

ANNALES DE L'I. H. P.

PIERRE HILLION

JEAN-PIERRE VIGIER

**Le Théorème C, P, T dans la théorie quantique des
mouvements internes de rotateurs relativistes**

Annales de l'I. H. P., tome 16, n° 3 (1959), p. 217-234

http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1959__16_3_217_0

© Gauthier-Villars, 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Le Théorème C, P, T

dans la

théorie quantique des mouvements internes de rotateurs relativistes

par

Pierre HILLION et Jean-Pierre VIGIER

Institut Henri Poincaré (Paris).

PREMIÈRE PARTIE.

APPROXIMATION NON RELATIVISTE

1. **Généralités.** — Nous nous proposons d'examiner dans cet article comment se comporte la théorie des rotateurs relativistes sous les opérations parité P (renversement des axes du genre espace), T renversement des axes du genre temps, ce qui amènera à la définition de l'opération conjuguée de charge et permettra de voir si le théorème C, P, T est vérifié.

Nous commencerons par l'approximation non relativiste où il est possible de donner un support géométrique simple à chacune des opérations C, P, T.

Rappelons rapidement les éléments nécessaires à cette étude : Dans la théorie que nous avons développée ⁽¹⁾ des rotateurs relativistes ceux-ci sont supposés doués d'une structure réductible à deux points (théorie bilocale) et deux tétrapodes centrés respectivement en chacun de ces points.

L'approximation non relativiste de cette théorie conduit à l'étude du mouvement d'un trièdre trirectangle par rapport à un autre trièdre trirectangle au moyen des trois angles d'Euler habituels θ , φ , ψ , et

⁽¹⁾ D. BOHM, P. HILLION, T. TAKABAYASI et J.-P. VIGIER (sous presse aux *Prog. of Th. Physics*). Relativistic rotators and bilocal theory.

à l'aide d'un formalisme canonique utilisant l'hamiltonien H et les moments cinétiques J_k, J'_k, J^2 . La quantification du mouvement transforme ces grandeurs géométriques en opérateurs et à cause des propriétés de commutabilité de J_x, J'_x, J^2 , il est possible de rechercher les fonctions propres simultanées de ces trois opérateurs. On trouve

$$Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi) = e^{i(m\varphi+m'\psi)} \Theta_l^{m,m'}(\theta),$$

$$\Theta_l^{m,m'}(\theta) = \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{-m+m'} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{-m-m'} \frac{d^{l-m}}{d\left(\sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{l-m}} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2l-2m'} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2l+2m'};$$

où l, m, m' sont des nombres entiers ou demi-entiers, $l \geq 0$.

Les fonctions $Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi)$ pour l fixé, constituent un espace vectoriel à $(2l+1)$ dimensions. Si l'on considère les sous-espaces vectoriels correspondant chacun à une valeur de m' fixé, les éléments de ces sous-espaces vectoriels se transforment entre eux sous le groupe des rotations suivant la représentations $\mathcal{O}(l)$ de ce groupe.

On est alors conduit à l'idée d'appeler particule les fonctions $Y_l^{m,m'}(\theta, \varphi, \psi)$ caractérisant un certain état interne (à l'approximation non relativiste), tous les états d'une même famille correspondant aux mêmes valeurs de l et de m' . Il est déjà connu que pour l entier on aura des familles de bosons et pour l demi-entier des familles de fermions. On peut alors se demander si (l, m') ne caractériseraient pas les particules d'une famille et $(l, -m')$ les antiparticules de cette famille. C'est ce problème que nous nous proposons précisément de traiter ici.

Pour donner un exemple, considérons le cas $l = \frac{1}{2}$; m' pouvant prendre les deux valeurs $\pm \frac{1}{2}$ on a deux sous-espaces vectoriels :

$$l = \frac{1}{2}, \quad m' = \frac{1}{2} \quad \left(\begin{array}{l} Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) = \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi+\psi)} \\ Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) = \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\psi)} \end{array} \right),$$

$$l = \frac{1}{2}, \quad m' = -\frac{1}{2} \quad \left(\begin{array}{l} Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) = \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\psi)} \\ Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) = -\sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi-\psi)} \end{array} \right).$$

Chaque élément de l'un de ces sous-espaces se transforme en l'autre élément du même sous-espace suivant la représentation $\mathcal{O}\left(\frac{1}{2}\right)$ du groupe des rotations à trois dimensions.

On s'aperçoit que chacun des sous-espaces précédents est le spineur satisfaisant à l'équation de Pauli exprimé en angles d'Euler ⁽²⁾. Alors si

$$\Psi = \begin{pmatrix} Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) \\ Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) \end{pmatrix}$$

est le spineur correspondant à la particule, est-ce que

$$\Phi = \begin{pmatrix} Y_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) \\ Y_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\theta, \varphi, \psi) \end{pmatrix}$$

n'est pas le spineur correspondant à l'antiparticule?

2. Les opérations P, T, C. — Considérons deux trièdres triré-
tangles $x, O, y, z; x', O, y', z'$, les angles d'Euler sont déterminés par
les relations

$$\cos \theta = \vec{Oz} \cdot \vec{Oz'}, \quad \cos \varphi = \vec{OV} \cdot \vec{Ox}, \quad \cos \psi = \vec{OV'} \cdot \vec{Ox'}$$

OU est la ligne nodale intersection des plans xOy et $x'Oy'$. OV la
perpendiculaire à OU dans xOy ; OV' la perpendiculaire à OU
dans $x'Oy'$.

