
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

TÉDENAT

Solution du problème proposé à la page 232 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 302-311

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__302_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1810-1811, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Solution du problème proposé à la page 232 de ce volume ;

Par M. TÉDENAT, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.



ÉNONCÉ. *Deux canaux rectilignes se coupent, sous une inclinaison déterminée, et une ville se trouve située, d'une manière connue, dans l'un des quatre angles formés par leur intersection.*

On veut établir deux ponts sur ces canaux, et construire une route de communication de ces deux ponts à la ville pour l'usage de laquelle ils sont destinés.

Il s'agit de déterminer en quels lieux il faut établir ces deux ponts, et de quelle manière on doit diriger les branches de la route, pour que la longueur totale de celle-ci soit la moindre possible.

Considérations préliminaires. L'énoncé du problème ne statuant en aucune manière sur la disposition des diverses parties de la route à construire ; il faut, pour le résoudre complètement, ne s'assujétir à aucune condition qui ne soit rigoureusement nécessaire pour parvenir au *minimum* auquel on veut atteindre.

Or, comme il n'y a que trois points à unir, il ne peut y avoir au plus que trois branches de route, lesquelles doivent être rectilignes, et dont celles qui se terminent aux ponts doivent être respectivement perpendiculaires aux directions des canaux ; et, puisque ces branches de route doivent lier entre eux les points où elles aboutissent d'une part, il faut que de l'autre elles concourent en un même point.

A la vérité, il pourrait bien se faire, du moins dans certain cas, qu'il fallût moins de trois branches de route, pour obtenir un *minimum* de longueur totale ; mais c'est ce que le calcul doit indiquer, de soi-même,

en donnant zéro pour la longueur de chacune des branches de route qui ne devront pas exister.

On voit, par ce qui précède, que tout se réduit à déterminer le point de concours des trois branches de route; les ponts devant se trouver aux extrémités des perpendiculaires abaissées de ce point sur les directions des deux canaux. Occupons-nous donc du problème suivant :

PROBLÈME. Un point étant donné de position entre les côtés d'un angle connu; déterminer, dans cet angle, un nouveau point dont la somme des distances à ses deux côtés et au point donné soit un minimum.

Soient BAC (fig. 3) l'angle donné, et O le point donné; il s'agit de déterminer dans cet angle un point Z tellement situé qu'en abaissant de ce point sur AB et AC les perpendiculaires ZN et ZM, et en joignant le même point au point donné, par la droite ZO, on ait $ZN + ZM + ZO = \text{minimum}$.

Solution. Soient pris le sommet A de l'angle donné pour origine des coordonnées rectangulaires, et le côté AC pour axe des x ; désignons par γ l'angle BAC, par a et b les coordonnées du point O, et par x et y celles du point Z; nous aurons alors

$$ZM = y, \quad ZN = x \sin \gamma - y \cos \gamma, \quad ZO = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2};$$

désignant donc par S la somme des trois distances ZN, ZM, ZO, nous aurons

$$S = x \sin \gamma + y(1 - \cos \gamma) + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}.$$

Les variables x et y de cette équation étant absolument indépendantes, il faudra, pour obtenir les conditions du *minimum*, égaler séparément à zéro $\frac{dS}{dx}$ et $\frac{dS}{dy}$, ce qui donnera

$$(G) \quad \begin{cases} \sin \gamma = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}}, \\ 1 - \cos \gamma = \frac{b-y}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}}; \end{cases}$$

et telles sont les équations qui devraient donner les valeurs particulières des coordonnées x et y du point Z qui répondent au *minimum*.

Mais il est facile de voir qu'en général ces deux équations ne peuvent subsister à la fois, attendu qu'on en peut déduire, entre les seules données du problème, une équation de relation qui peut fort bien ne pas se vérifier. Si, en effet, on prend la somme de leurs quarrés, on obtiendra, toutes réductions faites,

$$\text{Cos.}\gamma = \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad \gamma = 60^\circ.$$

Ainsi, si l'angle donné n'est pas de 60° , il n'y aura, à proprement parler, ni *maximum* ni *minimum*; c'est-à-dire, qu'en variant la position du point Z , la longueur S croîtra ou décroîtra continuellement et pourra acquérir toutes les valeurs possibles depuis l'infini positif jusqu'à l'infini négatif (*).

