet, *Calcul des moments d'une fonction de répartition à partir de sa caractéristique* [*Bull. Sc. Math.*, (2), t. 68, 1944, p. 117-131].

[8] M. Girault, *Analycité et périodicité des fonctions caractéristiques* (*Publ. Inst. Stat. Univ. Paris*, t. 4, 1955, p. 92-94.

[9] B. V. Gnedenko et A. N. Kolmogorov, *Limit distributions for the sums of independent random variables*, translated by K. L. Chung, Addison-Wesley Co., Cambridge, Massachusetts, 1954.

[10] A. Khinchine, *Zur Kennzeichnung der charakteristischen Funktionen* (*Bull. Univ. État Moscow*, série Intern., Sect. A (Math. et Mécan.), t. 1, fasc. 5, 1937, p. 1-31),

[11] P. Lévy, *Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes* [*Ann. Scuola Sup. Pisa*, (2), t. 3, 1934, p. 337-366].

[12] P. Lévy, *Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indépendantes ou enchaînées* [*J. Math. pures et appl.*, (9), t. 14, 1935, p. 347-402].

[13] P. Lévy, *Nouvelle contribution à l'arithmétique des produits de lois de Poisson* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 205, 1937, p. 535-537).

[14] P. Lévy, *L'arithmétique des lois de probabilité et les produits finis de lois de Poisson* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 204, 1937, p. 944-946).

[15] P. Lévy, *L'arithmétique des lois de probabilité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 204, 1937, p. 80-82).

[16] P. Lévy, *L'arithmétique des lois de probabilité* [*J. Math. pures et appl.*, (9), t. 17, 1938, p. 17-39].

[17] P. Lévy, *Sur certains processus homogènes* (*Comp. Math.*, t. 7, 1939, p. 283-339).

[18] P. Lévy, *Processus stochastiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1948.

[19] Yu. V. Linnik. *A problem on characteristic functions of probability distributions* (*Usp.-Mat. Nauk.*, t. 10, 1955, p. 137-138).

[20] M. Loeve, *Probability theory*, D. Van Nostrand, New-York, 1955.

[21] E. Lukacs et O. Szász, *On analytic characteristic functions* (*Pac. J. Math.*, t. 2, 1952, p. 615-625).

[22] E. Lukacs et O. Szász, *Certain Fourier transforms of distributions*. II. (*Canad. J. Math.*, t. 6, 1954, p. 186-189).

[23] E. Lukacs et O. Szász, *Nonnegative trigonometric polynomials and certain rational characteristic functions* (*J. Res. Nat. Bur. Stand.*, t. 52, 1954, p. 153-160; R. P. 2484).

[24] E. Lukacs, *On certain periodic characteristic functions* (*Comp. Math.*, t. 13, 1956, p. 76-80).

[25] J. Marcinkiewicz, *Sur une propriété de la loi de Gauss* (*Math. Z.*, t. 44, 1938, p. 622-618).

[26] G. Pólya, *Remarks on charateristic functions* (*Proc. Berkeley Symp. Math. Stat. and Probability* p. 115-123; University of California Press, Berkeley et Los Angeles, 1949).

[27] D. A. Raikov, *On the decomposition of Gauss and Poisson laws* (*Izv. Akad. Nauk S. S. S. R.*, ser. mat., 2, 1938, p. 91-124).

[28] D. A. Raikov, *A theorem from the theory of analytic characteristic functions* (*Bull. Inst. Math. Mec. Univ. Kouybycheff de Tomsk*, t. 2, 1938, p.8-11).

[29] K. Takano, *Certain Fourier transforms of distributions* [*Tohoku Math. J.*, (2), t. 3, 1951, p. 306-315].

[30] D. V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[31] A. A. Zinger et Yu. V. Linnik, *On an analytic generalization of a theorem of Cramér's and its application* (*Vest. Leningrad Univ.*, t. 10, n° 11, 1955, p. 51-66).