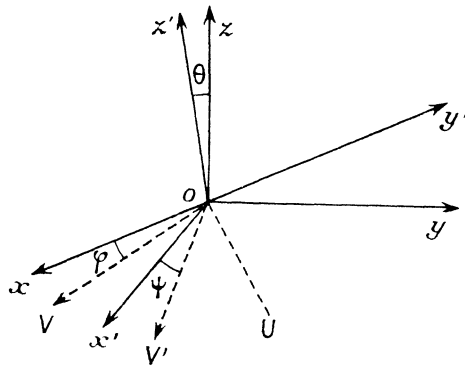


Fig. 1.

Si l'on désigne par a_k^r l'ensemble des trois axes Ox, Oy, Oz et si
l'on désigne par b_k^r l'ensemble des trois axes Ox', Oy', Oz' ,

$$k, r = 1, 2, 3,$$

⁽²⁾ D. BOHM, J. TIOMNO et R. SCHILLER, *Nuovo Cimento*, suppl. n° 1, 1955.

on a les relations

$$b_k^r = \Lambda_s^r \alpha_k^s,$$

où Λ_s^r est la matrice des cosinus directeurs. Explicitement elle s'écrit

$$\Lambda_s^r = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & \sin \varphi \cos \theta \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ -\cos \varphi \cos \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \cos \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}.$$

Cherchons d'abord comment représenter les opérations P et T à l'aide des angles d'Euler.

L'opération P est la transformation $z \rightarrow -z$. Géométriquement, c'est la figure déduite de la figure initiale comme son image dans un miroir supposé situé dans le plan xOy . On trouve donc immédiatement

$$P \begin{cases} \theta \rightarrow -\theta, \\ \varphi \rightarrow \varphi, \\ \psi \rightarrow \psi. \end{cases}$$

On peut obtenir ce résultat analytiquement en remarquant qu'en l'appliquant aux α_k^r et b_k^r l'opération P peut être représentée par la matrice

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = P^{-1};$$

dans ces conditions,

$$(\Lambda_s^r)' \rightarrow P^{-1} \Lambda_s^r P$$

et il est facile de voir que

$$(\Lambda_s^r)' = \Lambda_s^r(-\theta).$$

Pour l'opération T définie comme $t \rightarrow -t$ on sait⁽³⁾ que le formalisme canonique est invariant sous les transformations simultanées :

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -t, \\ p_k &\rightarrow -p_k, \end{aligned}$$

où les p_k sont les moments canoniquement conjugués des variables q_k .

Donc ici si l'on considère les moments p_φ , p_ψ , p_θ canoniquement conjugués aux angles φ , ψ , θ , il faudra effectuer la transformation

$$\begin{aligned} p_\varphi &\rightarrow -p_\varphi, \\ p_\psi &\rightarrow -p_\psi, \\ p_\theta &\rightarrow -p_\theta. \end{aligned}$$

⁽³⁾ Cf., par exemple, A. MERCIER, *Analytical and canonical formalism in Physics*, North Holland Publ.

Comme p_φ et p_ψ sont des fonctions linéaires de $\dot{\varphi}$ et de $\dot{\psi}$ de la forme $A \sin^2 \theta \dot{\varphi}$ et $B \sin^2 \theta \dot{\psi}$ cette transformation impose de changer φ en $-\varphi$, ψ en $-\psi$; de la même façon, $p_\theta = C \dot{\theta}$, ce qui amène à changer θ en $-\theta$, d'où :

$$T \begin{cases} \theta \rightarrow -\theta, \\ \varphi \rightarrow -\varphi, \\ \psi \rightarrow -\psi. \end{cases}$$

Si l'on effectue simultanément les deux opérations P et T, on obtiendra l'opération :

$$PT \begin{cases} \theta \rightarrow \theta, \\ \varphi \rightarrow -\varphi, \\ \psi \rightarrow -\psi. \end{cases}$$

Ceci définit une opération C telle que C, P, T soit l'identité. Géométriquement, l'opération C représente une rotation en sens inverse respectivement autour de Oz et Oz' .

Cette opération C peut être considérée comme l'opération conjuguée de charge.

On a donc les trois transformations :

$$P \begin{cases} \theta \rightarrow -\theta, \\ \varphi \rightarrow \varphi, \\ \psi \rightarrow \psi; \end{cases} \quad T \begin{cases} \theta \rightarrow -\theta, \\ \varphi \rightarrow -\varphi, \\ \psi \rightarrow -\psi; \end{cases} \quad C \begin{cases} \theta \rightarrow \theta, \\ \varphi \rightarrow -\varphi, \\ \psi \rightarrow -\psi. \end{cases}$$

3. Comportement des fonctions d'onde sous les opérations C, P, T. —

Comme on connaît la transformation à appliquer aux angles d'Euler, il suffit de porter le résultat directement dans les fonctions d'onde. Il vient :

$$(1) \quad P Y_l^{m, m'}(\theta, \varphi, \psi) = Y_l^{m, m'}(-\theta, \varphi, \psi),$$

$$(2) \quad T Y_l^{m, m'}(\theta, \varphi, \psi) = Y_l^{m, m'}(-\theta, -\varphi, -\psi),$$

$$(3) \quad C Y_l^{m, m'}(\theta, \varphi, \psi) = Y_l^{m, m'}(\theta, -\varphi, \psi).$$

Or :

$$Y_l^{m, m'}(\theta, \varphi, \psi) = e^{j(m\psi + m'\varphi)} \Theta_l^{m, m'}(\theta).$$

