ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

RAYMOND

Géométrie analitique. Méthodes directes pour résoudre, dans tous les cas, cette question : étant donné d'espèce et de position sur un plan, une courbe quelconque du second degré, placée comme on voudra, par rapport aux axes des coordonnées ; établir l'équation numérique de cette courbe, relativement à sa situation actuelle ?

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 180-189
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__180_1>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Méthodes directes pour résoudre, dans tous les cas, cette question : Étant donné d'espèce et de position sur un plan, une courbe quelconque du second degré, placée comme on voudra, par rapport aux axes des coordonnées; établir l'équation numérique de cette courbe, relativement à sa situation actuelle ?

Par M. Raymond, professeur de mathématiques au collége de Chambéri, membre de plusieurs sociétés savantes.

A MM. LES RÉDACTEURS DES *ANNALES*.

Messieurs,

L'article que j'ai l'honneur de vous adresser est sans doute de peu d'importance; mais vous avez annoncé que vous donneriez sur-tout votre attention aux vues qui auraient pour objet l'utilité et la simplicité de l'enseignement des mathématiques ; sous ce rapport, j'ai pensé que vous ne dédaigneriez pas quelques détails propres à abréger les recherches des élèves, dans la matière dont il s'agit. J'ai donc l'honneur de vous transmettre ces détails, en attendant que je puisse m'occuper de quelque objet plus digne d'intéresser vos lecteurs.

Les traités élémentaires de MM. Lacroix, Biot, Lefrançais, Garnier, etc., fournissent bien aux élèves les données nécessaires pour la solution de la question inverse de celle posée ci-dessus, savoir, de la question : *Étant donnée une équation numérique quelconque, du second degré, déterminer l'espèce et la position de la courbe à laquelle elle appartient, et construire cette courbe graphiquement ?* Mais ces ouvrages ne donnent aucun moyen direct d'arriver à la solution de la première question, et il est nécessaire pour les élèves de la savoir résoudre en général et avec facilité. Nous allons donc nous en occuper successivement, pour chaque espèce de courbe.

1. Commençons par rappeler que l'équation générale ;

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\ ,$$

étant résolue par rapport à y, peut être mise sous cette forme :

$$y=-\left\{\frac{Bx+D}{2A}\right\}\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}(x-x')(x-x'')}\ ;$$

x' et x'' représentant les abscisses des limites, dans le sens des x ; auquel cas le diamètre de la courbe, dans le même sens, a pour équation :

$$y=-\frac{B}{2A}x-\frac{D}{2A}.$$

La résolution, par rapport à x, donne les résultats analogues :

$$x=-\left\{\frac{By+E}{2C}\right\}\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4C^2}(y-y')(y-y'')}\ ,$$

$$x=-\frac{B}{2C}y-\frac{E}{2C}.$$

2. 1.° *Pour l'ellipse.* Soit l'ellipse ILI′L′ (fig. 6) disposée de telle manière que l'on ait :

$$AD=\frac{3}{2},\ AE=2,\ AB=4,\ AB'=8,\ OL=2.$$

le diamètre DI′ aura pour équation :

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$$

substituant donc, sous le radical, les valeurs :

$$x'=-4\ ,\qquad x''=-8\ ,$$

l'équation totale deviendra :

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}(x+4)(x+8)}.$$

Mettant sous le radical la valeur de x relative au centre O de la courbe et faisant ainsi :

$$x=AC=-6\ ,$$

la partie radicale de l'ordonnée exprimera alors la valeur du demi-diamètre OL, et l'on posera par conséquent :

$$\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}\times-4}=2,$$

ce qui déterminera la valeur numérique du facteur $\frac{B^2-4AC}{4A^2}$; l'on aura ainsi :

$$\frac{B^2-4AC}{4A^2}=\frac{+4}{-4}=-1\ ;$$

d'où :

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\pm\sqrt{-(x^2+12x+32)}.$$

Isolant le radical, élevant tout au carré, transposant et réduisant, on aura enfin :

$$16y^2+24xy+25x^2+48y+228x+548=0\ ;$$

équation cherchée, dont on constatera l'exactitude par la discussion.

