ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 343-348

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__343_0>

Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume ;

Par les Rédacteurs des *Annales*.

Il y a plus de dix ans que ce difficile problème s'est offert, pour la première fois, aux rédacteurs de ce recueil ; mais, bien qu'ils l'aient attaqué un grand nombre de fois, ils n'ont pu, pendant long-temps, parvenir à le résoudre, ni même à s'assurer s'il était résoluble par la ligne droite et le cercle. Aussi n'auraient-ils pas songé à le proposer dans les *Annales*, s'ils n'y avaient été invités par un de leurs abonnés.

Ils avaient lieu de penser que le géomètre qui les avait sollicité à appeler sur ce problème l'attention de leurs lecteurs, se chargerait lui-même de le résoudre, au cas qu'il n'en vînt aucune solution d'autre part ; mais ayant long-temps et vainement attendu, ils ont cru devoir faire encore de nouvelles tentatives ; et, plus heureux cette fois que les précédentes ; ils sont parvenus, sinon à trouver une construction du problème, du moins à l'abaisser au premier degré, et à réduire sa résolution arithmétique à un calcul assez simple. Voici par quels moyens ils sont parvenus à leur but.

Problème. A un triangle donné quelconque inscrire trois cercles de manière que chacun d'eux touche les deux autres et deux côtés du triangle ?

Solution. Soient désignés par p, p', p'', (fig. 7) les sommets du triangle donné ; par c, c', c'', les côtés respectivement opposés ; par o, o', o'', les centres respectifs de ceux des cercles cherchés qui ne doivent pas toucher ces côtés ; par r, r', r'', les rayons respectifs de ces cercles, et soient adoptées les abréviations suivantes :

$$\begin{array}{llll} & s-c=\rho\,, & & c'c''\rho=sd^2\,, \\ c+c'+c''=2s\,, & s-c=\rho'\,, & \mathrm{R}^2s=\rho\rho'\rho''\,, & cc''\rho'=sd'^2\,, \\ & s-c''=\rho''\,, & & cc'\rho''=sd''^2\,; \end{array}$$

alors R sera le rayon du cercle inscrit ; d, d', d'', seront les distances respectives de son centre aux points p, p', p'', et ρ, ρ', ρ'', seront les distances respectives des mêmes points aux points de contact de ce cercle avec les côtés du triangle ou, ce qui revient au même, les rayons des cercles qui, ayant pour centres les points p, p', p'', se toucheraient deux à deux. On déduira d'ailleurs facilement des équations ci-dessus les relations suivantes :

$$\begin{array}{cccc} & \rho'\rho''d^2=\mathrm{R}^2c'c'' , & & \rho\, d'd''=\mathrm{R}c\,d , \\ \rho+\rho'+\rho''=s , & \rho\,\rho''d'^2=\mathrm{R}^2c\,c'' , & \mathrm{R}cc'c''=sdd'd'' , & \rho'\,d\,d''=\mathrm{R}c'\,d' , \\ & \rho\,\rho'\,d''^2=\mathrm{R}^2c\,c' , & & \rho''d\,d'=\mathrm{R}c''d'' . \end{array}$$

Cela posé : soient abaissées de o et o' sur c'' les perpendiculaires $om=r$, $o'm'=r'$; soit joint oo', et, par o soit menée à c'' une parallèle se terminant en l à $o'm'$, le triangle olo', rectangle en l, donne

$$ol=c''-pm-p'm'=\sqrt{(r'+r)^2-(r'-r)^2}=2\sqrt{rr'} ;$$

mais on a

$$pm=r\mathrm{Cot.}\tfrac{1}{2}p=r\sqrt{\frac{\rho s}{\rho'\rho''}}=\frac{\rho}{\mathrm{R}}r , \quad p'm'=r'\mathrm{Cot.}\tfrac{1}{2}p'=r\sqrt{\frac{\rho' s}{\rho\rho''}}=\frac{\rho'}{\mathrm{R}}r' ;$$

substituant donc, il viendra

$$c''-\frac{\rho}{\mathrm{R}}r-\frac{\rho'}{\mathrm{R}}r'=2\sqrt{rr'} ;$$

chassant les dénominateurs, transposant et formant les équations analogues, il viendra enfin

$$\begin{aligned} \rho r+2\mathrm{R}\sqrt{r.r'}+\rho' r' &=\mathrm{R}c'' , \\ \rho r+2\mathrm{R}\sqrt{r\,r''}+\rho'' r'' &=\mathrm{R}c' , \\ \rho' r'+2\mathrm{R}\sqrt{r'r''}+\rho'' r'' &=\mathrm{R}c ; \end{aligned}$$

ce sont là les équations du problème.