Ce polynome $\Theta_l^{m, m'}(\theta)$ a les propriétés suivantes; il peut s'écrire :

$$\Theta_l^{m, m'}(\theta) = \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{-d} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{-s} \frac{d^p}{d \left(\sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^p} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2d+2p} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2s+2p},$$

avec

$$d = |m - m'|, \quad s = |m + m'|, \quad p = l - \frac{d}{2} - \frac{s}{2},$$

d, s, p sont des entiers; donc :

$$(4) \quad \theta_l^{m, m'}(\theta) = \theta_l^{-m, -m'}(\theta),$$

$$(5) \quad \theta_l^{m, m'}(-\theta) = (-1)^d \theta_l^{m, m'}(\theta).$$

Donc, compte tenu des relations (4) et (5), les expressions (1), (2), (3) deviennent :

$$P Y_l^{m, m'}(\theta, \varphi, \psi) = (-1)^d Y_l^{m, m'}(\theta, \varphi, \psi),$$

$$T Y_l^{m, m'}(\theta, \varphi, \psi) = (-1)^d Y_l^{-m, -m'}(\theta, \varphi, \psi),$$

$$C Y_l^{m, m'}(\theta, \varphi, \psi) = Y_l^{-m, -m'}(\theta, \varphi, \psi).$$

On voit donc bien que si $Y_l^{m, m'}(\theta, \varphi, \psi)$ est la fonction d'onde correspondant à l'état interne d'une particule, $Y_l^{-m, -m'}(\theta, \varphi, \psi)$ est la fonction d'onde de l'antiparticule correspondante.

On aurait pu définir l'opération P par les relations :

$$P \begin{cases} \theta \rightarrow \theta, \\ \varphi \rightarrow \pi + \varphi, \\ \psi \rightarrow \pi + \psi; \end{cases}$$

on aurait alors :

$$C \begin{cases} \theta \rightarrow -\theta, \\ \varphi \rightarrow -\pi - \varphi, \\ \psi \rightarrow -\pi - \psi. \end{cases}$$

Ceci semble plus satisfaisant, car on aurait finalement :

$$P Y_l^{m, m'}(\theta, \varphi, \psi) = Y_l^{m, m'}(\theta, \varphi, \psi),$$

$$T Y_l^{m, m'}(\theta, \varphi, \psi) = (-1)^d Y_l^{-m, -m'}(\theta, \varphi, \psi),$$

$$C Y_l^{m, m'}(\theta, \varphi, \psi) = (-1)^d Y_l^{-m, -m'}(\theta, \varphi, \psi).$$

La fonction d'onde reste invariante sous l'opération P. Dans tous les cas leur norme est invariante sous cette opération.

DEUXIÈME PARTIE.

CAS RELATIVISTE.

1. **Généralités.** — Dans le cas relativiste on a affaire à deux tétrapodes a_{μ}^{ξ} et b_{μ}^{ξ} ($\xi, \mu = 1, 2, 3, 4$) en mouvement l'un autour de l'autre. On peut introduire six angles d'Euler : trois réels $\theta_1, \varphi_1, \psi_1$;

trois imaginaires purs $i\theta_2$, $i\varphi_2$, $i\psi_2$ et étudier l'effet des opérations P, T, C en tenant compte des relations

$$b_{\mu}^{\pm} = \Lambda_{\mu}^{\pm} a_{\mu}^{\pm},$$

où Λ_{μ}^{\pm} est la matrice 4×4 des cosinus directeurs ⁽⁴⁾.

On peut aussi, comme on l'a montré ⁽⁴⁾, définir à partir du tétrapode a_{μ}^{\pm} deux trièdres trirectangles complexes conjugués

$$\vec{A}^{r\pm} = \vec{a}^s \wedge \vec{a}^t \pm \vec{a}^r \wedge \vec{a}^s,$$

\vec{a}^i est imaginaire pur; r, s, t , permutation circulaire de 1, 2, 3.

Les flèches indiquent qu'on se limite aux composantes spatiales des vecteurs. De la même façon, à partir du tétrapode b_{μ}^{\pm} on a les deux trièdres trirectangles complexes conjugués

$$\vec{B}^{r\pm} = \vec{b}^s \wedge \vec{b}^t \pm \vec{b}^r \wedge \vec{b}^s$$

\vec{b}^i est imaginaire pur.

La transformation de Lorentz qui amène a_{μ}^{\pm} en b_{μ}^{\pm} se décompose en deux rotations tridimensionnelles complexes conjuguées qui amènent, l'une A^{r+} en B^{r+} et l'autre A^{r-} en B^{r-} . On est alors amené à définir deux séries complexes conjuguées de trois angles d'Euler :

$$\omega^+ = \{ \theta^+, \varphi^+, \psi^+ \}, \quad \omega^- = \{ \theta^-, \varphi^-, \psi^- \}, \\ \omega^- = \overline{(\omega^+)}$$

et les moments cinétiques correspondants $J_k^{\pm}, J_k^{\pm}, J^{\pm}$.

Après quantification des équations du mouvement, ces moments cinétiques deviennent des opérateurs et les fonctions propres simultanées des opérateurs $J_3^{\pm}, J_3^{\pm}, (J^{\pm})^2$ sont :

$$U_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\omega^+, \omega^-) = \{ Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+), Y_{l^-}^{m^-, m'^-}(\omega^-) \}.$$

Pour des valeurs fixées de l^+, l^-, m'^+, m'^- , ces fonctions sont les éléments d'un espace vectoriel qui se transforment sous le groupe propre de Lorentz suivant la représentation $\mathcal{O}(l^+, l^-)$.

Il est désirable d'obtenir un espace vectoriel de fonctions qui se transforment sous le groupe complet de Lorentz suivant la représentation

$$\mathcal{O}(l^+, l^-) \oplus \mathcal{O}(l^-, l^+) \quad (\oplus, \text{somme directe}).$$

⁽⁴⁾ F. HALBWACHS, P. HILLION et J.-P. VIGIER, *Ann. Inst. H. Poincaré* (même numéro).

