
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

**Analise. Exposé d'une méthode propre à faciliter l'élimination,
dans les équations des degrés supérieurs**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 321-332

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__321_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1810-1811, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE.

*Exposé d'une méthode propre à faciliter l'élimination,
dans les équations des degrés supérieurs ;*

Par M. KRAMP, professeur, doyen de la faculté des sciences
de l'académie de Strasbourg.



1. **E**N nous proposant l'équation générale du degré n , nous la présenterons, pour la commodité du calcul, sous la forme

$$(N) \quad \lambda y = a y^n + b y^{n-1} + c y^{n-2} + d y^{n-3} + \dots$$

Si on la multiplie, de part et d'autre, par λy , en mettant pour λy^n , dans le second membre de l'équation résultante, sa valeur donnée par l'équation même, elle deviendra

$$\lambda^2 y = (aa + \lambda b) y^{n-1} + (ab + \lambda c) y^{n-2} + (ac + \lambda d) y^{n-3} + \dots$$

équation que, pour abrégé, nous écrirons ainsi

$$\lambda^2 y = a' y^{n-1} + b' y^{n-2} + c' y^{n-3} + \dots$$

Multipliant encore de part et d'autre par λy , en mettant toujours pour λy^n , dans le second membre, la valeur donnée par la proposée, elle deviendra

$$\lambda^3 y = (aa' + \lambda b') y^{n-2} + (ba' + \lambda c') y^{n-3} + (ca' + \lambda d') y^{n-4} + \dots$$

En continuant de même, on parviendra à donner à toutes les puissances de y supérieures à y^{n-4} des formes polynomiales parfaitement

analogues à celle de cette dernière puissance ; et si , pour abrégé , on fait

$$\begin{aligned} \lambda y^n &= a y^{n-1} + b y^{n-2} + c y^{n-3} + \dots , \\ \lambda^2 y^{n+1} &= a' y^{n-1} + b' y^{n-2} + c' y^{n-3} + \dots , \\ \lambda^3 y^{n+2} &= a'' y^{n-1} + b'' y^{n-2} + c'' y^{n-3} + \dots , \\ &\dots ; \end{aligned}$$

on parviendra à trouver les valeurs littérales de tous ces coefficients au moyen de l'algorithme fort simple que voici :

$$\begin{aligned} \text{pour } y^{n+1} &\left\{ \begin{array}{l} a' = a\lambda + b , \\ b' = b\lambda + c , \\ c' = c\lambda + d , \\ \dots ; \end{array} \right. \\ \text{pour } y^{n+2} &\left\{ \begin{array}{l} a'' = a a' + \lambda b' , \\ b'' = b a' + \lambda c' , \\ c'' = c a' + \lambda d' , \\ \dots ; \end{array} \right. \\ \text{pour } y^{n+3} &\left\{ \begin{array}{l} a''' = a a'' + \lambda b'' , \\ b''' = b a'' + \lambda c'' , \\ c''' = c a'' + \lambda d'' , \\ \dots ; \end{array} \right. \\ \text{pour } y^{n+4} &\left\{ \begin{array}{l} a'''' = a a''' + \lambda b''' , \\ b'''' = b a''' + \lambda c''' , \\ c'''' = c a''' + \lambda d''' , \\ \dots . \end{array} \right. \end{aligned}$$

2. De ces séries on en peut déduire d'autres à l'aide desquelles chacun de ces coefficients pourra être immédiatement déduit de ceux

qui le précéderont dans la même série. On trouve d'abord, pour la série des coefficients $a', a'', a''' \dots$

$$\begin{aligned} a' &= aa + \lambda b, \\ a'' &= aa' + \lambda ba + \lambda^2 c, \\ a''' &= aa'' + \lambda ba' + \lambda^2 ca + \lambda^3 d, \\ a'''' &= aa''' + \lambda ba'' + \lambda^2 ca' + \lambda^3 da + \lambda^4 e, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

ainsi les coefficients a, a', a'', a''', \dots , forment une série récurrente dont l'échelle de relation est

$$a, \quad \lambda b, \quad \lambda^2 c, \quad \lambda^3 d, \quad \dots\dots;$$

de manière que la série indéfinie

$$a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \dots\dots$$

est le développement de la fraction suivante :

$$\frac{a + \lambda bx + \lambda^2 cx^2 + \lambda^3 dx^3 + \dots\dots\dots}{1 - ax - \lambda bx^2 - \lambda^2 cx^3 - \lambda^3 dx^4 - \dots\dots}$$

