ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

TÉDENAT

Questions résolues. Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 285-291

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__285_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume;

Par M. Tédenat, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

Problème général. Des points étant donnés, en nombre quelconque, sur un plan; déterminer, sur ce plan, un nouveau point dont la somme des distances aux points donnés soit un minimum ?

Solution. Ce problème peut être traité par plusieurs méthodes diverses, entre lesquelles nous choisirons seulement les deux suivantes:

Première méthode. Soient m, m', m'', ..., les points donnés, M le point cherché, et z, z', z'', ..., les distances respectives de ce dernier point à tous les autres.

Soit rapporté tout le système à deux axes rectangulaires, et soient alors les coordonnées, tant du point cherché que des points donnés, ainsi qu'il suit :

$$\text{pour M}\left\{\begin{matrix} x\,, \\ y\,; \end{matrix}\right. \quad \text{pour } m\left\{\begin{matrix} \alpha\,, \\ \beta\,; \end{matrix}\right. \quad \text{pour } m'\left\{\begin{matrix} \alpha'\,, \\ \beta'\,; \end{matrix}\right. \quad \text{pour } m''\left\{\begin{matrix} \alpha''\,, \\ \beta''\,; \end{matrix}\right. \ldots$$

on aura

$$z=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\,,\quad z'=\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2}\,,\quad z''=\sqrt{(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2}\,,\ \ldots$$

en désignant donc par S la somme des distances du point M aux points m, m', m'', ..., on aura

$$S=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}+\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2}+\sqrt{(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2}+\ldots\ldots;$$

or, par les conditions du problème, S doit être un *minimum*; d'où il suit qu'on doit avoir, à la fois,

$$\frac{dS}{dx}=0\,, \qquad \frac{dS}{dy}=0\,;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{x-\alpha}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}+\frac{x-\alpha'}{\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2}}+\frac{x-\alpha''}{\sqrt{(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2}}+\ldots=0\,,$$

$$\frac{y-\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}+\frac{y-\beta'}{\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2}}+\frac{y-\beta''}{\sqrt{(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2}}+\ldots=0\,.$$

Voilà donc deux équations entre les coordonnées x et y du point cherché M, ce qui, théoriquement parlant, suffit pour la détermination de ce point ; mais malheureusement ces équations, par leur extrême complication, ne peuvent être, dans le plus grand nombre des cas, d'un grand secours pour la résolution complète du problème.

Soient désignés respectivement par a, a', a'', ..., les angles que forment, avec l'axe des x, les droites z, z', z'', ... menées du point M aux points m, m', m'', ...; à l'aide de ces notations, les équations auxquelles nous venons de parvenir prendront cette forme très-simple

$$\text{Cos.}a+\text{Cos.}a'+\text{Cos.}a''+\text{Cos.}a'''+\ldots\ldots=0\,,$$

$$\text{Sin.}\,a+\text{Sin.}a'+\text{Sin.}''a+\text{Sin.}a'''+\ldots\ldots=0\,;$$

ce qui nous apprend que la somme des cosinus des angles formés sur une même droite quelconque, par les droites z, z', z'', ..., doit être zéro.

De là il est facile de conclure (*) que les droites z, z', z'', ..., doivent être respectivement parallèles aux côtés d'un certain polygone de m côtés, qui aurait tous ses côtés égaux entre eux; et, comme la somme des angles autour du point M doit être quatre angles droits, il en résulte que ces angles doivent être consécutivement égaux aux angles extérieurs consécutifs du polygone dont il vient d'être question.

D'après ces considérations on voit que le problème général que nous nous sommes proposé, dépend du suivant: n *points* m, m′, m″, ... *étant donnés de position sur un plan, et une droite étant donnée de longueur, construire sur ce plan un polygone de* n *côté, dont tous les côtés soient égaux entre eux et à la droite donnée, et qui, en outre soit tel que ses cotés, prolongés s'il est nécessaire, passent respectivement par les* n *points donnés* (**)? Il est clair, en effet, qu'en appliquant la solution générale de ce problème au cas particulier où la droite donnée sera nulle, le polygone cherché se réduira à un point unique, lequel ne sera autre chose que le point M (***).