Le procédé serait absolument semblable, si l'on donnait les limites de la courbe, dans le sens des y.

3. Soit O (fig. 7) un point considéré comme le résultat de la contraction d'une ellipse réduite à ce point; soient :

$$AD=2\,, \qquad AE=2\,, \qquad AB=5.$$

L'équation du diamètre DO sera :

$$y=x+2.$$

On a ici :

$$x'=x''=5\,,$$

d'où ;

$$y=2+2\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}(x-5)^2}\,,$$

en substituant l'abscisse relative au centre, qui est de même valeur que la limite unique, et observant que tout diamètre de la courbe est nul, on trouvera :

$$\frac{B^2-4AC}{4A^2}=\frac{0}{0}\,,$$

ce qui nous apprend qu'on peut donner à ce facteur la valeur qu'on voudra. Nous choisirons la plus simple, et, attendu qu'il est toujours négatif, dans l'ellipse, nous le ferons $=-1$; nous aurons ainsi :

$$y=x+2\pm\sqrt{-(x-5)^2}\,;$$

isolant le radical, élevant au carré, transposant et réduisant, il viendra enfin :

$$y^2-2xy+2x^2-4y-6x+29=0 \quad (*).$$

(*) Il est facile de se rendre raison de l'indétermination qu'on rencontre ici pour la valeur de $\frac{B^2-4AC}{4A^2}$; si en effet on pose ce coefficient $=-m$, il viendra :

$$y=x+2\pm\sqrt{-m(x-5)^2}\,;$$

d'où, en transposant et faisant disparaître le radical,

$$(y-x-2)^2+m(x-5)^2=0\,;$$

4. 2.° *Pour l'hyperbole.* Soit une hyperbole, disposée comme dans la fig. 8, et telle qu'on ait;

$$AD=1, \quad AE=3, \quad AB=5, \quad AB'=1, \quad OL=3.$$

L'équation du diamètre sera :

$$y=\frac{1}{3}x-1,$$

et, à cause de $x'=5$ et de $x''=-1$, on aura pour la courbe :

$$y=\frac{1}{3}x-1\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}(x-5)(x+1)}.$$

Mettant sous le radical, à la place de x, la valeur de $AC=2$, et comparant ce radical, ainsi modifié, à la valeur de OL, prise sous une forme imaginaire, par la raison que le second diamètre ne saurait rencontrer la courbe, on fera ainsi :

$$\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}\times-9}=3\sqrt{-1};$$

d'où :

$$\frac{B^2-4AC}{4A^2}=+1;$$

$$y=\frac{1}{3}x-1\pm\sqrt{x^2-4x-5},$$

---

or, lorsque m est positif, comme on le suppose ici, cette équation ne peut être satisfaite qu'en posant séparément

$$y-x-2=0 \qquad \text{et} \qquad m(x-5)=0,$$

ou, plus simplement,

$$y-x-2=0 \qquad \text{et} \qquad x-5=0;$$

d'où l'on voit que le coefficient m disparaît de lui-même. De plus, comme l'on a

$$m=-\frac{(y-x-2)^2}{(x-5)^2},$$

on devra avoir, dans le cas actuel, $m=\frac{0}{0}$.

On voit par là qu'un même point conjugué peut être exprimé par une infinité d'équations numériques différentes.