On trouvera de même, pour la série des coefficients b', b'', b''', \dots ,

$$\begin{aligned} b' &= ab + \lambda c, \\ b'' &= ab' + \lambda bb + \lambda^2 d, \\ b''' &= ab'' + \lambda bb' + \lambda^2 cb + \lambda^3 e, \\ b'''' &= ab''' + \lambda bb'' + \lambda^2 cb' + \lambda^3 db + \lambda^4 f, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

ainsi les coefficients b, b', b'', b''', \dots , forment une série récurrente dont l'échelle de relation est la même que ci-dessus ; en sorte que la série indéfinie

$$b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \dots\dots$$

est le développement de la fraction suivante :

$$\frac{b + \lambda cx + \lambda^2 dx^2 + \lambda^3 ex^3 + \dots\dots}{1 - ax - \lambda bx^2 - \lambda^2 cx^3 - \lambda^3 dx^4 - \dots\dots}$$

Les coefficients c', c'', c''', \dots , auront les valeurs littérales qui

suivent :

$$\begin{aligned} c' &= ac + \lambda d, \\ c'' &= ac' + \lambda bc + \lambda^2 e, \\ c''' &= ac'' + \lambda bc' + \lambda^2 cc + \lambda^3 f, \\ c'''' &= ac''' + \lambda bc'' + \lambda^2 cc' + \lambda^3 dc + \lambda^4 g, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

ces valeurs forment encore une série récurrente ayant même échelle de relation que les précédentes, en sorte que la série indéfinie

$$c + c'x + c''x^2 + c'''x^3 + \dots\dots$$

est le développement de la fraction

$$\frac{c + \lambda dx + \lambda^2 ex^2 + \lambda^3 fx^3 + \dots}{1 - ax - \lambda bx^2 - \lambda^2 cx^3 - \lambda^3 dx^4 - \dots};$$

et il en irait absolument de même pour les autres séries de valeurs $d, d', d'', d''', \dots; e, e', e'', e''', \dots; \dots$

3. Qu'on ait présentement, outre l'équation (N) du degré n , une autre équation (M), aussi en y , mais d'un autre degré quelconque m , supérieur à n ; en mettant dans cette dernière, pour

$$y, \quad y', \quad y'', \quad \dots, \quad y^{(m)}$$

les valeurs de ces puissances déduites de la première, par le procédé très-simple que nous venons d'exposer; elle ne sera plus que du degré $n-1$. On aura donc, à la place des proposées, deux équations des degrés n et $n-1$ qui, en leur appliquant le même procédé, en feront trouver une nouvelle du degré $n-2$; en poursuivant donc de la même manière, on parviendra enfin à une équation du degré zéro; ce sera l'équation de condition qui devra exister entre les coefficients des deux équations proposées, pour qu'elles puissent subsister ensemble (*); c'est-à-dire, pour qu'il y ait un facteur commun entre elles.

(*) Ce sera conséquemment l'équation finale, si les coefficients des deux proposées sont des fonctions d'une inconnue autre que y .

Sur quoi il est nécessaire d'observer que si, avant d'arriver à cette équation du degré *zéro*, on en rencontre une dont tous les coefficients soient *zéro*, celle qui la précédera sera facteur commun aux deux proposées, indépendamment de toute détermination de leurs coefficients.

