ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

Astronomie. Sur le quadrilatère sphérique bi-rectangle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 161-170
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__161_0>

ASTRONOMIE.

Sur le quadrilatère sphérique bi-rectangle ;

Par M. KRAMP, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

1. LE théorème de trigonométrie sphérique, dont les applications nombreuses à l'astronomie seront enseignées dans ce mémoire, peut être énoncé ainsi qu'il suit : *Tout quadrilatère sphérique bi-rectangle est immédiatement réductible au triangle sphérique obliquangle.*

2. Le quadrilatère sphérique peut être bi-rectangle de deux manières. Dans *la première*, les deux angles droits A et B (fig. 1), du quadrilatère ABDE, sont adjacens au même côté AB. Alors, prolongeant les côtés AD et BE jusqu'au point C, qui sera le pôle de l'arc AB, on aura :

Le côté AB, égal à l'angle C;

Le côté AD, égal au complément du côté CD;

Le côté BE, égal au complément du côté CE;

Le côté DE, commun au quadrilatère ABDE et au triangle CDE;

L'angle ADE, supplément de l'angle CDE;

L'angle BED, supplément de l'angle CED.

Ainsi, le quadrilatère ABDE sera entièrement réduit au triangle sphérique CDE, et toutes les formules démontrées pour le triangle seront immédiatement applicables à ce quadrilatère.

3. Dans *la seconde*, les deux angles droits A et L (fig. 2), du quadrilatère sphérique EASL, sont diagonalement opposés l'un à l'autre. Ce quadrilatère se rencontre fréquemment en astronomie. Un des cas les plus communs est celui où le côté EA désigne l'équateur, le côté EL l'écliptique, et S une étoile quelconque. On aura alors.

L'angle E = à l'obliquité de l'écliptique;

L'angle PSL = à l'angle de position;

Le côté AE = à l'ascension droite;

Le côté AS = à la déclinaison;

Le côté EL = à la longitude;

Le côté SL = à la latitude (*).

(*) Outre les deux quadrilatères qui viennent d'être considérés par l'auteur, on peut encore, comme l'a fait M. Carnot, relativement aux figures planes rectilignes, considérer les quadrilatères des figures 3 et 4, dans lesquels deux côtés opposés se coupent, et où, pour mieux faire saisir leur analogie avec les premiers, nous avons désigné les points correspondans à ceux des figures 1 et 2 par les mêmes lettres. La théorie de ces quadrilatères ne différant pas essentiellement de celle des quadrilatères dont s'occupe M. Kramp dans son mémoire, nous croyons suffisant de les faire remarquer. Nous observerons seulement, 1.° que le quadrilatère de la figure 4 est celui qu'il faut employer, toutes les fois que l'étoile n'est point comprise entre l'écliptique et l'équateur; 2.° que les quadrilatères des figures 1 et 3 peuvent, entre autres usages, servir à résoudre ces deux questions générales, dont chacune en contient quatre particulières:

1.° *De ces quatre choses: les déclinaisons, la différence des ascensions droites, et la distance angulaire de deux étoiles, trois quelconques étant connues, déterminer la quatrième?*

2.° *De ces quatre choses: les latitudes, la différence des longitudes de deux*

4. Pour fixer les idees, nous allons considérer le quadrilatère sphérique bi-rectangle sous ce dernier point de vue. Mais, pour abréger, nous désignerons :

Par E .... l'obliquité de l'écliptique, ou l'angle AEL;

Par S .... l'angle de position, ou l'angle PSL;

Par A .... l'ascension droite de l'astre, ou l'arc AE;

Par A′.... la déclinaison de l'astre, ou l'arc AS;

Par L .... la longitude de l'astre, ou l'arc EL;

Par L′.... la latitude de l'astre, ou l'arc SL.

5. Prolongeons le côté AS jusqu'en P, pôle de l'arc AE; prolongeons de même l'arc SL jusqu'en Q, pôle de l'arc EL; et menons les arcs de grands cercles EP, EQ, PQ : les quatre arcs AP, EP, LQ, EQ, seront ainsi des quarts de circonférence; et l'arc PQ sera la mesure de l'angle PEQ, égal à l'angle AEL. On aura, par conséquent, dans le triangle SPQ,

Le côté $SP=90^{\circ}-A'$;

Le côté $SQ=90^{\circ}+L'$;

Le côté $PQ=E$;

étoiles, et leur distance angulaire, trois quelconques étant connues, déterminer la quatrième?