Si, au contraire, l'angle donné ASB est de 60° , les deux équations (G) étant alors équivalentes, on n'a, entre les coordonnées x et y du point Z , qu'une simple relation exprimée soit par l'une ou par l'autre de ces deux équations, soit par une équation résultant de leur combinaison; il y a donc, dans ce cas, une infinité de points qui résolvent le problème.

Cherchons le lieu géométrique de tous ces points; soient, pour cela, divisées l'une par l'autre les équations (G); on aura ainsi

$$\frac{b-y}{a-x} \quad \text{ou} \quad \frac{y-b}{x-a} = \frac{1-\text{Cos.}\gamma}{\text{Sin.}\gamma} = \frac{2\text{Sin.}^2\frac{1}{2}\gamma}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}\gamma\text{Cos.}\frac{1}{2}\gamma} = \text{Tang.}\frac{1}{2}\gamma;$$

c'est-à-dire,

$$y-b = (x-a)\text{Tang.}\frac{1}{2}\gamma;$$

telle est donc l'équation du lieu géométrique de tous les points qui résolvent alors le problème; et l'on voit que ce lieu n'est autre chose qu'une parallèle, menée par le point donné, à la droite qui divise l'angle donné en deux parties égales.

(*) Il n'en serait pas ainsi, si l'angle donné, au lieu d'être *rectiligne*, était *mixtiligne* ou *curviligne*. Le problème, envisagé sous ce point de vue, reste encore à résoudre.

(Note des éditeurs.)

Ainsi

Ainsi l'angle donné BAC (fig. 4) étant de 60° , et la droite AD le divisant en deux parties égales ; si, par le point donné O , on mène à AD une parallèle indéfinie OK ; en quelque lieu qu'on établisse le point Z sur cette parallèle, la somme des trois distances ZN , ZM , ZO , sera toujours la même et moindre que si le point Z était hors de cette direction.

Il faut pourtant observer que comme, hors des limites O et K , le *minimum* n'a plus lieu que eu égard au changement du signe de quelque-une des trois distances ZN , ZM , ZO , il est nécessaire que le point Z ne sorte pas de ces limites, si l'on veut, comme l'exige la question, que ce soit la somme de leurs valeurs *absolues* qui soit un *minimum*.

Si, analytiquement parlant, il ne peut y avoir de *minimum*, lorsque l'angle donné est différent de 60° ; c'est uniquement parce que l'analyse suppose que le point cherché peut être quelconque sur le plan de l'angle donné, et qu'elle est obligée de faire entrer en considération les changemens qu'entraînent, dans les signes des distances, leurs changemens de situation ; c'est parce qu'elle ne peut exprimer, ni que le point cherché ne doit point sortir de l'angle donné, ni que la somme des trois distances doit être prise indépendamment du signe qui peut affecter chacune d'elles. On conçoit en effet que, eu égard à ces limitations, cette somme ne peut plus décroître indéfiniment ; et comme, d'un autre côté, elle ne saurait être constante pour toutes les situations que peut prendre le point cherché sans sortir des limites qui lui sont assignées, elle doit alors être susceptible d'un *minimum*. Essayons de déterminer à quelle situation du point cherché il peut répondre.

Pour cela supposons d'abord que le point Z (fig. 3), au lieu d'être absolument indéterminé, soit assujéti, dans ses variations, à être constamment à une même distance connue $ZO = r$ du point donné, ou, ce qui revient au même, à être toujours sur la circonférence d'un cercle ayant le point O pour centre et r pour rayon ; la valeur générale de S deviendra alors

$$S = x \sin. \gamma + y (1 - \cos. \gamma) + r ;$$

et l'on aura en outre

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = r^2$$

les conditions du *minimum* seront donc

$$dx \sin.\gamma + dy(1 - \cos.\gamma) = 0 ;$$

$$(a-x)dx + (b-y)dy = 0 ;$$

équations entre lesquelles éliminant $\frac{dy}{dx}$, on se trouvera avoir, pour déterminer le point Z, les deux équations

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = r^2 , \quad b-y = (a-x) \text{Tang.} \frac{1}{2} \gamma .$$

Ainsi, le point Z se trouvera à l'intersection du cercle décrit du point O comme centre, avec r pour rayon, et de la parallèle menée, par son centre, à la droite qui divise l'angle donné en deux parties égales; le problème aura donc analytiquement deux solutions; mais la situation du point Z la plus voisine du sommet de l'angle donné sera la seule admissible, dans l'hypothèse que nous considérons ici.