4. La question se trouvant réduite, dès la première opération, ainsi qu'on vient de le voir, à éliminer l'inconnue *y* entre deux équations dont les degrés ne diffèrent seulement que d'une unité, nous allons examiner ce cas en particulier, et présenter, comme modèle, les deux équations

$$\begin{aligned} 0 &= Ay^n + By^{n-1} + Cy^{n-2} + Dy^{n-3} + Ey^{n-4} + \dots, \\ 0 &= ay^{n-1} + by^{n-2} + cy^{n-3} + dy^{n-4} + ey^{n-5} + \dots \end{aligned}$$

Appliquant la méthode précédente à ces deux équations, on en déduira une troisième du degré $n-2$; et, si l'on désigne cette dernière par

$$0 = a'y^{n-2} + b'y^{n-3} + c'y^{n-4} + d'y^{n-5} + \dots,$$

les expressions littérales des coefficients a', b', c', d', \dots , seront celles qui suivent :

$$\begin{aligned} a' &= b(Ab - Ba) - a(Ac - Ca), \\ b' &= c(Ab - Ba) - a(Ad - Da), \\ c' &= d(Ab - Ba) - a(Ae - Ea), \\ d' &= e(Ab - Ba) - a(Af - Fa), \\ &\dots \end{aligned}$$

EXEMPLE I. Déterminer le diviseur commun aux deux polynomes.

$$5y^3 - 2y^2 - 3y + 8, \quad 3y^2 - 7y + 2?$$

PREMIÈRE OPÉRATION.

$$\text{Équations données : } \begin{cases} 0 = 5y^3 - 2y^2 - 3y + 8, \\ 0 = 3y^2 - 7y + 2. \end{cases}$$

ELIMINATION.

$$\begin{aligned}
 A &= +5, & a &= +3, & Ab - Ba &= -29, & a' &= +146 = 2 \cdot 73; \\
 B &= -2, & b &= -7, & Ac - Ca &= +19, & b' &= +14 = 2 \cdot 7; \\
 C &= -3, & c &= +2; & Ad - Da &= -24; \\
 D &= +8;
 \end{aligned}$$

Troisième équation : $0 = 73y + 7$.

SECONDE OPÉRATION.

$$\text{Équations données : } \begin{cases} 0 = 3y^2 - 7y + 2, \\ 0 = 73y + 7. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 A &= +3, & a &= +73, & Ab - Ba &= +532, & a' &= 14382. \\
 B &= -7, & b &= +7; & Ac - Ca &= -146; \\
 C &= +2;
 \end{aligned}$$

Troisième équation : $0 = 14382$.

L'absurdité de cette dernière équation fait voir que les deux polynomes proposés n'ont point de facteur commun.

EXEMPLE II. Déterminer le facteur commun aux deux polynomes.

$$5y^5 - 27y^4 + 22y^3 + 17y^2 - 49y + 24, \quad 3y^4 - 22y^3 + 46y^2 - 31y + 6$$

PREMIÈRE OPÉRATION.

$$\text{Équations données : } \begin{cases} 0 = 5y^5 - 27y^4 + 22y^3 + 17y^2 - 49y + 24, \\ 0 = 3y^4 - 22y^3 + 46y^2 - 31y + 6. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 A &= +5, & a &= +3, & Ab - Ba &= -29, & a' &= +146 = 2 \cdot 73, \\
 B &= -27, & b &= -22, & Ac - Ca &= +164; & b' &= -716 = -2 \cdot 358, \\
 C &= +22, & c &= +46, & Ad - Da &= -206, & c' &= +368 = 2 \cdot 184, \\
 D &= +17, & d &= -31, & Ae - Ea &= +177, & d' &= -42 = 2 \cdot 21. \\
 E &= -49, & e &= +6; & Af - Fa &= -72; \\
 F &= +24;
 \end{aligned}$$

Troisième équation : $0 = 73y^3 - 358y^2 + 184y + 21$.