On peut, au surplus, à ces deux questions, substituer la suivante, plus générale, qui en comprend *vingt et une* particulières, et peut fournir *quarante-deux* formules :

De ces sept choses : les déclinaisons, les latitudes, la différence des ascensions droites, celle des longitudes, et la distance angulaire de deux étoiles, cinq quelconques étant connues, déterminer les deux autres?

(*Note des éditeurs.*)

L'angle $PSQ=S$;

L'angle $SPQ=90^\circ+A$;

L'angle $SQP=90^\circ-L$.

Ainsi, le triangle SPQ sera entièrement représentatif du quadrilatère bi-rectangle AESL; tous les angles et côtés de l'un se retrouveront dans les angles et côtés de l'autre.

6. Appliquant d'abord au triangle SPQ le théorème par lequel, dans tout triangle sphérique, les sinus des angles sont proportionnels à ceux des côtés opposés, on aura les trois proportions qui suivent :

$$(1).\quad \text{Cos.}\,A' : \text{Cos.}\,L = \text{Sin.}\,E : \text{Sin.}\,S\,;$$

$$(2).\quad \text{Cos.}\,L' : \text{Cos.}\,A = \text{Sin.}\,E : \text{Sin.}\,S\,;$$

$$(3).\quad \text{Cos.}\,A : \text{Cos.}\,L = \text{Cos.}\,L' : \text{Cos.}\,A'.$$

La dernière proportion se tire immédiatement des deux triangles EAS et ELS, rectangles en A et L; ils fournissent :

$$\text{Cos.}\,ES = \text{Cos.}\,EA.\,\text{Cos.}\,AS\,;$$

$$\text{Cos.}\,ES = \text{Cos.}\,EL.\,\text{Cos.}\,LS.$$

d'où l'on tire :

$$\text{Cos.}\,A.\,\text{Cos.}\,A' = \text{Cos.}\,L.\,\text{Cos.}\,L'.$$

7. Appliquant à ce même triangle SPQ le théorème en vertu duquel on passe des trois côtés, supposés donnés, aux trois angles du triangle, on aura les trois équations qui suivent :

$$(4).\quad \text{Cos.}\,S = \frac{\text{Cos.}\,E + \text{Sin.}\,A'.\,\text{Sin.}\,L'}{\text{Cos.}\,A'.\,\text{Cos.}\,L'}\,;$$

$$(5).\quad \text{Sin.}\,L = \frac{\text{Sin.}\,A' + \text{Cos.}\,E.\,\text{Sin.}\,L'}{\text{Sin.}\,E.\,\text{Cos.}\,L'}\,;$$

$$(6).\quad \text{Sin.A}=\frac{\text{Sin.L}'+\text{Cos.E.Sin.A}'}{\text{Sin.E.Cos.A}'}.$$

Ces trois formules renferment la solution du problème qui suit : *Connaissant la déclinaison et la latitude d'un astre, trouver sa longitude, son ascension droite et son angle de position?*

8. De ces trois formules, on tire de plus :

$$(7).\quad \text{Cos.E}=\text{Cos.S.Cos.A}'.\text{Cos.L}'-\text{Sin.A}'.\text{Sin.L}';$$

$$(8).\quad \text{Sin.A}'=\text{Sin.E.Sin.L.Cos.L}'-\text{Cos.E.Sin.L}';$$

$$(9).\quad \text{Sin.L}'=\text{Sin.E.Sin.A.Cos.A}'-\text{Cos.E.Sin.A}'.$$

Au moyen de la seconde, on déduit la déclinaison de la longitude et de la latitude; et la troisième fait connaître la latitude, lorsque l'ascension droite et la déclinaison sont données.