(*Note des éditeurs.*)

ce

ce qui donne, toutes réductions faites,

$$9y^2-6xy-8x^2+18y+30x+54=0.$$

5. Soit l'hyperbole de la fig. 9, et supposons que l'on ait :

$$AO=2, \quad AE=2, \quad AB=AI'=2, \quad OL=3.$$

Le diamètre II', dans le sens des x, aura pour équation :

$$y=-x-2;$$

ce diamètre ne pouvant rencontrer la courbe, les limites AB et AI' qui le déterminent doivent être introduites dans l'équation sous la forme imaginaire, et il faut faire :

$$x'=AB\sqrt{-1}=2\sqrt{-1}, \quad x''=AI'\sqrt{-1}=-2\sqrt{-1};$$

ce qui donne :

$$(x-x')(x-x'')=x^2+4:$$

ainsi, on aura :

$$y=-x-2\pm\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}(x^2+4)}.$$

Faisant maintenant, sous le radical, $x=0$, attendu que l'abscisse relative au centre est nulle, et observant que le diamètre LL' est réel, on posera :

$$\sqrt{\frac{(B^2-4AC)}{4A^2}\times 4}=3,$$

d'où :

$$\frac{B^2-4AC}{4A^2}=\frac{9}{4}.$$

Ainsi, l'équation deviendra :

$$y=-x-2\pm\sqrt{\frac{9}{4}x^2+9};$$

ou :

$$4y^2+8xy-5x^2+16y+16x-20=0.$$

6. Soit l'hyperbole de la fig. 10, rapportée aux asymptotes OS et OZ; supposons que l'asymptote OZ soit parallèle à l'axe AY des ordonnées, ce qui annonce déjà que le quarré de y manquera dans l'équation cherchée. Soient ensuite :

$$AZ=AS=3, \quad AG=AH=2, \quad AD=6, \quad AK=\frac{8}{3}.$$

L'asymptote OS aura pour équation :

$$y=-2x+6\,,$$

et celle de l'asymptote OZ sera :

$$x=-3\,,$$

d'où : $y+2x-6=0$ et $x+3=0$.

Comme ces deux équations appartiennent au système commun des lignes OS et OZ, on les combinera par voie de multiplication et l'on aura :

$$xy+2x^2+3y-18=0\;;$$

équation qui suffirait, si l'on ne cherchait qu'à représenter le système des asymptotes dont il s'agit ; mais, comme la courbe existe, il faut tenir compte des données que fournit sa situation. Or, on voit que l'équation finale doit être telle que, 1.° si l'on y fait $x=0$, on doit trouver :

$$y=\mathrm{AK}=\frac{8}{3}\,,$$

d'où : $3y-8=0$;

2.° si l'on y fait $y=0$, il doit venir :

$$x=\mathrm{AG}=\mathrm{AH}=\pm 2\,,$$

d'où : $x^2=4$, et par conséquent, $2x^2-8=0$;

ce qui indique que le terme indépendant des variables doit être -8, et qu'ainsi l'équation cherchée sera :

$$xy+2x^2+3y-8=0.$$

Et en effet, outre les deux hypothèses alternatives $x=0$ et $y=0$, qui donnent des résultats convenables, on tire de cette équation :

$$y=\frac{-2x^2+8}{x+3}=-x+6-\frac{10}{x+3}\,,$$

résultat qui, dans le cas de $x=\infty$, se réduit à :

$$y=2x+6\;;$$

qui est bien l'équation de l'asymptote OS ; pareillement, on aura $y=\infty$, si l'on fait $x=-3$, qui est l'équation de l'autre asymptote OZ.

7. Soit encore l'hyperbole de la fig. 11, dont l'asymptote OS est parallèle à l'axe AX, ce qui fera manquer, dans l'équation, le quarré de x; soient,

$$AD=AD'=AE=\frac{2}{3}, \quad AG=3;$$

l'asymptote OS aura pour équation,

$$y-\frac{2}{3}=0,$$

et celle de l'asymptote OZ, ordonnée relativement à l'axe AY, sera :

$$x+y+\frac{2}{3}=0.$$

Multipliant ces deux équations par ordre, on obtiendra pour celle du système asymptotique :

$$3xy+3y^2-2x-\frac{4}{3}=0.$$

Mais, à cause de AG=3, on voit que l'hypothèse de $y=0$ entraînera la condition $x=3$, d'où :

$$-2x+6=0;$$

ce qui fait voir que le terme indépendant des variables doit être $+6$, et qu'ainsi l'équation cherchée sera :

$$3xy+3y^2-2x+6=0;$$

ce qui se vérifiera aisément par la discussion.