SECONDE OPÉRATION.

$$\text{Équations données: } \begin{cases} 0 = 3y^4 - 22y^3 + 46y^2 - 31y + 6, \\ 0 = 73y^3 - 358y^2 + 184y + 21. \end{cases}$$

$$A = +3, a = +73, Ab - Ba = +532, a' = +14382 = +14382.1,$$

$$B = -22, b = -358, Ac - Ca = -2806, b' = -71910 = -14382.5,$$

$$C = +46, c = +184, Ad - Da = +2326, c' = +43146 = -14382.3.$$

$$D = -31, d = +21; Ae - Ea = -438;$$

$$E = +6;$$

$$\text{Troisième équation: } 0 = y^2 - 5y + 3.$$

TROISIÈME OPÉRATION.

$$\text{Équations données: } \begin{cases} 0 = 73y^3 - 358y^2 + 184y + 21, \\ 0 = y^2 - 5y + 3. \end{cases}$$

$$A = +73, a = +1, Ab - Ba = -7, a' = 0,$$

$$B = -358, b = -5, Ac - Ca = +35, b' = 0.$$

$$C = +184, c = +3; Ad - Da = -21;$$

$$D = +21;$$

$$\text{Troisième équation: } 0 = 0.$$

Cette équation identique, $0 = 0$, nous apprend donc que $y^2 - 5y + 3$ est le diviseur commun des deux polynomes proposés.

5. La recherche du facteur commun le plus élevé, entre deux polynomes proposés, conduit à la détermination des *racines égales*. Dans mon *Arithmétique universelle* (page 268) j'ai démontré le théorème général qui suit: Si l'on désigne par X' le commun diviseur le plus élevé entre le polynome X et sa première dérivée DX ; par X'' le commun diviseur le plus élevé entre X' et sa première dérivée DX' ; par X''' le commun diviseur le plus élevé entre X'' et sa première dérivée DX'' , et ainsi de suite; le produit des facteurs simples de X sera $\frac{XX''}{X'^2}$; celui des facteurs doubles $\frac{X'X'''}{X'^2}$; celui des facteurs

triples $\frac{X''X''''}{X''^2}$; et ainsi des autres, de manière qu'on aura

$$X = \left(\frac{XX''}{X'^2}\right) \left(\frac{X'X''''}{X''^2}\right)^2 \left(\frac{X''X''''}{X''^2}\right)^3 \dots$$

Nous allons appliquer le théorème, aussi bien que la méthode, au polynome proposé dans l'endroit que nous venons de citer, et qu'il serait bien difficile de décomposer, en y employant les méthodes ordinaires.

EXEMPLE. On propose de déterminer si le polynome

$$X = y^9 + 2y^8 + y^7 + 6y^6 + 7y^5 - 2y^4 + 3y^3 + 2y^2 - 12y - 8$$

a des facteurs égaux; et, au cas qu'il en ait de tels, de les mettre en évidence ?

On a ici

$$DX = 9y^8 + 16y^7 + 7y^6 + 36y^5 + 35y^4 - 8y^3 + 9y^2 + 4y - 12;$$

ce qui donne lieu aux opérations suivantes :

PREMIÈRE OPÉRATION.

$$\text{Équations } \begin{cases} 0 = y^9 + 2y^8 + y^7 + 6y^6 + 7y^5 - 2y^4 + 3y^3 + 2y^2 - 12y - 8, \\ 0 = 9y^8 + 16y^7 + 7y^6 + 36y^5 + 35y^4 - 8y^3 + 9y^2 + 4y - 12. \end{cases}$$

$$A = +1, a = +9, Ab - Ba = -2, a' = -14 = -2 \cdot 7,$$

$$B = +2, b = +16, Ac - Ca = -2, b' = +148 = +2 \cdot 74,$$

$$C = +1, c = +7, Ad - Da = -18, c' = +180 = +2 \cdot 90,$$

$$D = +6, d = +36, Ae - Ea = -28, d' = -160 = -2 \cdot 80,$$

$$E = +7, e = +35, Af - Fa = +10, e' = +178 = +2 \cdot 89,$$

$$F = -2, f = -8, Ag - Ga = -18, f' = +108 = +2 \cdot 54,$$

$$G = +3, g = +9, Ah - Ha = -14, g' = -872 = -2 \cdot 436,$$

$$H = +2, h = +4, Ai - Ia = +96, h' = -624 = -2 \cdot 312.$$

$$I = -12, i = -12; Ak - Ka = +72;$$

$$K = -8;$$

SECONDE OPÉRATION.