Pour cela, il faut d'abord examiner quel est l'effet de l'opération parité.

Cette opération se définit par les relations :

$$P a_{\mu}^r \rightarrow -a_{\mu}^r, \quad P b_{\mu}^r = -b_{\mu}^r \quad (r = 1, 2, 3);$$

comme :

$$\begin{aligned} \vec{A}_r^{\pm} &= \vec{a}^s \wedge \vec{a}^t \pm \vec{a}^r \wedge \vec{a}^{(4)}, \\ \vec{B}_r^{\pm} &= \vec{b}^s \wedge \vec{b}^t \pm \vec{b}^r \wedge \vec{b}^{(4)}, \end{aligned}$$

il est visible que :

$$\begin{aligned} P \vec{A}_r^{\pm} &\rightarrow \vec{A}_r^{\mp}, \\ P \vec{B}_r^{\pm} &\rightarrow \vec{B}_r^{\mp}. \end{aligned}$$

Donc l'opération P change les angles ω^+ en ω^- .

On peut le voir directement en raisonnant sur les a_{μ}^{ξ} et b_{μ}^{ξ} . A l'opération P on peut adjoindre la matrice :

$$P = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = P^{-1}.$$

Dans ces conditions :

$$\Lambda_{\eta}^{\xi} \rightarrow P^{-1} \Lambda_{\eta}^{\xi} P = \Lambda_{\eta}^{\zeta},$$

et il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} \Lambda_3^{\zeta} &= \Lambda_3^{\eta}, \\ \Lambda_4^{\zeta} &= \Lambda_4^{\eta}, \\ \Lambda_3^{\xi} &= -\Lambda_3^{\eta}, \\ \Lambda_4^{\xi} &= -\Lambda_4^{\eta}. \end{aligned}$$

Or, si l'on se reporte au tableau des cosinus directeurs donnés ci-après, il est facile de voir qu'on passe de Λ_{η}^{ξ} à Λ_{η}^{ζ} en changeant $\theta_2, \varphi_2, \psi_2$ en $-\theta_2, -\varphi_2, -\psi_2$, c'est-à-dire précisément en changeant ω^+ en ω^- .

$\xi.$	$\Lambda_{\eta}^{\xi}.$	$\eta = 1.$
1.....	$\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \psi_1 - \sin \varphi_1 \operatorname{ch} \theta_2 \sin \psi_1$	
2.....	$-\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \psi_1 - \sin \varphi_1 \operatorname{ch} \theta_2 \cos \psi_1$	
3.....	$\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \operatorname{ch} \psi_2 - \sin \varphi_1 \operatorname{sh} \theta_2 \operatorname{sh} \psi_2$	
4.....	$-\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \operatorname{sh} \psi_2 + \sin \varphi_1 \operatorname{sh} \theta_2 \operatorname{ch} \psi_2$	
$\xi.$	$\Lambda_{\eta}^{\xi}.$	$\eta = 2.$
1.....	$\sin \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_1 \operatorname{ch} \theta_2 \sin \psi_1$	
2.....	$-\sin \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \psi_1 + \cos \varphi_1 \operatorname{ch} \theta_2 \cos \psi_1$	
3.....	$\sin \varphi_1 \sin \theta_1 \operatorname{ch} \psi_2 + \cos \varphi_1 \operatorname{sh} \theta_2 \operatorname{sh} \psi_2$	
4.....	$-\sin \varphi_1 \sin \theta_1 \operatorname{sh} \psi_2 - \cos \varphi_1 \operatorname{sh} \theta_2 \operatorname{ch} \psi_2$	

$$\begin{array}{l} \xi. \qquad \qquad \qquad \eta = 3. \\ 1. \dots \dots \dots - \operatorname{ch} \varphi_2 \sin \theta_1 \cos \psi_1 + \operatorname{sh} \varphi_2 \operatorname{sh} \theta_1 \sin \psi_1 \\ 2. \dots \dots \dots \operatorname{ch} \varphi_2 \sin \theta_1 \sin \psi_1 + \operatorname{sh} \varphi_2 \operatorname{sh} \theta_2 \cos \psi_1 \\ 3. \dots \dots \dots \operatorname{ch} \varphi_2 \cos \theta_1 \operatorname{ch} \psi_2 + \operatorname{sh} \varphi_2 \operatorname{ch} \theta_2 \operatorname{sh} \psi_2 \\ 4. \dots \dots \dots - \operatorname{ch} \varphi_2 \cos \theta_1 \operatorname{sh} \psi_2 - \operatorname{sh} \varphi_2 \operatorname{ch} \theta_2 \operatorname{ch} \psi_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \xi. \qquad \qquad \qquad \eta = 4. \\ 1. \dots \dots \dots \operatorname{sh} \varphi_2 \sin \theta_1 \cos \psi_1 - \operatorname{ch} \varphi_2 \operatorname{sh} \theta_2 \sin \psi_1 \\ 2. \dots \dots \dots - \operatorname{sh} \varphi_2 \sin \theta_1 \sin \psi_1 - \operatorname{ch} \varphi_2 \operatorname{sh} \theta_2 \cos \psi_1 \\ 3. \dots \dots \dots - \operatorname{sh} \varphi_2 \cos \theta_1 \operatorname{ch} \psi_2 - \operatorname{ch} \varphi_2 \operatorname{ch} \theta_2 \operatorname{sh} \psi_2 \\ 4. \dots \dots \dots \operatorname{sh} \varphi_2 \cos \theta_1 \operatorname{sh} \psi_2 + \operatorname{ch} \varphi_2 \operatorname{ch} \theta_2 \operatorname{ch} \psi_2 \end{array}$$

