ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Solutions purement géométriques des problèmes de minimis proposés aux pages 196, 232 et 292 de ce volume, et de divers autres problèmes analogues

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 375-384
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__375_1>

Solutions purement géométriques des problèmes de minimis proposés aux pages 196, 232 et 292 de ce volume, et de divers autres problèmes analogues ;

Par un Abonné. Gergonne.

Mon dessein n'étant pas ici de discuter les diverses circonstances qui peuvent modifier la solution des problèmes que je me propose d'enseigner à construire, et même les rendre impossibles, je supposerai constamment, dans tout ce qui va suivre, que les données sont choisies de manière à ce que ces problèmes puissent être résolus, et puissent fournir toutes les solutions que leur nature comporte. Au surplus, les constructions que je vais indiquer étant fort simples, il sera facile, pour tout lecteur intelligent, de suppléer à ce que, dans la vue d'abréger, j'aurai volontairement omis.

J'avertis, une fois pour toute, que tous les points, droites et cercles dont il va être question, sont constamment supposés appartenir à un même plan.

Pour parvenir plus facilement à mon but, je vais d'abord rappeler et démontrer brièvement deux propositions connues.

1. *LEMME I. Le point d'une droite donnée dont la somme des*

distances à deux points donnés, d'un même côté de cette droite, est la plus petite, est celui duquel menant des droites aux deux points donnés, ces droites font, de différens côtés, des angles égaux avec la droite donnée.

Démonstration. Soient (fig. 9) AB la droite et P, Q les deux points donnés; soit M le point de AB dont la somme MP+MQ des distances aux deux points donnés soit la plus petite. Soit abaissée sur AB, de l'un quelconque P des points donnés, une perpendiculaire PC; soit prolongée cette perpendiculaire au-de là de AB d'une quantité CP′=CP.

Comme, par la construction, MP′=MP, il s'ensuit que MP+MQ=MP′+MQ; la première de ces deux sommes ne peut donc être un *minimum*, comme on le suppose, sans que la dernière le soit aussi; ce qui exige que le point M soit en ligne droite avec les points P′ et Q; or de là résulte l'égalité des angles P′MA et QMB, et par suite celle des angles PMA et QMB.

2. *Remarque.* Il est aisé de voir que, quelle que soit la situation des points P, Q, d'un même côté de la droite indéfinie, AB, il y aura toujours, sur cette droite, un point M qui jouira de la propriété qui vient d'être exposée.

3. *LEMME II. Si, sur une circonférence donnée, il y a un point duquel menant des droites à deux points donnés hors de cette circonférence, ces droites, sans couper le cercle, fassent des angles égaux avec le rayon mené au même point; ce point sera celui de la circonférence dont la somme des distances aux deux points donnés sera la plus petite.*

Démonstration. Soient (fig. 10) ANMB la circonférence donnée, et P, Q, les deux points donnés; soit M le point de cette circonférence par lequel menant MP, MQ, et la tangente EF, on ait Ang.PME =Ang.QMF. Soit joint un autre point N de la circonférence aux points P, Q, par les droites NP, NQ; soit D le point où l'une quelconque NQ de ces droites est coupée par la tangente EF; et soit menée DP.

Comme, par l'hypothèse et la construction, les angles PME et QMF

QMF sont égaux, on doit avoir

$$(1)\quad MP+MQ<DP+DQ\,;$$

$$DP+DQ<NP+NQ\,;$$

donc

$$MP+MQ<NP+NQ\,.$$

4. *Remarque.* Il est aisé de voir que l'existence du point M est subordonnée à la condition que, parmi toutes les tangentes au cercle, il y en ait qui soient comprises entre la circonférence et les points P, Q; condition qui revient à celle-ci, qu'il y ait des points sur la circonférence que l'on puisse, sans couper le cercle, joindre par des droites aux points P, Q.

5. *PROBLÈME I. Déterminer un point dont la somme des distances à trois points donnés soit la moindre possible.*

Analise. Soient (fig. 11) A, B, C, les trois points donnés, et M le point cherché. De l'un quelconque C des points donnés, pris pour centre, et avec sa distance au point M pour rayon, soit décrit l'arc DME.

Si l'on connaissait déjà la distance CM, la question serait réduite à déterminer sur l'arc DME, un point M dont la somme MA+MB des distances aux points A, B, fût la moindre possible; ce qui exigerait (3) que les angles CMA, CMB, fussent égaux.