8. 3.° *Pour la parabole.* En revenant à l'équation générale (1) et laissant d'abord la valeur de y sous cette forme :

$$y=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)};$$

on voit que la condition attachée à la parabole,

$$B^2-4AC=0,$$

réduit cette valeur à ce qui suit :

$$y=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)};$$

valeur qui peut se mettre sous cette forme :

$$y=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\sqrt{\frac{2(BD-2AE)}{4A^2}(x-x')}\ ,$$

x' représentant l'abscisse de la limite unique de la courbe dans le sens des x.

Il faut, en outre, se rappeler que, si l'on remplace x, sous le radical, par l'abscisse relative au paramètre, ce radical exprime alors la moitié du paramètre.

9. Cela posé, soit la parabole NIN′ (fig. 12) dont le paramètre NN′ soit égal à $4\sqrt{2}$; soient en outre :

$$AB=2\ ,\quad BI=2\ ,\qquad \text{d'où}\qquad IO=\sqrt{2}\ ,\quad AC=3.$$

Le diamètre AO a pour équation :

$$y=x\ ;$$

on aura donc, pour la courbe, à cause de $x'=AB=2$,

$$y=\pm\sqrt{\frac{2(BD-2AE)}{4A^2}(x-2)}.$$

Faisant donc $x=AC=3$, on posera (8) :

$$\sqrt{\frac{2(BD-2AE)}{4A^2}\times 1}=ON=2\sqrt{2}\ ,$$

d'où :
$$\frac{2(BD-2AE)}{4A^2}=8\ ;$$

ainsi, l'équation cherchée sera :

$$y=x\pm\sqrt{8(x-2)}\ ,$$

ou
$$y^2-2xy+x^2-8x+16=0.$$

P. S. Permettez-moi, MM., de saisir cette occasion pour indiquer, en passant, une forme assez élégante à laquelle on peut ramener l'expression du volume d'une portion d'hyperboloïde de révolution terminée par un plan perpendiculaire à l'axe.

Ce volume étant équivalent, comme l'on sait, au volume du tronc de cône engendré par le trapèze asymptotique correspondant, moins le volume du cylindre de même hauteur et d'un diamètre égal au second axe de la courbe ; si l'on fait (fig. 13) $IX = x$, $OI = a$, $IB = b$, l'expression analitique du volume engendré par le segment hyperbolique ICX, sera :

$$\frac{\pi b^2 x^3 + 3\pi a b^2 x^2}{3a^2} \text{ (*)} ;$$

quantité qui peut s'écrire ainsi :

$$\frac{1}{3}\, x . \frac{\pi b^2 x^2}{a^2} + a . \frac{\pi b^2 x^2}{a^2} \text{ (A)}.$$

Or, si l'on mène IE parallèle à l'asymptote OD, les triangles semblables OBI et IEX donnent :

$$EX = \frac{bx}{a} ;$$

et ainsi $\frac{\pi b^2 x^2}{a^2}$ exprime l'aire du cercle décrit par XE ; d'où il suit que l'expression (A) représente un cône ayant pour base le cercle décrit par XE, et pour hauteur l'abscisse IX, plus un cylindre de même base que ce cône et d'une hauteur $XG = OI = a$.

Par conséquent, le volume de l'hyperboloïde engendré par le segment ICX sera *équivalent au volume engendré par la révolution du trapèze* IEFG *autour de* IG.

Cet énoncé me paraît utile, dans les élémens, comme réunissant, à la fois, la commodité pour la mémoire, la simplicité de l'expression et la facilité du calcul.

J'ai l'honneur d'être, etc.

G. M. RAYMOND.

(*) Ce que l'on vérifie aisément, au surplus, en substituant, dans la formule $\pi y^2 dx$, la valeur de y^2 tirée de l'équation de la courbe, intégrant et déterminant la constante pour le sommet I de l'hyperboloïde.