Si l'on applique l'opération parité aux fonctions d'onde, il vient donc

$$P U_{l^+, l^-}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\omega^+, \omega^-) = U_{l^-, l^+}^{m^-, m^+, m'^-, m'^+}(\omega^+, \omega^-).$$

On est alors amené à considérer les opérateurs :

$$S'_k = J_k^+ + J_k^-$$

(ces opérateurs S'_k sont invariants sous l'opération parité) et à chercher les fonctions propres simultanées des opérateurs :

$$J_3^\pm, S'_3, (J^+)^2, (J^-)^2, (S')^2;$$

on trouve facilement leurs fonctions propres qui s'écrivent

$$\begin{aligned} Z_{l^+, l^-, s', m'}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\omega^+, \omega^-) &= \sum_{-m'^+, -m'^-} (l^+, l^-, -m'^+, -m'^- | l^+, l^-, s', -m') \\ &\times Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^+) Y_{l^-}^{m^-, m'^-}(\omega^-). \end{aligned}$$

Pour des valeurs fixées de l^+, l^-, s', m' , ces fonctions constituent un espace vectoriel dont les éléments se transforment sous le groupe de Lorentz suivant la représentation

$$\mathcal{O}(l^+, l^-) \oplus \mathcal{O}(l^-, l^+).$$

On peut déterminer facilement comment agit l'opération P sur ces fonctions, Il vient :

$$\begin{aligned} P Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'^+, m'^-}(\omega^+, \omega^-) &= \sum_{-m'^+, -m'^-} (l^+, l^-, m'^+, -m'^- | l^+, l^-, s', -m') \\ &\times Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(\omega^-) Y_{l^-}^{m^-, m'^-}(\omega^+). \end{aligned}$$

Donc, d'après la propriété suivante des paramètres de Clebsch-Gordan ⁽⁵⁾,

$$\begin{aligned} & (l^+, l^-, -m'^+, -m'^- | l^+, l^-, s', -m') \\ & = (-1)^{l^+ + l^- - s'} (l^-, l^+, -m'^-, -m'^+ | l^-, l^+, s', -m'), \end{aligned}$$

on a finalement :

$$P Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-) = (-1)^{l^+ + l^- - s'} Z_{l^-, l^+, s'}^{m^-, m^+, m'}(\omega^+, \omega^-).$$

2. L'opération T. — L'opération T se définit par les relations

$$T a_y^{(4)} = -a_y^{(4)}, \quad T b_y^{(4)} = -b_y^{(4)}.$$

Il est bien connu ⁽⁶⁾ qu'il n'existe pas de transformation linéaire permettant d'exprimer l'opération T. On pourrait songer à utiliser la matrice

$$T' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (T')^{-1}$$

analogue à P.

Mais il est facile de voir que

$$(T')^{-1} \Lambda_4^{\frac{1}{2}} T' = P^{-1} \Lambda_4^{\frac{1}{2}} P.$$

On aboutirait donc au résultat absurde que les opérations P et T sont identiques.

En fait, ce qui caractérise l'opération T, c'est le changement de signe de $\Lambda_4^{\frac{1}{2}}$.

Or :

$$\Lambda_4^{\frac{1}{2}} = \text{sh } \varphi_2 \cos \theta_1 \text{ sh } \psi_2 + \text{ch } \varphi_2 \text{ ch } \theta_2 \text{ ch } \psi_2.$$

Il est facile de voir que $\Lambda_4^{\frac{1}{2}} > 0$; par contre, si l'on effectue le changement $\theta_2 \rightarrow \theta_2 + i\pi$, on obtient :

$$\Lambda_4^{\frac{1}{2}}(\theta_2 + i\pi) = \text{sh } \varphi_2 \cos \theta_1 \text{ sh } \psi_2 - \text{ch } \varphi_2 \text{ ch } \theta_2 \text{ ch } \psi_2.$$

Donc :

$$\Lambda_4^{\frac{1}{2}}(\theta_2 + i\pi) < 0.$$

⁽⁵⁾ J. M. BLATT et V. F. WEISSKOPFF, *Theoretical nuclear Physics*, Appendice A, p. 791.

⁽⁶⁾ Voir, par exemple, J. M. JAUCH et F. RÖHRlich, *The theory of photons and electrons*.

On peut aussi changer θ_1 en $\theta_1 + \pi$, alors :

$$\Lambda_{\xi}^{\pm}(\theta_1 + \pi, \theta_2 + i\pi) = -\Lambda_{\xi}^{\pm}(\theta_1, \theta_2).$$

On observera d'ailleurs qu'on a les relations :

$$\Lambda_{\eta}^{\xi}(\theta_1 + \pi, \theta_2 + i\pi) = -\Lambda_{\eta}^{\xi}(\theta_1, \theta_2).$$

De plus, l'opération

$$\begin{aligned} \theta_1 &\rightarrow \theta_1 + \pi, \\ \theta_2 &\rightarrow \theta_2 + i\pi \end{aligned}$$

laisse θ^+ et θ^- inchangés.