Si l'on pose $\qquad r'=rx'^2 , \qquad r''=rx''^2 ,$

ces trois équations deviendront

$$r(\rho\ +2Rx'\ +\rho' x'^2)=Rc'' ,$$
$$r(\rho\ +2Rx''\ +\rho'' x''^2)=Rc' ,$$
$$r(\rho' x'^2+2Rx'x''+\rho'' x''^2)=Rc ;$$

la dernière donne $\quad r=\dfrac{Rc}{\rho' x'^2+2Rx'x''+\rho'' x''^2}$;

substituant cette valeur dans les deux premières, et chassant les dénominateurs, elles deviendront

$$(\mathrm{A}')\qquad c(\rho+2Rx'+\rho' x'^2)=c''(\rho' x'^2+2Rx'x''+\rho'' x''^2) ,$$
$$(\mathrm{A}'')\qquad c(\rho+2Rx''+\rho'' x''^2)=c'(\rho' x'^2+2Rx'x''+\rho'' x''^2) ;$$

il n'est donc plus question que de tirer de ces deux équations les valeurs de x', x'', pour les substituer dans celle de r.

Si on multiplie l'équation (A′) par $\dfrac{c'\rho\rho''}{s}$, et l'équation (A″) par $\dfrac{c''\rho\rho'}{s}$; en les développant toutes deux, mettant pour $\rho\rho'\rho''$ sa valeur R^2s et remarquant qu'on a

$$s(c-c'')=c(s-c'')-c''(s-c)=c\rho''-c''\rho ,$$
$$s(c-c')=c(s-c')-c'(s-c)=c\rho'-c'\rho ,$$
$$\frac{c'c''\rho}{s}=d^2 ,\qquad \frac{cc''\rho'}{s}=d'^2 ,\qquad \frac{cc'\rho''}{s}=d''^2 ,$$

elles deviendront

$$\{d(Rx'+\rho'' x'')\}^2-\{d''(Rx'+\rho)\}^2=0 ,$$
$$\{d(Rx''+\rho' x')\}^2-\{d'(Rx''+\rho)\}^2=0 ,$$

et pourront alors être mises sous cette forme

$$\{d(Rx'+\rho'' x'')+d''(Rx'+\rho)\}\{d(Rx'+\rho'' x'')-d''(Rx'+\rho)\}=0 ,$$
$$\{d(Rx''+\rho' x')+d'(Rx''+\rho)\}\{d(Rx''+\rho' x')-d'(Rx''+\rho)\}=0 .$$

En combinant, de toutes les manières possibles, un facteur de la première avec un facteur de la seconde, on obtiendra quatre solutions du problème. On peut remarquer, au surplus, que la différence entre les premiers et les seconds facteurs porte uniquement sur les signes de d' et d''.

Si l'on demande que les cercles cherchés se touchent extérieurement et soient tous trois intérieurs au triangle donné, on pourra lever l'incertitude sur le choix des facteurs, par la considération d'un cas particulier extrêmement simple : c'est celui où les angles p', p'' sont tous deux droits ; on a alors $\mathrm{R}=\rho'=\rho''=\frac{1}{2}c$, $d'=d''=\frac{1}{2}c\sqrt{2}$, $\rho=d=\infty$ et $x'=x''$; en conséquence, les deux équations deviennent également

$$(2x'+\sqrt{2})(2x'-\sqrt{2})=0\ ;$$

et comme, dans ce cas, on doit avoir évidemment $x'=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, il en résulte que ce sont alors les seconds facteurs qu'il faut prendre.

Rejetant donc les premiers facteurs, on aura, pour déterminer x', x'', les deux équations

$$d(\mathrm{R}x'+\rho''x'')=d''(\mathrm{R}x'+\rho)\ ,$$
$$d(\mathrm{R}x''+\rho'x')=d'(\mathrm{R}x''+\rho)\ ,$$

lesquelles donnent

$$x'=\rho.\frac{d''(d-d')\mathrm{R}-\rho''dd'}{(d-d')(d-d'')\mathrm{R}^2-\rho'\rho''d^2}=\frac{\rho}{\mathrm{R}}.d''.\frac{c''-(d-d')}{c'c''-(d-d')(d-d'')}\ ,$$
$$x''=\rho.\frac{d'(d-d'')\mathrm{R}-\rho'dd''}{(d-d')(d-d'')\mathrm{R}^2-\rho'\rho''d^2}=\frac{\rho}{\mathrm{R}}.d'.\frac{c'-(d-d'')}{c'c''-(d-d')(d-d'')}\ ;$$

de là, en se rappelant qu'on a

$$\rho\rho'd''^2=\mathrm{R}^2cc'\ ,\qquad \rho\rho''d'^2=\mathrm{R}^2cc''\ ,\qquad \rho d'd''=\mathrm{R}cd\ ,$$

on conclura

$$\rho'x'^2=\rho c.\frac{c'\{c''-(d-d')\}^2}{\{c'c''-(d-d')(d-d'')\}^2}\ ,$$
$$2\mathrm{R}x'x''=\rho c.\frac{2d\{c''-(d-d')\}\{c'-(d-d'')\}}{\{c'c''-(d-d')(d-d'')\}^2}\ ,$$
$$\rho''x''^2=\rho c.\frac{c''\{c'-(d-d'')\}^2}{\{c'c''-(d-d')(d-d'')\}^2}\ ;$$

substituant enfin dans la valeur trouvée précédemment pour r, il viendra

$$r=\frac{\mathrm{R}}{\rho}.\frac{\{c'c''-(d-d')(d-d'')\}^2}{c'\{c''-(d-d')\}^2+2d\{c''-(d-d')\}\{c'-(d-d'')\}+c''\{c'-(d-d'')\}^2}\ .$$

Les rédacteurs des *Annales* en étaient parvenus à ce point, et ils ne pensaient pas que cette dernière formule fût susceptible de beaucoup de réduction, lorsqu'ils reçurent de M. BIDONE, professeur à l'académie de Turin, la lettre suivante :

Turin, le 12 *mars* 1811.