Venons présentement aux applications. 1.° S'il y a trois points donnés m, m', m'', les trois angles formés par les droites z, z', z'', menées du point cherché M à ceux-là, devront être consécutivement égaux aux trois angles extérieurs d'un *triangle équilatéral*,

---

(*) Voyez la page 192 de ce volume.

(**) On propose de trouver une solution de ce problème?

(***) Le problème proposé peut aussi être réduit à ce problème de statique: n *cordons étant réunis à un même nœud et situés dans un même plan, et des puissances égales quelconques étant appliquées à l'extrémité de chacun d'eux, déterminer de quelle manière le système doit être disposé, dans le cas d'équilibre, pour que les directions des cordons passent respectivement par* n *points donnés sur leur plan?* Ou encore à cet autre: *Les sommets d'un polygone plan, de* n *côtés, jouissant d'une même puissance attractive quelconque, indépendante des distances; en quel point du plan de ce polygone faudrait-il placer un corps, pour qu'il demeurât en équilibre?*

(*Notes des éditeurs.*)

c'est-à-dire, qu'ils devront être égaux entre eux, et de $120°$ chacun. Ainsi, pour résoudre le problème, il suffira de construire, sur les deux distances mm' et mm'' prises pour cordes, et du côté de l'intérieur du triangle formé par les trois points m, m', m'', des arcs capables d'un angle de $120°$; l'intersection de ces deux arcs sera le point cherché M. (*)

2.° S'il y a quatre points donnés m, m', m'', m''', les quatre angles formés consécutivement autour du point M, par les droites z, z', z'', z''', menées de ce point aux points donnés, devront être respectivement égaux aux quatre angles extérieurs consécutifs d'un *Rhombe*. Ainsi, de ces quatre angles, les opposés devront être égaux, tandis que ceux qui auront un côté commun devront être supplémens l'un de l'autre. Le point cherché M se trouvera donc à l'intersection des deux diagonales du quadrilatère qui aurait les sommets de ses angles aux points donnés.

Nous n'étendrons pas plus loin ces applications, dont la difficulté s'accroît d'une manière notable, dès que les points donnés sont au nombre de plus de quatre.

Deuxième méthode.

Soient a, b, c, d,...., les distances consécutives du point cherché aux points donnés, en sorte qu'on doive avoir

$$(1) \qquad a+b+c+d+\ldots\ldots=\text{minimum}\ ;$$

soient, en outre,

$$A\,, \quad B\,, \quad C\,, \quad D\,,\ldots\ldots.$$

les angles formés respectivement par

$$a \text{ et } b\,, \quad b \text{ et } c\,, \quad c \text{ et } d\,, \quad d \text{ et } e\,,\ldots\ldots.$$

de manière qu'on ait

$$(2) \qquad A+B+C+D+\ldots\ldots\ldots=360°\ ;$$

(*) On peut, si l'on veut, ne décrire qu'un seul de ces arcs, et le point cherché sera déterminé par son intersection avec une droite menée du milieu du reste de la circonférence à celui des trois points donnés qui n'aura pas été employé.