Par ailleurs, si l'on examine les relations

$$\begin{aligned} \vec{A}^{r\pm} &= \vec{a}^s \wedge \vec{a}^t \pm \vec{a}^r \wedge \vec{a}^i, \\ \vec{B}^{r\pm} &= \vec{b}^s \wedge \vec{b}^t \pm \vec{b}^r \wedge \vec{b}^i; \end{aligned}$$

comme :

$$T \vec{a}^i = -\vec{a}^i, \quad T \vec{b}^i = -\vec{b}^i,$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} T \vec{A}^{r\pm} &= \vec{A}^{r\mp}, \\ T \vec{B}^{r\pm} &= \vec{B}^{r\mp}, \end{aligned}$$

soit :

$$T \omega^{\pm} \rightarrow \omega^{\mp}.$$

Dans ces conditions, l'opération T appliquée aux angles d'Euler s'écrit :

$$T \begin{pmatrix} \omega^+ \rightarrow \omega^- \\ \omega^- \rightarrow \omega^+ \\ \theta_1 \rightarrow \theta_1 + \pi \\ \theta_2 \rightarrow \theta_2 + i\pi \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions, la matrice $\Lambda_{\eta}^{\xi}(\theta_1, \theta_2)$ deviendra, sous l'opération T,

$$\Lambda_{\eta}^{\xi} = T'^{-1} \Lambda_{\eta}^{\xi}(\theta_1 + \pi, \theta_2 + i\pi) T',$$

où T' est la matrice déjà définie :

$$T' = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{vmatrix},$$

soit :

$$\Lambda_{\eta}^{\xi} = -T^{-1} \Lambda_{\eta}^{\xi} T.$$

Ceci peut être considéré comme définissant une transformation linéaire entre $-b_{\bar{u}}^{\xi}$ et $\alpha_{\bar{u}}^{\xi}$,

$$-b_{\bar{u}}^{\xi} = (T)^{-1} \Lambda_{\eta}^{\xi}(\theta_1, \theta_2) T \alpha_{\bar{u}}^{\xi}.$$

Dans ces conditions, si l'on fait porter l'opération T sur $-b_{\bar{u}}^{\xi}$ et sur $\alpha_{\bar{u}}^{\xi}$, ceci revient à changer ω^+ en $-\omega^-$ et ω^- en $-\omega^+$, d'où :

$$\begin{aligned} T Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-) &= Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(-\omega^-, -\omega^+) \\ &= \sum_{-m'^+, -m'^-} (l^+, l^-, -m'^-, -m'^- | l^+, l^-, s', -m') \\ &\quad \times Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(-\omega^-) Y_{l^-}^{m^-, m'^-}(-\omega^+). \end{aligned}$$

soit, d'après la relation déjà indiquée :

$$\begin{aligned} T Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-) &= (-1)^{l^+ + l^- - s'} \\ &\quad \times \sum_{-m'^+, -m'^-} (l^-, l^+, -m'^-, -m'^- | l^-, l^+, s', -m') \\ &\quad \times Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(-\omega^-) Y_{l^-}^{m^-, m'^-}(-\omega^+). \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} Y_{l^+}^{m^+, m'^+}(-\omega^-) &= (-1)^{l^+} Y_{l^+}^{-m^+, -m'^+}(\omega^-), \quad \text{où } d^+ = |m'^+ - m^+|, \\ Y_{l^-}^{m^-, m'^-}(-\omega^+) &= (-1)^{l^-} Y_{l^-}^{-m^-, -m'^-}(\omega^+), \quad \text{où } d^- = |m'^- - m^-|. \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} T Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-) &= (-1)^{l^+ + l^- - s'} (-1)^{d^+ + d^-} \\ &\quad \times \sum_{-m'^+, -m'^-} (l^-, l^+, -m'^-, -m'^- | l^-, l^+, s', -m') \\ &\quad \times Y_{l^+}^{-m^+, -m'^+}(\omega^+) Y_{l^-}^{-m^-, -m'^-}(\omega^-). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant démontrer une autre propriété des paramètres de Clebsch-Gordan. Définissons ⁽⁵⁾ :

$$\begin{aligned} V(l^+, l^-, s', m'^+, m'^-, m') \\ = (-1)^{s' - m'} (2s' + 1)^{-\frac{1}{2}} (l^+, l^-, -m'^+, -m'^- | l^+, l^-, s', -m'). \end{aligned}$$

On a la relation suivante :

$$\begin{aligned} V(l^+, l^-, s', m'^+, m'^-, m') \\ = (-1)^{l^+ + l^- + s'} V(l^+, l^-, s', -m'^+, -m'^-, -m'), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & (-1)^{s'-m'}(l^+, l^-, -m'^+, -m'^- | l^+, l^-, s', -m') \\ & = (-1)^{s'+m'}(-1)^{l^++l^-+s'}(l^+, l^-, m'^+, m'^- | l^+, l^-, s', m'), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & (l^+, l^-, -m'^+, -m'^- | l^+, l^-, s', -m') \\ & = (-1)^{2m'}(-1)^{l^++l^-+s'}(l^+, l^-, -m'^+, -m'^- | l^+, l^-, s', m'), \end{aligned}$$

d'où, en portant cette relation dans l'expression de $T Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}$ (ω^+ , ω^-),

$$\begin{aligned} T Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-) & = (-1)^{2(l^++l^-+m')}(-1)^{d^++d^-} \\ & \times \sum_{-m'^+, -m'^-} (l^+, l^+, m'^-, m'^+ | l^-, l^+, s', -m') \\ & \times Y_{l^+}^{-m^+, -m'^+}(\omega^+) Y_{l^-}^{-m^-, -m'^-}(\omega^-). \end{aligned}$$

Comme $l^+ + l^- + m'$ est un entier, $2(l^+ + l^- + m')$ est pair.

Et comme $d^+ + d^- = |m'^+ - m^+ + m'^- - m^-|$ à un entier pair près; et que $m'^+ + m'^- = m'$, d'après une propriété des paramètres de Clebsch-Gordan, on a :

$$T Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-) = (-1)^{|m'^+ - m^+ - m^-|} Z_{l^-, l^+, s'}^{-m^+, -m^-, -m'}(\omega^+, \omega^-).$$

On remarquera, en outre, que m' et $m^+ + m^-$ étant simultanément entiers ou demi-entiers, $|m' - m^+ - m^-|$ est un entier.