9. On connaît de même les formules moyennant lesquelles on trouve les côtés d'un triangle sphérique dont on connaît les angles. En les appliquant de même au triangle SPQ, on rencontre les expressions littérales qui suivent :

$$(10).\quad \text{Cos.E}=\frac{\text{Cos.S}-\text{Sin.A.Sin.L}}{\text{Cos.A.Cos.L.}};$$

$$(11).\quad \text{Sin.A}'=\frac{\text{Sin.L}-\text{Sin.A.Cos.S}}{\text{Cos.A.Sin.S}};$$

$$(12).\quad \text{Sin.L}'=\frac{\text{Sin.A}-\text{Cos.S.Sin.L}}{\text{Sin.S.Cos.L}}.$$

Elles renferment la solution du problème : *Connaissant la longitude, l'ascension droite d'un astre, et son angle de position, trouver sa latitude et sa déclinaison.*

10. De ces trois formules, on tire encore celles qui suivent :

$$(13).\quad \text{Cos.S}=\text{Cos.E.Cos.A.Cos.L}+\text{Sin.A.Sin.L};$$

$$(14).\quad \text{Sin.L}=\text{Sin.A}'.\text{Cos.A}.\,\text{Sin.S}+\text{Sin.A.Cos.S}\ ;$$

$$(15).\quad \text{Sin.A}=\text{Sin.L}'.\text{Sin.S.Cos.L}+\text{Cos.S}.\,\text{Sin.L}\ .$$

La première est remarquable : elle apprend à trouver l'angle de position, lorsqu'on connait la longitude et l'ascension droite.

11. Appliquons de même au triangle SPQ les formules qui font trouver deux angles d'un triangle spherique dont on connaît le troisième et les deux côtes qui le comprennent ; on parvient à la solution des problèmes qui suivent.

En regardant comme donnés les deux côtés SP et PQ, et l'angle compris SPQ, on aura :

$$(16).\quad \text{Tang.L}=\frac{\text{Tang.A}'.\text{Sin.E}+\text{Sin.A.Cos.E}}{\text{Cos.A}}\ ;$$

$$(17).\quad \text{Cot.S}=\frac{\text{Cos.A}'.\ \text{Cot.E}+\text{Sin.A}.\ \text{Sin.A}'}{\text{Cos.A}}\ .$$

Ainsi, connaissant, outre l'obliquité de l'écliptique, l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, on trouvera, par ces formules, sa longitude et son angle de position.

En supposant donnés les deux côtés PQ et SQ, et l'angle compris PQS, on aura :

$$(18).\quad \text{Cot.S}=\frac{\text{Cot.E}.\ \text{Cos.L}'+\text{Sin.L}.\ \text{Sin.L}'}{\text{Cos.L}}\ ;$$

$$(19).\quad \text{Tang.A}=\frac{\text{Sin.E.Tang.L}'+\text{Sin.L}.\ \text{Cos.E}}{\text{Cos.L}}\ .$$

Ainsi, connaissant, outre l'obliquité, la longitude et la latitude d'un astre, on trouvera, par ces formules, son ascension droite et son angle de position.

Considérant enfin comme donnés les deux côtés PS et QS, et l'angle compris PSQ, on aura :

$$(20).\quad \text{Tang.L} = \frac{\text{Tang.A}'.\ \text{Cos.L}' + \text{Cos.S}.\ \text{Sin.L}'}{\text{Sin.S}};$$

$$(21).\quad \text{Tang.A} = \frac{\text{Tang.L}'.\ \text{Cos.A}' + \text{Cos.S}.\ \text{Sin.A}'}{\text{Sin.S}}.$$

12. Appliquant aussi au triangle SPQ les formules qui apprennent à trouver deux côtés d'un triangle sphérique, dont on connaît le troisième côté et les deux angles adjacens ; on parviendra à la solution des problèmes qui suivent.