(*Note des éditeurs.*)

soit, enfin, P l'aire du polygone dont les sommets des angles sont situés aux points donnés; on aura

$$(3)\qquad ab\text{Sin.}A+bc\text{Sin.}B+cd\text{Sin.}C+de\text{Sin.}D+\ldots\ldots=2P.$$

Si le polygone est absolument donné, il y aura nécessairement, entre les distances a, b, c, d,......, des relations indépendantes des angles A, B, C, D,.......: attendu que, deux de ces distances étant données, toutes les autres peuvent en être déduites. Néanmoins, si l'on suppose que ce n'est pas proprement le polygone, mais seulement son aire P, qui est donnée, il sera alors permis de considérer a, b, c, d,........, comme des variables absolument indépendantes, et on déduira de l'équation (3)

$$\left.\begin{array}{l}(a\text{Sin.}A+c\,\text{Sin.}B)\,.\,\delta b+ab\text{Cos.}A\,.\,\delta A\\+(b\text{Sin.}B+d\text{Sin.}C)\,.\,\delta c+bc\text{Cos.}B\,.\,\delta B\\+(c\text{Sin.}C+e\text{Sin.}D)\,.\,\delta d+cd\text{Cos.}C\,.\,\delta C\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=0\quad(4).$$

Mais l'équation (1) revient à

$$\delta a+\delta b+\delta c+\delta d+\ldots\ldots\ldots=0\;;\qquad(5)$$

et l'équation (2) donne

$$\delta A+\delta B+\delta C+\delta D+\ldots\ldots\ldots=0\;;\qquad(6)$$

ajoutant donc à l'équation (4) les produits des équations (5) et (6) par deux multiplicateurs indéterminés $-\lambda$ et $-\mu$, il viendra :

$$\left.\begin{array}{l}(a\text{Sin.}A+c\,\text{Sin.}B-\lambda)\,.\,\delta b+(ab\text{Cos.}A-\mu)\,.\,\delta A\\+(b\text{Sin.}B+d\text{Sin.}C-\lambda)\,.\,\delta c+(bc\text{Cos.}B-\mu)\,.\,\delta B\\+(c\,\text{Sin.}C+e\text{Sin.}D-\lambda)\,.\,\delta d+(cd\text{Cos.}C-\mu)\,.\,\delta C\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=0\;;$$

équation dans laquelle il sera permis de considérer les variations δa, δb, δc,....; δA, δB, δC,...., comme absolument indépendantes, et de laquelle on déduira conséquemment

$$a\text{Sin.}A+c\text{Sin.}B=\lambda\,,\quad b\text{Sin.}B+d\text{Sin.}C=\lambda\,,\quad c\text{Sin.}C+e\text{Sin.}D=\lambda\,,\ldots.$$

$$ab\text{Cos.}A=\mu\,,\qquad bc\text{Cos.}B=\mu\,.\qquad cd\text{Cos.}C=\mu\,,\ldots.$$

Si les points donnés sont au nombre de n, il y aura n équations dans chaque ligne ; on pourra donc tirer de celles de la première les valeurs des n distances a, b, c, d,...., lesquelles se trouveront toutes affectées du facteur λ, substituant ces valeurs dans les équations de la seconde ligne, et faisant, pour abréger, $\frac{\mu}{\lambda^2}=\mathrm{N}$, on aura, entre les n angles inconnues A, B, C, D,...., et la constante N, n équations qui donneront les valeurs de ces angles en fonction de N qu'on déterminera ensuite, en exprimant que les valeurs obtenues satisfont à l'équation (3).

On voit par là que, bien que nous ayons supposé que c'était seulement l'aire P du polygone qui était donnée, les valeurs des angles A, B, C, D,...., se trouvant délivrées de P, ainsi que des distances a, b, c, d,...., nos résultats seront aussi exacts que s'ils eussent été déduits d'une analise en apparence plus rigoureuse.