Si l'on pose :

$$d = |m' - m^+ - m^-|;$$

il vient finalement :

$$T Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-) = (-1)^d Z_{l^-, l^+, s'}^{-m^+, -m^-, -m'}(\omega^+, \omega^-).$$

3. L'opération C. — Appliquée aux angles d'Euler les opérations P et T sont définies par les relations

$$P \begin{pmatrix} \omega^+ \rightarrow \omega^- \\ \omega^- \rightarrow \omega^+ \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} \omega^+ \rightarrow \omega^- \\ \omega^- \rightarrow \omega^+ \\ \theta_1 \rightarrow \theta_1 + \pi \\ \theta_2 \rightarrow \theta_2 + i\pi \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'opération PT est caractérisée par

$$PT = \begin{pmatrix} \theta_1 \rightarrow \theta_1 + \pi \\ \theta_2 \rightarrow \theta_2 + i\pi \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$C = \begin{pmatrix} \theta_1 \rightarrow \theta_1 + \pi \\ \theta_2 \rightarrow \theta_2 + i\pi \end{pmatrix}.$$

Appliquée aux fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$ les opérations P et T sont caractérisées par les relations

$$\begin{aligned} P Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-) &= (-1)^{l^+ + l^- - s'} Z_{l^-, l^+, s'}^{m^-, m^+, m'}(\omega^+, \omega^-), \\ T Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-) &= (-1)^d Z_{l^-, l^+, s'}^{-m^+, -m^-, -m'}(\omega^+, \omega^-), \end{aligned}$$

avec

$$d = |m' - m^+ - m^-|,$$

d'où :

$$C Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-) = (-1)^{l^+ + l^- + d - s'} Z_{l^-, l^+, s'}^{-m^+, -m^-, -m'}(\omega^+, \omega^-).$$

Donc si $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$ et la fonction d'onde correspondant à l'état interne d'une particule, $(-1)^\alpha Z_{l^+, l^-, s}^{-m^+, -m^-, -m'}(\omega^+, \omega^-)$ est la fonction d'onde correspondant à l'état interne d'une antiparticule avec :

$$\alpha = l^+ + l^- + d - s'.$$

On peut appliquer ceci au cas de la représentation

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \mathcal{O}\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Les fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$ se transformant suivant cette représentation sont caractérisées par :

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} l^+ = 0, \\ l^- = 0, \end{array} \right\} \frac{1}{2}, & \quad s' = \frac{1}{2}, \quad m' = \frac{1}{2} \quad \text{pour les particules;} \\ \left. \begin{array}{l} l^+ = 0, \\ l^- = 0, \end{array} \right\} \frac{1}{2}, & \quad s' = \frac{1}{2}, \quad m' = -\frac{1}{2} \quad \text{pour les antiparticules.} \end{aligned}$$

Dans chaque cas on aura quatre fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$ qu'on peut grouper en deux spineurs de Dirac, l'un étant le spineur particule et l'autre le spineur antiparticule. D'une façon explicite,

$$\Psi = \begin{bmatrix} Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}.$$

Si l'on attribue le spineur Ψ à la particule il faut attribuer le spineur Φ à l'antiparticule.

Si l'on définit le spineur Φ^* comme le spineur déduit du précédent en prenant le conjugué des variables complexes dépendant de l'imaginaire j il vient :

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ = Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}.$$

Si l'on a fait usage de la relation démontrée précédemment :

$$\begin{aligned} & (l^+, l^-, -m'^+, -m'^- | l^+, l^-, s', -m') \\ & = (-1)^{2m'} (-1)^{l^+ + l^- + s'} (l^+, l^-, m'^+, m'^- | l^+, l^-, s', m'). \end{aligned}$$

on retrouve Ψ . Par contre, si l'on définit $\bar{\Phi}$ comme le spineur déduit de Φ en prenant le complexe conjugué simultanément des variables définies avec l'imaginaire i et de celles définies avec l'imaginaire j , il vient :

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}(\omega^-, \omega^+) \\ -Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}(\omega^-, \omega^+) \\ -Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\omega^-, \omega^+) \\ + Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\omega^-, \omega^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \\ -Z_{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}}(\omega^+, \omega^-) \end{bmatrix}$$

et l'on retrouve la relation habituelle entre le spineur et le spineur conjugué de charge.

Nous allons maintenant considérer les sous-espaces vectoriels des fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}$ (ω^+, ω^-) caractérisés par les valeurs suivantes des nombres l^+, l^-, s', m' :

$$l^+ = l^- = \frac{1}{2}, \quad s' = m' = 0.$$

Comme on l'a déjà indiqué, ces fonctions se transforment sous le groupe complet de Lorentz suivant la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. On sait,

en outre (⁷), que les êtres géométriques qui ont cette propriété sont les quadrivecteurs :

$$Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-), \quad Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-), \quad Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-), \quad Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-).$$

On a défini (⁸) la norme dans l'espace vectoriel des fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}$ (ω^+ , ω^-) ainsi que leur produit scalaire.