Messieurs,

Par la note que vous avez placée au bas de la table sommaire du n.° IX de votre précieux recueil, on voit que vous n'aviez reçu, jusqu'alors, aucune solution du dernier des deux problèmes proposés dans le n.° VI. Je prends la liberté, Messieurs, de vous annoncer que ce problème a été résolu par M. MALFATTI*, géomètre italien très-distingué. Sa solution est imprimée dans la I.re partie du tome X des* Mémoires de la société italienne des sciences*, publié en* 1803. *Cependant, comme il est très-utile de rendre familières de semblables questions, et de connaître les procédés les plus simples, parmi ceux qui sont propres à les résoudre, je me permets de joindre ici la construction de M.* Malfatti*, afin que vous puissiez la comparer avec celles qui vous parviendront. Ce géomètre l'a déduite de formules qui paraissent assez simples, eu égard à la nature du problème. Je les supprime ici, pour ne pas dépasser les bornes d'une lettre.*

Je saisis avec empressement, Messieurs, l'occasion favorable que m'offre cette circonstance, pour vous renouveler, etc.

Voici à quoi se réduit la construction de M. *Malfatti* :

Soit $pp'p''$ (fig. 8) le triangle donné; soit c le centre du cercle inscrit et soient menées cp, cp', cp'', dont la première coupe le cercle inscrit en a ; et soient t, t', les points de contact de ce cercle avec $p''p'$, $p''p$.

Cela posé, soit prolongé pp' indéfiniment au de-là de p' ; soit portée sur son prolongement $p''t$ ou $p''t'$ de p' en b et pa de b en d ; de pd soient retranchées $de=cp''$ et $ef=cp'$; soit élevée à pf, par son milieu, une perpendiculaire coupant cp en o et pp' en m ; alors o sera le centre de celui des trois cercles cherchés qui doit être inscrit à l'angle p, et om en sera le rayon. On déterminera ensuite les deux autres cercles par des constructions semblables.

L'extrême simplicité de cette construction, contraste d'une manière frappante avec la complication du problème, et montre toute l'influence que peut exercer le choix des données. Elle donne pour le rayon r l'expression suivante :

$$r=\frac{\mathrm{R}}{2p}(s+d-\mathrm{R}-d'-d'').$$

Cette expression est nécessairement équivalente à celle qui a été donnée plus haut, et cependant il ne paraît pas facile de ramener l'une à l'autre. La difficulté tient à ce que, parmi le grand nombre des relations qui existent entre les données, on n'aperçoit pas facilement quelles sont celles qui peuvent le mieux opérer la transformation.

Le problème pourrait être énoncé de cette manière générale : *Trois droites indéfinies étant tracées sur un même plan, décrire sur ce plan trois cercles de manière que chacun d'eux touche les deux autres et deux des droites données* ; considéré sous ce point de vue, il peut admettre jusqu'à 32 solutions.

Pour s'en convaincre, on peut remarquer que ce problème n'est qu'un renversement de celui-ci : *Trois cercles se touchant deux à deux sur un plan, décrire sur ce plan trois droites telles que chacune d'elles touche deux des cercles donnés*; et il n'est pas difficile de voir que le premier problème doit admettre autant de cas que celui-ci.

Or, lorsque trois cercles se touchent deux à deux, ou ils se touchent tous extérieurement (fig. 9), ou bien, deux d'entre eux se touchant extérieurement, le troisième les enveloppe tous deux (fig. 10), ou enfin, deux d'entre eux se touchant extérieurement, le troisième touche l'un d'eux extérieurement et enveloppe l'autre (fig. 11). Nous ne parlons pas du cas où (fig. 12) le cercle moyen, enveloppant le plus petit, serait lui-même enveloppé par le plus grand, attendu qu'alors les tangentes communes aux cercles pris deux à deux, se confondraient en une droite unique.

Observons encore que, pour deux cercles qui se touchent extérieurement (fig. 13), il existe trois tangentes communes, tandis qu'il n'en existe qu'une seule (fig. 14) lorsque l'un des cercles est intérieur à l'autre.

D'après ces diverses observations, il est aisé de voir que, pour la figure 9, il peut exister 27 systèmes distincts de trois droites touchant les cercles deux à deux; qu'il en existe 3 pour la figure 10; et qu'enfin il en existe 2 seulement pour la figure 11; ce qui fait en tout $27+3+2$ ou 32, comme nous l'avions annoncé.