Chacune des droites MA, MB, MC doit donc faire avec les deux autres des angles égaux (*); les trois angles autour du point M doivent donc être égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit; ce qui donne lieu à la construction suivante:

Construction. Sur la distance entre deux quelconques A, B, des points donnés, prise pour corde, (fig. 12) soit décrit, du côté

(*) On peut encore parvenir à cette conclusion comme il suit: supposons que l'on connaisse déjà la somme MA+MB des distances du point M aux points A et B; ce point M devra être un de ceux du périmètre d'une ellipse ayant A et B, pour ses du troisième C, un arc AMB, capable de 120° (*); en joignant ce troisième point au milieu D du reste de la circonférence, par une droite CMD; l'intersection M de cette droite avec l'arc AMB sera le point cherché.

6. *PROBLÈME II. Déterminer un point dont la somme des distances à deux points et à une droite donnés soit la moindre possible* (**) ?

Analise. Soient (fig. 13) A, B, les deux points et EF la droite donnés; soit M le point cherché; soient joints MA, MB, et soit abaissée sur EF la perpendiculaire MC.

Si les angles formés autour du point M, par les droites menées de ce point aux trois points A, B, C, n'étaient pas égaux, il pourrait y avoir (5) un autre point M′ pour lequel cette condition serait satisfaite, et alors, en abaissant de ce point une perpendiculaire M′C′ sur EF, on aurait

$$M'A+M'B+M'C'<M'A+M'B+M'C\ ,$$

$$(5)\qquad M'A+M'B+M'C<MA+MB+MC\ ;$$

d'où $$M'A+M'B+M'C'<MA+MB+MC\ ,$$

contrairement à l'hypothèse. On déterminera donc le point M par la construction suivante :

Construction. Sur la distance entre les deux points A, B, prise pour corde (fig. 14) soit décrit, du côté de EF, un arc AMB capable de 120°; l'intersection M de cet arc avec la perpendiculaire DMC abaissée sur EF du milieu D du reste de la circonférence, sera le point cherché.

---

foyers et MA+MB pour son grand axe, il ne s'agira plus conséquemment que de prendre pour le point M le point de ce périmètre le plus voisin de C; CM devra donc être une normale à l'ellipse et devra conséquemment faire des angles égaux avec les rayons vecteurs MA et MB.

(*) On doit remarquer que l'arc capable de 120° est très-facile à construire de plusieurs manières différentes.

(**) C'est le premier des deux problèmes proposés à la page 292.

7. *PROBLÈME III. Déterminer un point dont la somme des distances à un point et à deux droites donnés soit la moindre possible* (*) ?

Analise et construction. Soient (fig. 15) SE, SF, les deux droites et C le point donné; soit M le point cherché; soit joint MC et soient abaissées sur SE et SF les perpendiculaires MA et MB.

Par un raisonnement analogue à celui qui a été employé dans le problème précédent, il est facile de se convaincre que la somme des droites MA, MB, MC, ne peut être un *minimum* à moins que les angles formés par ces droites, autour du point M, ne soient égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.

Or, comme l'angle AMB se trouve déterminé à être le supplément de l'angle S, il s'ensuit que le problème sera impossible, si cet angle S n'est pas de 60°.

Si au contraire l'angle S se trouve être de 60°, le problème demeurera indéterminé, et on pourra prendre pour M l'un quelconque des points de la parallèle conduite par C à la droite qui divise l'angle S en deux parties égales.

8. *PROBLÈME IV. Déterminer un point dont la somme des distances à trois droites données soit la moindre possible ?*

Analise et construction. Soient (fig. 16) EF, FD, DE, les droites données; M le point cherché, et MA, MB, MC les perpendiculaires abaissées de ce point sur ces trois droites.

On prouvera encore facilement ici, comme ci-dessus, que, pour que la somme de ces perpendiculaires soit un *minimum*, il faut que les angles qu'elles forment autour du point M soient égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit.

Or, comme ces angles sont déterminés à être respectivement les supplémens des angles D, E, F; il s'ensuit que si ces derniers ne sont pas tous de 60°; c'est-à-dire, en d'autres termes, que si le triangle DEF n'est point équilatéral, le problème ne pourra être résolu.

(*) C'est le premier des deux problèmes proposés à la page 232.