En regardant comme donnés le côté SQ avec les angles adjacens PSQ et PQS, on aura :

$$(22).\quad \text{Cot.E} = \frac{\text{Cot.S}.\ \text{Cos.L} - \text{Sin.L}.\ \text{Sin.L}'}{\text{Cos.L}'};$$

$$(23).\quad \text{Tang.A}' = \frac{\text{Tang.L}.\ \text{Sin.S} - \text{Cos.S}.\ \text{Sin.L}'}{\text{Cos.L}'}.$$

En supposant donnés le côté PS avec les angles adjacens PSQ et SPQ, on aura :

$$(24).\quad \text{Cot.E} = \frac{\text{Cot.S}.\ \text{Cos.A} - \text{Sin.A}.\ \text{Sin.A}'}{\text{Cos.A}'};$$

$$(25).\quad \text{Tang.L}' = \frac{\text{Tang.A}.\ \text{Sin.S} - \text{Cos.S}.\ \text{Sin.A}'}{\text{Cos.A}'}.$$

Considérant enfin comme donnés le côté PQ avec les deux angles adjacens PQS et QPS, on trouvera :

$$(26).\quad \text{Tang.A}' = \frac{\text{Tang.L}.\ \text{Cos.A} - \text{Sin.A}.\ \text{Cos.E}}{\text{Sin.E}};$$

$$(27).\quad \text{Tang.L}' = \frac{\text{Tang.A}.\ \text{Cos.L} - \text{Sin.L}.\ \text{Cos.E}}{\text{Sin.E}}.$$

Elles nous apprennent à trouver la latitude et la déclinaison d'un astre dont on connait la longitude et l'ascension droite.

13. Les problèmes dont nous venons de donner la solution sont au nombre de *trente-six*. Nous allons en donner l'aperçu dans la table qui suit. Nous rappellerons encore que nous désignons

Par E ,.... l'obliquité de l'écliptique ;

Par A ,.... l'ascension droite ;

Par A′,.... la déclinaison ;

Par L ,.... la longitude ;

Par L′,.... la latitude ;

Par S ,.... l'angle de position.

Dans les *quatorze* premiers de ces problèmes, l'obliquité de l'écliptique est au nombre des quantités données, et l'angle de position n'en est point ; savoir :

Data.	*Quæsita.*
E, A, A′, ...	L. (16).
E, A, A′, ...	L′. (9).
E, A, A′, ...	S. (17).
E, L, L′, ...	A. (19).
E, L, L′, ...	A′. (8).
E, L, L′, ...	S. (18).
E, A, L, ...	A′. (26).
E, A, L, ...	L′. (27).
E, A, L, ...	S. (13).

E,

Data.	*Quæsita.*
E, A′, L′, ...	A. (6).
E, A′, L′, ...	L. (5).
E, A′, L′, ...	S. (4).
E, A, L′, ...	S. (2).
E, A′, L, ...	S. (1).

Quatre autres problèmes sont compris dans la proportion (3), en vertu de laquelle le produit des cosinus de l'ascension droite et de la déclinaison est égal à celui des cosinus de la longitude et de la latitude; il en résulte que, connaissant trois de ces quatre quantités, on peut toujours trouver la quatrième par une simple règle de trois.

Dans les *quatre* problèmes qui suivent, on suppose qu'outre l'obliquité de l'écliptique et l'angle de position, on connaît l'une des quatre quantités A, A′, L, L′. On en trouve la solution par l'une ou l'autre des proportions (1) et (2).

Enfin, dans les *quatorze* derniers, l'angle de position est au nombre des quantités données, tandis que l'obliquité de l'écliptique n'en est pas, savoir :

Data.	*Quæsita.*
S, A, A′, ...	L. (14).
S, A, A′, ...	L′. (25).
S, A, A′, ...	E. (24).
S, L, L′, ...	A. (15).
S, L, L′, ...	A′. (23).
S, L, L′, ...	E. (22).

Data.	*Quæsita.*
S, A, L, ...	A′. (11).
S, A, L, ...	L′. (12).
S, A, L, ...	E. (10).
S, A′, L′, ...	A. (21).
S, A′, L′, ...	L. (20).
S, A′, L′, ...	E. (7).
S, A, L′, ...	E. (2).
S, A′, L, ...	E. (1).

14. Le but de ce mémoire est de faire voir comment, par des formules faciles et simples, on peut toujours déterminer trois des six quantités E, A, A′, L, L′, S, lorsqu'on connaît les trois autres; et que la solution de toutes les questions qui s'y rapportent, ne suppose, dans tous les cas, que la simple connaissance du triangle sphérique.