$$\text{Équations} \begin{cases} 0 = 9y^8 + 16y^7 + 7y^6 + 36y^5 + 35y^4 - 8y^3 + 9y^2 + 4y - 12, \\ 0 = 7y^7 - 74y^6 - 90y^5 + 80y^4 - 89y^3 - 54y^2 + 436y + 312. \end{cases}$$

$$A = +9, \quad a = +7, \quad Ab - Ba = -778, \quad a' = +81.785,$$

$$B = +16, \quad b = -74, \quad Ac - Ca = -859, \quad b' = +81.824,$$

$$C = +7, \quad c = -90, \quad Ad - Da = +468, \quad c' = -81.678,$$

$$D = +36, \quad d = +80, \quad Ae - Ea = -1046, \quad d' = +81.892,$$

$$E = +35, \quad e = -89, \quad Af - Fa = -430, \quad e' = +81.185,$$

$$F = -8, \quad f = -54, \quad Ag - Ga = +3861, \quad f' = -81.4428,$$

$$G = +9, \quad g = +436, \quad Ah - Ha = +2780, \quad g' = -81.3004 :$$

$$H = +4, \quad h = +312; \quad Ai - Ia = +84;$$

$$I = -12;$$

TROISIÈME OPÉRATION.

$$\text{Équations} \begin{cases} 0 = 7y^7 - 74y^6 - 90y^5 + 80y^4 - 89y^3 - 54y^2 + 436y + 312, \\ 0 = 785y^6 + 824y^5 - 678y^4 + 892y^3 + 185y^2 - 4428y - 3004. \end{cases}$$

$$A = +7, \quad a = +785, \quad Ab - Ba = +63858, \quad a' = +9408.94,$$

$$B = -74, \quad b = +824, \quad Ac - Ca = +65904, \quad b' = +9408.117,$$

$$C = -90, \quad c = -678, \quad Ad - Da = -56556, \quad c' = +9408.117,$$

$$D = +80, \quad d = +892, \quad Ae - Ea = +71160, \quad d' = +9408.305,$$

$$E = -89, \quad e = +185, \quad Af - Fa = +11394, \quad e' = +9408.257,$$

$$F = -54, \quad f = -4428, \quad Ag - Ga = -363288, \quad f' = +9408.46.$$

$$G = +436, \quad g = -3004; \quad Ah - Ha = -244920;$$

$$H = +312;$$

QUATRIÈME OPÉRATION.

$$\text{Équations} \begin{cases} 0 = 785y^6 + 824y^5 - 678y^4 + 892y^3 + 185y^2 - 4428y - 3004, \\ 0 = 94y^5 + 117y^4 + 117y^3 + 305y^2 + 257y + 46. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A &= +785, & a &= +94, & Ab - Ba &= +14389, & a' &= +12940725 \cdot 1, \\
B &= +824, & b &= +117, & Ac - Ca &= +155577, & b' &= +12940725 \cdot 1, \\
C &= -678, & c &= +117, & Ad - Da &= +155577, & c' &= +12940725 \cdot 1, \\
D &= +892, & d &= +305, & Ae - Ea &= +184355, & d' &= +12940725 \cdot 3, \\
E &= +185, & e &= +257, & Af - Fa &= +452342, & e' &= +12940725 \cdot 2. \\
F &= -4428, & f &= +46; & Ag - Ga &= +282376; \\
G &= -3004;
\end{aligned}$$