Si au contraire le triangle DEF est équilatéral, le problème demeurera indéterminé, de manière que tous les points du plan de ce triangle pourront être pris pour le point cherché.

De là résulte ce théorème connu : *la somme des perpendiculaires abaissées sur les directions des côtés d'un triangle équilatéral, d'un point quelconque de son plan, est une quantité constante et égale à la hauteur du triangle.*

9. *PROBLÈME V. Déterminer un point dont la somme des distances à deux points et à une circonférence donnés soit la moindre possible* (*) ?

Solution. La somme des distances d'un point à deux points donnés et à la circonférence d'un cercle donné ne différant de la somme des distances du même point aux deux mêmes points et au centre du cercle, que par le rayon de ce cercle qui est une quantité constante ; l'une de ces sommes ne peut être un *minimum* à moins que l'autre n'en soit un aussi. On construira donc ce problème comme le *Problème I*, en substituant au troisième point donné le centre du cercle donné.

10. *PROBLÈME VI. Déterminer un point dont la somme des distances à un point, à une droite et à une circonférence donnés soit la moindre possible* (**) ?

Solution. Pour des raisons semblables à celles qui viennent d'être développées ci-dessus, on construira ce problème comme le *Problème II*, en substituant à l'un des deux points donnés le centre du cercle donné.

11. *PROBLÈME VII. Déterminer un point dont la somme des distances à deux droites et à une circonférence données soit la moindre possible ?*

Solution. Il est aisé de voir que ce problème présente des circonstances analogues à celles qu'offre le *Problème III*; c'est-à-dire que, si l'angle des droites données n'est pas de 60°, le problème sera impossible; et que, dans le cas contraire, on pourra prendre pour

(*) Ceci répond, pour un cas particulier, à la 1.re note de la page 292.

(**) Ceci répond, pour un cas particulier, à la note de la page 232.

le point cherché l'un quelconque des points de la parallèle menée, par le centre du cercle donné, à la droite qui divise en deux parties égales l'angle des droites données.

12. *PROBLÈME VIII. Déterminer un point dont la somme des distances à un point et à deux circonférences donnés soit la moindre possible* (*) ?

Solution. On construira ce problème comme le *Problème I*, en substituant à deux des points donnés les centres des deux cercles donnés.

13. *PROBLÈME IX. Déterminer un point dont la somme des distances à une droite et à deux circonférences données soit la moindre possible ?*

Solution. On construira ce problème comme le *Problème II*, en substituant aux deux points donnés les centres des deux cercles donnés.

14. *PROBLÈME X. Déterminer un point dont la somme des distances à trois circonférences données soit la moindre possible ?*

Solution. On construira ce problème comme le *Problème I*, en substituant aux trois points donnés les centres des trois cercles donnés.

15. *PROBLÈME XI. Lier des points donnés, en nombre quelconque, par un système de droites dont la longueur totale soit la moindre possible* (**) ?

Analise. 1.° On ne doit pas supposer qu'à chacun des points donnés il aboutisse plusieurs des droites cherchées ; car supposons seulement que, A étant un de ces points, (fig. 17) deux MA, NA, des droites cherchées viennent s'y terminer ; on pourrait, en général (5), remplacer le système de ces deux droites par le système des trois droites PA, PM, PN, d'une longueur totale moindre ; en sorte que MA et NA ne rempliraient pas les conditions du problème. A la vérité, il peut bien arriver, dans des cas particuliers, que PA doive être nulle ; mais c'est à la construction du problème qu'il appartient d'indiquer cette circonstance.

2.° On peut remarquer, en second lieu, que, s'il y a des points de concours des droites cherchées, autres que les points don-

(*) Ceci répond, pour un cas particulier, à la note de la page 232.

(**) C'est le dernier des deux problèmes proposés à la page 292.

nés (et il ne peut manquer d'y en avoir de tels, d'après ce qui précède), ces droites ne sauraient s'y réunir en moindre nombre que trois. Si, en effet, en un même point M, (fig. 18) autre que les points donnés, il ne venait aboutir que deux seulement MN, MP, des droites cherchées; au lieu de lier les points N, P, par ces deux droites, on pourrait les lier par la droite unique et plus courte NP, en sorte que les droites MN, MP, ne satisferaient pas aux conditions du problème.