Cherchons, dans cette hypothèse, ce que devient l'expression de S. Les deux équations qui doivent déterminer le point Z donnent, pour ce point

$$x = a - r \cos.\frac{1}{2}\gamma , \quad y = b - r \sin.\frac{1}{2}\gamma ;$$

d'un autre côté, la valeur de S peut être écrite ainsi :

$$S = r + 2x \sin.\frac{1}{2}\gamma \cos.\frac{1}{2}\gamma + 2y \sin.^2\frac{1}{2}\gamma ;$$

on aura donc, en substituant et réduisant,

$$S = 2 \sin.\frac{1}{2}\gamma (a \cos.\frac{1}{2}\gamma^2 + b \sin.\frac{1}{2}\gamma^2) + r(1 - 2 \sin.\gamma) .$$

Si actuellement nous supposons qu'on rende à r son indétermina-

tion primitive, nous remarquerons que, la première partie de la valeur de S étant constante, cette somme décroîtra dans le même sens que r ou en sens inverse, suivant que $1 - 2\sin.\gamma$ sera positif ou négatif, c'est-à-dire, suivant qu'on aura

$$\gamma < 60^\circ \quad \text{ou} \quad \gamma > 60^\circ.$$

Ainsi, suivant que l'angle donné sera *plus petit* ou *plus grand* que 60° , il y aura de l'avantage à *approcher* ou à *éloigner* le point cherché du point donné; d'où on peut déjà conclure que, lorsque l'angle donné est moindre que 60° , il faut que le point cherché se confonde avec le point donné, ce qui réduit la branche de route ZO à zéro, comme on le voit (fig. 5).

Mais il faudrait bien se garder de conclure de ce qui précède que, lorsque l'angle donné est plus grand que 60° , il faut que le point Z se confonde avec le point K (fig. 6) où AC est coupée par la parallèle menée du point O à la droite AD qui divise l'angle donné en deux parties égales. Tout ceci, en effet, est subordonné à la supposition que le point cherché doit être établi sur OK; et, s'il est vrai qu'il serait plus avantageux de le mettre en K qu'en tout autre point entre O et K, s'il est vrai aussi qu'il convienne mieux de le placer sur OK que hors de sa direction à une pareille distance de O; on conçoit qu'il pourrait bien y avoir, entre K et A, une situation du point cherché où le désavantage résultant de sa déviation de la direction OK se trouverait plus que compensé par une plus grande distance du point O. Pour lever cette difficulté, proposons-nous le problème suivant :

PROBLÈME. *Un point étant donné entre les côtés d'un angle connu; déterminer, sur l'un des côtés de cet angle, un nouveau point dont la somme des distances à l'autre côté et au point donné soit un minimum?*

Soit BAC (fig. 7) un angle donné, et O un point donné entre les côtés de cet angle, il s'agit de trouver, sur le côté AC, un point

Z tel qu'en le joignant au point O par la droite ZO et au côté AB par la perpendiculaire ZN, on ait $ZO+ZN=\text{minimum}$.

Solution. En adoptant les mêmes conventions et dénominations que ci-dessus, et faisant $S=ZO+ZN$, la valeur de S particulière à la question présente se déduira de sa valeur générale en y faisant $y=0$; on aura donc

$$S=x\text{Sin.}\gamma+\sqrt{(a-x)^2+b^2};$$

égalant ensuite $\frac{dS}{dx}$ à zéro, il viendra

$$\text{Sin.}\gamma=\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}};$$

d'où

$$a-x=b\text{Tang.}\gamma$$

équation qui, combinée avec l'équation $y=0$ qui convient au point Z, peut prendre cette forme

$$y+b=-\frac{1}{\text{Tang.}\gamma}(x-a);$$

le point Z n'est donc autre chose que l'intersection de AC avec une perpendiculaire abaissée sur AB d'un point dont les coordonnées sont a et $-b$.

On construira donc comme il suit; on abaissera du point O sur AC la perpendiculaire OE que l'on prolongera au-delà du point E d'une quantité $EF=EO$; abaissant alors du point F sur AB la perpendiculaire FN coupant AC en Z, on aura $ZO+ZN=\text{minimum}$, comme il est facile de s'en assurer par des considérations géométriques; de manière que le point Z sera le point cherché.

Toutes les fois donc (fig. 6) qu'on aura $\text{Ang.}OKC > \text{Ang.}NKA$ (et cela arrivera toujours lorsqu'on aura $\text{Ang.}BAC > 60^\circ$), le point cherché devra être situé entre K et A, et construit comme il vient d'être

expliqué (fig. 7.), en sorte que ZM sera zéro. Il y a cependant des exceptions que nous allons expliquer.