Considérons les quatre vecteurs :

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) + Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) \right), \\ \alpha_{\mu}^{(2)} &= \frac{1}{2i} \left(Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) - Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) \right), \\ \alpha_{\mu}^{(3)} &= \frac{1}{2} \left(Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) + Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) \right), \\ \alpha_{\mu}^{(4)} &= \frac{1}{2i} \left(Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) - Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) \right). \end{aligned}$$

On constate immédiatement les résultats suivants :

a. Les quatre vecteurs $\alpha_{\mu}^{(1)}$, $\alpha_{\mu}^{(2)}$, $\alpha_{\mu}^{(3)}$, $\alpha_{\mu}^{(4)}$ sont indépendants et orthogonaux.

b. Sous l'opération P :

$$\begin{aligned} P \alpha_{\mu}^{(1)} &= -\alpha_{\mu}^{(1)}, \\ P \alpha_{\mu}^{(2)} &= -\alpha_{\mu}^{(2)}, \\ P \alpha_{\mu}^{(3)} &= -\alpha_{\mu}^{(3)}, \\ P \alpha_{\mu}^{(4)} &= \alpha_{\mu}^{(4)}. \end{aligned}$$

On en conclut que $\alpha_{\mu}^{(1)}$, $\alpha_{\mu}^{(2)}$, $\alpha_{\mu}^{(3)}$ sont trois vecteurs du genre espace, tandis que $\alpha_{\mu}^{(4)}$ est du genre temps, le signe de la norme de $\alpha_{\mu}^{(1)}$ et $\alpha_{\mu}^{(2)}$ est le même, ce qui est évident puisque $\alpha_{\mu}^{(2)} = C \alpha_{\mu}^{(1)}$ et que $C^* C = 1$; en outre, il est opposé au signe de $\alpha_{\mu}^{(3)}$.

Si l'on divise $\alpha_{\mu}^{(1)}$, $\alpha_{\mu}^{(2)}$, $\alpha_{\mu}^{(3)}$, $\alpha_{\mu}^{(4)}$ par leurs normes, on obtient ainsi un tétrapode analogue aux tétrapodes $\alpha_{\mu}^{\tilde{x}}$ et $b_{\mu}^{\tilde{x}}$ dont on était parti, mais il s'agit ici d'un tétrapode fonctionnel.

(⁷) Cf. E. M. CORSON, *Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations*, Blackie and Sons.

(⁸) P. HILLION et J.-P. VIGIER, *Inst. II. Poincaré* (même fascicule).

L'opération T n'étant pas linéaire, on ne peut s'attendre à avoir les relations

$$\left. \begin{aligned} T a_{\mu}^{(r)} &= a_{\mu}^{(r)} \\ T a_{\mu}^{(4)} &= -a_{\mu}^{(4)} \end{aligned} \right\} \quad (r = 1, 2, 3).$$

On vérifie effectivement que dans l'espace fonctionnel ces relations ne sont pas vraies, mais qu'on a à la place :

$$\begin{aligned} T a_{\mu}^{(r)} &= -a_{\mu}^{(r)}, \\ T a_{\mu}^{(4)} &= a_{\mu}^{(4)}. \end{aligned}$$

Comme on l'a montré, ces équations doivent s'écrire

$$\begin{aligned} T a_{\mu}^{(r)}(\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) &= -a_{\mu}^{(r)}(\theta_1 + \pi, \theta_2 + i\pi, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2), \\ T a_{\mu}^{(4)}(\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) &= a_{\mu}^{(4)}(\theta_1 + \pi, \theta_2 + i\pi, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2). \end{aligned}$$

Enfin, il faut faire une dernière remarque : dans l'étude déjà signalée (*) sur la définition de la norme des fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$ on a laissé ouverte la question de l'interprétation de cette norme, la métrique étant indéfinie dans l'espace vectoriel des fonctions. Toutefois, on a envisagé la possibilité que les états physiques seraient tels que le carré de leur norme soit positif. Il y a contradiction entre cette possibilité et le fait de considérer $a_{\mu}^{(4)}$ comme un vecteur du genre temps.

En effet, dans la métrique forte qu'on a définie :

$$\begin{aligned} a_{\mu}^{(4)} a_{\mu}^{(4)} &= \left(Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-), Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) \right) \\ &+ \left(Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-), Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-) \right). \end{aligned}$$

Or ceci ne peut être négatif qu'en supposant chaque terme au second membre négatif, ce qui, si l'hypothèse précédente était admise, reviendrait à admettre que $Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-)$ et $Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^+, \omega^-)$ ne correspondent pas à des états physiques.

Pour lever cette contradiction, il semble qu'on pourrait restreindre un peu l'hypothèse précédente en envisageant les deux cas où $l^+ + l^-$ est demi-entier ou entier. Dans le cas de $l^+ + l^-$ demi-entier, on imposerait aux fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$ ayant une signification physique d'être, dans le sous-espace vectoriel à métrique définie positive en interprétant leur norme comme une probabilité. Dans le

cas de $l^+ + l^-$ entier on ne ferait pas de différence entre les deux sous-espaces vectoriels, sinon en considérant qu'il y a des vecteurs du genre espace et d'autres vecteurs du genre temps, la norme serait donc interprétée comme une distance au sens géométrique du terme.

4. **Conclusion.** — On a donc pu établir le comportement des fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}$ (ω^+ , ω^-) sous chacune des opérations C, T, P. Ceci justifie le choix qu'on a fait ⁽¹⁾ dans la classification des états élémentaires en caractérisant les états particules par les trois nombres m^+ , m^- , m' et les états antiparticules correspondants par $-m^+$, $-m^-$, $-m'$. Il a, en outre, été montré que dans le cas de la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ on retrouvait le spineur conjugué de charge tel qu'il est défini habituellement dans la théorie de Dirac. Pour la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ à laquelle correspondent des vecteurs fonctionnels isomorphes aux vecteurs de l'espace-temps de la relativité spéciale, l'opération P a donc bien le caractère du renversement des sens du genre espace, ce qui prouve la cohérence de la théorie.

Enfin, l'application aux angles d'Euler des trois opérations C, P, T donne une image claire de la modification de leur structure interne lorsqu'on passe de l'état particule à l'antiparticule. En particulier dans le cas non relativiste, l'interprétation géométrique est évidente.