3.° On ne doit pas supposer non plus que celles des droites cherchées qui concourent en un même point autre que les points donnés, s'y réunissent au nombre de plus de trois; car, si l'on supposait seulement quatre de ces droites MN, MP, MQ, MR (fig. 19) concourant en un même point M, il serait possible (5), du moins en général, de remplacer le système de deux de ces droites MQ, MR, par exemple, par les trois droites SM, SQ, SR, d'une longueur totale moindre; de manière que MQ et MR ne rempliraient pas les conditions du problème. A la vérité la situation respective des points M, Q, R, peut bien, comme ci-dessus, dans des cas particuliers, en rendant SM nulle, faire coïncider le point S avec le point M; mais c'est encore ici à la construction du problème qu'il appartient uniquement d'indiquer cette circonstance.

4.° Enfin il est aisé de voir que les droites cherchées, concourant trois à trois en un même point, doivent former autour de ce point des angles égaux entre eux et à quatre tiers d'angle droit; car soit M (fig. 20) le point de concours des trois droites MN, MP, MQ; si les angles formés par ces droites, autour de ce point, n'étaient pas égaux, en remplaçant le point M (5) par un point M′ qui satisfît à cette condition, on substituerait aux trois droites MN, MP, MQ, les trois droites M′N, M′P, M′Q, d'une longueur totale moindre, en sorte que les premières ne rempliraient pas les conditions du problème,

On voit donc que A, B, C, D,..., étant les points donnés, les droites cherchées ne peuvent que former une sorte de rameau de la nature de ceux que représentent les figures 21, 22, 23, 24, 25, de manière que les points M, N, P, Q,... de concours des droites trois à trois est, en général, moindre de deux unités que le nombre des points donnés, et que les angles formés par ces droites autour de ces points sont tous égaux entre eux et à quatre tiers d'angles droits. Il n'est donc plus question maintenant que d'enseigner à construire le problème.

Construction. On sait déjà résoudre le problème pour deux points donnés, puisqu'alors il n'y a d'autre droite à construire que celle qui joint ces deux points ; on sait même le résoudre pour trois points donnés (5) ; si donc on parvient à ramener sa solution, pour le cas où les points donnés sont au nombre de n, à celle qui convient au cas où ces points seraient seulement au nombre de $n-1$, on saura le résoudre généralement ; or c'est ce à quoi on peut parvenir très-simplement, en procédant comme il suit :

Soient pris arbitrairement (fig. 26) deux A, B, des n points donnés, de manière pourtant qu'en les joignant par une droite indéfinie cette droite laisse d'un même côté les $n-2$ points restans. Sur la distance AB comme corde soit décrit, du côté des autres points donnés, un arc AMB, capable de $120°$; soit D le milieu du reste de la circonférence, et soit substitué ce point D aux deux points A, B ; on n'aura plus alors que $n-1$ points. Soit résolu le problème relativement à ces $n-1$ points, et soit alors KMD celle des droites cherchées qui vient se terminer au point D ; en menant MA, MB, et substituant ces deux cordes à la partie MD de KMD interceptée dans le cercle, le problème se trouvera résolu pour les n points donnés. On peut remarquer au surplus que, les droites du système ne pouvant avoir que trois directions distinctes, il s'ensuit que, trois d'entre elles étant déterminées, toutes les autres se déterminent en menant des parallèles à ces trois-là.

16. *Remarque I.* Ce que cette construction laisse d'arbitraire dans le choix des points à employer successivement, fait que, passé le cas de trois points donnés, le problème admet plusieurs solutions, et que, lorsque ces points sont au nombre de plus de cinq, il peut être résolu par

des systèmes de droites essentiellement différens. Ces systèmes sont au nombre de trois pour six points donnés (fig. 23, 24, 25); on en trouve quatre pour sept points; huit points en fournissent treize; et ainsi de suite. Quant au nombre des solutions, ce sera, en général, un pour trois points, deux pour quatre, cinq pour cinq, quatorze pour six, quarante-deux pour sept, cent trente-deux pour huit, et ainsi de suite.

17. *Remarque II.* Si, pour un nombre quelconque A, B, C, D,... de points donnés, on suppose que les droites qui résolvent le problème sont des cordons réunis trois à trois en des nœuds M, N, P, Q,...; et si, aux points A, B, C, D,..., on applique des puissances égales quelconques, dirigées suivant les prolongemens des cordons qui se terminent en ces points; il est évident que ces puissances formeront un système en équilibre.

FIN DU TOME PREMIER.