CINQUIÈME OPÉRATION.

$$\begin{cases}
0 = 94y^5 + 1117y^4 + 1117y^3 + 305y^2 + 257y + 46, \\
0 = y^4 + y^3 + y^2 + 3y + 2.
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A &= +94, & a &= +1, & Ab - Ba &= -23, & a' &= 0, \\
B &= +117, & b &= +1, & Ac - Ca &= -23, & b' &= 0, \\
C &= +117, & c &= +1, & Ad - Da &= -23, & c' &= 0, \\
D &= +305, & d &= +3, & Ae - Ea &= -69, & d' &= 0. \\
E &= +257, & e &= +2; & Af - Fa &= -46; \\
F &= +46;
\end{aligned}$$

On aura donc, pour le commun diviseur le plus élevé entre le polynome proposé X et sa première dérivée DX

$$X' = y^4 + y^3 + y^2 + 3y + 2,$$

$$\text{d'où} \quad DX' = 4y^3 + 3y^2 + 2y + 3;$$

ce qui donnera lieu aux opérations suivantes:

PREMIÈRE OPÉRATION.

$$\begin{cases}
0 = y^4 + y^3 + y^2 + 3y + 2, \\
0 = 4y^3 + 3y^2 + 2y + 3.
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A &= +1, & a &= +4, & Ab - Ba &= -1, & a' &= +5, \\
B &= +1, & b &= +3, & Ac - Ca &= -2, & b' &= +34, \\
C &= +1, & c &= +2, & Ad - Da &= -9, & c' &= +29. \\
D &= +3, & d &= +3; & Ae - Ea &= -8; \\
E &= +2;
\end{aligned}$$

SECONDE OPÉRATION.

$$\text{Équations } \begin{cases} 0 = 4y^3 + 3y^2 + 2y + 3, \\ 0 = 5y^2 + 34y + 29. \end{cases}$$

$$A = +4, a = +5, Ab - Ba = +121, a' = +3584.1,$$

$$B = +3, b = +34, Ac - Ca = +106, b' = +3584.1.$$

$$C = +2, c = +29; Ad - Da = -15;$$

$$D = +3;$$

TROISIÈME OPÉRATION.

$$\text{Équations } \begin{cases} 0 = 5y^2 + 34y + 29, \\ 0 = y + 1. \end{cases}$$

$$A = +5, a = +1, Ab - Ba = -29, a' = 0.$$

$$B = +34, b = +1; Ac - Ca = -29;$$

$$C = +29;$$

On aura donc

$$X'' = y + 1,$$

d'où

$$DX'' = 1;$$

le diviseur commun le plus élevé entre ces deux fonctions étant $X''' = 1$,
d'où $DX''' = 0$ et $X'''' = 1$, l'opération se termine ici.

Ayant donc

$$X = y^9 + 2y^8 + y^7 + 6y^6 + 7y^5 - 2y^4 + 3y^3 + 2y^2 - 12y - 8,$$

$$X' = y^4 + y^3 + y^2 + 3y + 2,$$

$$X'' = y + 1,$$

$$X''' = 1,$$

$$X'''' = 1;$$

on aura

$$\frac{XX''}{X'^2} = \frac{(y^9 + 2y^8 + y^7 + 6y^6 + 7y^5 + 2y^4 + 3y^3 + 2y^2 - 12y - 8)(y + 1)}{(y^4 + y^3 + y^2 + 3y + 2)^2} = y^2 + y - 2,$$

QUESTIONS

$$\frac{X'X'''}{X''^2} = \frac{y^4 + y^3 + y^2 + 3y + 2}{(y+1)^2} = y^2 - y + 2 ,$$

$$\frac{X''X'''}{X'''^2} = \frac{y+1}{1^2} = y+1 ;$$

en conséquence, le polynome proposé équivaudra à

$$(y^2 + y - 2)(y^2 - y + 2)^2(y+1)^3.$$