Appliquons successivement ce procédé au triangle et au quadrilatère. On a 1.° pour le triangle, les six équations

$$a\mathrm{Sin.A}+c\mathrm{Sin.B}=\lambda\,,\quad b\mathrm{Sin.B}+a\mathrm{Sin.C}=\lambda\,,\quad c\mathrm{Sin.C}+b\mathrm{Sin.A}=\lambda\,,\ldots$$
$$ab\mathrm{Cos.A}=\mu\,,\qquad bc\mathrm{Cos.B}=\mu\,,\qquad ca\mathrm{Cos.C}=\mu\,,\ldots$$

Divisant les trois dernières deux à deux, il viendra

$$a\mathrm{Cos.A}-c\mathrm{Cos.B}=0\,,$$
$$b\mathrm{Cos.B}-a\mathrm{Cos.C}=0\,,$$
$$c\mathrm{Cos.C}-b\mathrm{Cos.A}=0\,.$$

Comparant chacune de celles-ci à sa correspondante dans la première ligne, on en déduira ces doubles valeurs :

$$a=\frac{\lambda\mathrm{Cos.B}}{\mathrm{Sin.(A+B)}}\,,\qquad b=\frac{\lambda\mathrm{Cos.C}}{\mathrm{Sin.(B+C)}}\,,\qquad c=\frac{\lambda\mathrm{Cos.A}}{\mathrm{Sin.(C+A)}}\,;$$
$$a=\frac{\lambda\mathrm{Cos.B}}{\mathrm{Sin.(B+C)}}\,,\qquad b=\frac{\lambda\mathrm{Cos.C}}{\mathrm{Sin.(C+A)}}\,,\qquad c=\frac{\lambda\mathrm{Cos.A}}{\mathrm{Sin.(A+B)}}\,;$$

lesquelles, étant égalées entre elles, donneront

$$\mathrm{Sin.(A+B)}=\mathrm{Sin.(B+C)}=\mathrm{Sin.(C+A)}$$

d'où, à cause de $A+B+C=360°$, on conclura

$$A=B=C\ ,$$

comme ci-dessus.

2.° Pour le quadrilatère, on trouvera, en faisant absolument le même calcul,

$$a=\frac{\lambda\text{Cos.}B}{\text{Sin.}(A+B)}\,,\quad b=\frac{\lambda\text{Cos.}C}{\text{Sin.}(B+C)}\,,\quad c=\frac{\lambda\text{Cos.}D}{\text{Sin.}(C+D)}\,,\quad d=\frac{\lambda\text{Cos.}A}{\text{Sin.}(D+A)}\,;$$

$$a=\frac{\lambda\text{Cos.}C}{\text{Sin.}(C+D)}\,,\quad b=\frac{\lambda\text{Cos.}D}{\text{Sin.}(D+A)}\,,\quad c=\frac{\lambda\text{Cos.}A}{\text{Sin.}(A+B)}\,,\quad d=\frac{\lambda\text{Cos.}B}{\text{Sin.}(B+C)}\,;$$

d'où on conclura :

$$\text{Cos.}B\,\text{Sin.}(C+D)=\text{Cos.}C\,\text{Sin.}(A+B)\,,\qquad \text{Cos.}C\,\text{Sin.}(D+A)=\text{Cos.}D\,\text{Sin.}(B+C)\,,$$
$$\text{Cos.}D\,\text{Sin.}(A+B)=\text{Cos.}A\,\text{Sin.}(C+D)\,,\qquad \text{Cos.}A\,\text{Sin.}(B+C)=\text{Cos.}B\,\text{Sin.}(D+A)\,.$$

La condition

$$A+B+C+D=360°.$$

donne d'ailleurs

$$\text{Sin.}(C+D)=-\text{Sin.}(A+B)\,,\qquad \text{Sin.}(D+A)=-\text{Sin.}(B+C).$$

substituant donc, il viendra

$$\text{Cos.}B=-\text{Cos.}C,\ \text{Cos.}C=-\text{Cos.}D,\ \text{Cos.}D=-\text{Cos.}A,\ \text{Cos.}A=-\text{Cos.}B;$$

d'où

$$C=180°-B\,,\quad D=180°-C\,,\quad A=180°-D\,,\quad B=180°-A\,;$$

et encore

$$A=C\,,\qquad B=D\,;$$

mêmes relations que ci-dessus.