Soient toujours BAC (fig. 8) l'angle donné, et O le point donné, et soit mené AO ; si l'on a $\text{Ang.}BAC + \text{Ang.}OAC = 90^\circ$, la construction expliquée (fig. 7) fera tomber le point cherché en A ; de manière que les deux distances ZM et ZN s'évanouiront.

Si l'on a (fig. 8) $\text{Ang.}BAC + \text{Ang.}OAC > 90^\circ$, la construction expliquée (fig. 7) fera tomber le point cherché sur le prolongement de AC au-delà de A ; mais, comme alors la distance ZN deviendra négative, cette solution ne pourra être admise; il faudra donc, comme dans le cas précédent, laisser le point cherché en A .

Si cependant, dans ce cas, l'angle OAB est obtus (fig. 9), le point Z devra être établi à l'intersection de AC avec la perpendiculaire ON abaissée du point O sur le prolongement de AB au-delà de A . Alors, ZM seulement sera nul, et ZN tombera hors de l'angle BAC .

Résumons présentement les différens cas que nous venons d'analyser.

1.° Si l'angle BAC , formé par les deux canaux, est moindre que 60° (fig. 5), les deux ponts devront être les pieds M et N des perpendiculaires OM et ON abaissées de la ville sur leurs directions; ces perpendiculaires elles-mêmes seront les directions des routes qui devront unir la ville aux deux ponts, et dont la longueur totale sera

$$2(a\text{Cos. } \frac{1}{2}\gamma + b\text{Sin. } \frac{1}{2}\gamma)\text{Sin. } \frac{1}{2}\gamma.$$

2.° Si l'angle BAC , formé par les directions des deux canaux, est de 60° (fig. 4); en faisant passer par la ville une parallèle OK à la droite AD qui divise cet angle en deux parties égales, et prenant arbitrairement sur cette droite un point Z entre O et K , les ponts pourront être établis aux pieds M et N des perpendiculaires abaissées du point Z sur les directions des canaux, et ces perpendiculaires avec la droite ZO seront les directions des branches de route qui joindront la ville aux deux ponts. La longueur totale de la route à construire aura encore ici pour expression, comme dans le premier cas,

$$2(a\cos.\frac{1}{2}\gamma + b\sin.\frac{1}{2}\gamma)\sin.\frac{1}{2}\gamma ;$$

et, comme on pourra établir le point Z en O ou en K, on pourra rendre nulle l'une des deux branches de route ZO et ZM.

3.° L'angle BAC, formé par les directions des canaux, étant plus grand que 60° ; si la situation O de la ville est telle (fig. 8) que l'on ait $\text{Ang. BAC} + \text{Ang. OAC} < 90^\circ$ (*); il faudra (fig. 7) abaisser du point O sur AC la perpendiculaire OE que l'on prolongera d'une quantité $\text{EF} = \text{EO}$; abaissant alors du point F sur AB la perpendiculaire FN, coupant AC en Z, les ponts devront être établis en N et Z, et on communiquera de la ville à l'un et à l'autre, par les routes OZ et ZN, dont la longueur totale sera

$$a\sin.\gamma + b\cos.\gamma ;$$

de manière que ZM sera nulle.

4.° L'angle BAC étant toujours plus grand que 60° ; si la ville est tellement située (fig. 10) que l'angle BAO soit droit, il ne faudra qu'un pont unique, lequel devra être établi à l'intersection A des deux canaux, ou, si cela est impraticable, les deux ponts devront être établis le plus proche de A qu'il se pourra. ZM et ZN seront alors nuls, et la longueur de la route unique OA sera

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

5.° Enfin, si la ville est tellement située (fig. 9) que l'angle BAO soit obtus, en abaissant du point O sur le prolongement de AB la perpendiculaire ON, coupant AC en Z; les points Z et N seront ceux où il faudra établir les deux ponts; ZM sera alors nulle, et ZO et ZN ne formeront qu'une droite unique ON dont la longueur totale sera

(*) On suppose, dans ceci, que le côté AC de l'angle BAC est celui duquel le point O se trouve le plus voisin.

$$a\sin.\gamma - b\cos.\gamma.$$

Au surplus si, dans ce cas, on ne trouvait pas convenable d'établir un pont sur le prolongement du canal AB au-delà de A, on se conformerait alors à la solution du cas précédent (*).
